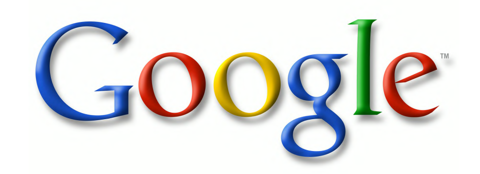


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

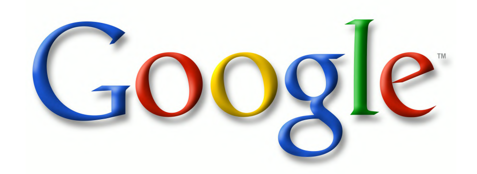
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


B 946,032

4.5.-2



# ANNALEN

DER

# PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND XLVIII.



# ANNALEN

DER

# PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE.

BAND XLVIII.





# ANNALEN

DER

# PHYSIK UND CHEMIE.

71651

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

BAND XLVIII.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT VIERUNDACHTZIGSTER.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

G. UND E. WIEDEMANN.

NEBST FÜNF FIGURENTAFELN.




LEIPZIG, 1893.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

(ARTHUR MEINER.)

QC
1
.A613
n.s.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

# Inhalt.

## Neue Folge. Band XLVIII.

### Erstes Heft.

1) Die Seitenzahlen der Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft bis zum Schluss des Jahres 1892 schliessen sich denen im Decemberheft 1892 der Annalen an. Für das Jahr 1893 der Verhandlungen beginnt eine neue selbständige Paginirung derselben.

*Geschlossen am 15. März 1893.*

Bound in with Bd. 47

*Beginning with 1893 the Verhandlungen issued separately for the year 1893 & also included in Band 50

## Nachweis zu den Figurentafeln.

1893. ANNALEN № 1.

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLVIII.

# I. *Versuch einer Erweiterung der Maxwell'schen Theorie; von Hermann Ebert.*

1. Bei allen Erscheinungen der stationären electrischen Bewegungen hat sich bisher die Maxwell'sche Theorie bewährt; auch die Phänomene der statischen Electricität werden durch ihre Gleichungssysteme widerspruchsfrei dargestellt. Erscheinungen, wie sie die raschen electrischen Schwingungen der Hertz'schen Versuche darbieten, finden sogar lediglich durch sie eine befriedigende Darstellung, da man hier bei allen älteren Theorieen „schon in den elementarsten Zügen auf Widersprüche geräth"[1]. Durch den Nachweis, dass sich electrische Störungen durch ein Medium mit der Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen, eröffnete die Maxwell'sche Theorie weiter die Aussicht, auch die Erscheinungen der Optik durch sie erklären zu können. In der That stimmen die Folgerungen der Theorie bei den Nichtleitern im engsten Sinne des Wortes mit den Erfahrungen, in den wesentlichen Zügen überein. Zeigen sich aber schon hier einzelne Abweichungen, so versagen die Gleichungen gänzlich bei den Halbleitern, zu denen auch die gewöhnlich als Nichtleiter bezeichneten Substanzen gehören; die Formeln vermögen die Phänomene der Absorption und Dispersion derselben nicht den Beobachtungen entsprechend wieder zu geben[2]. Liegen nun hier unlösbare Widersprüche vor, die zugleich das Fundament der ganzen Theorie erschüttern, oder lässt sich das Maxwell'sche Gleichungssystem so erweitern, dass auch die Erscheinungen, welche rasch in ihrer Richtung wechselnde electrische Bewegungen von der Periode der Lichtschwingungen darbieten, mit umfasst werden, unbeschadet seiner Brauchbarkeit für die anderen der erwähnten Gebiete?

1) H. Hertz, Untersuchungen. 9. p. 170. Leipzig, J. A. Barth 1892.

2) Vgl. u. A. E. Cohn, Wied. Ann. 45. p. 55. 1892.

Die bisher in diesem Sinne gemachten Versuche laufen zum Theil darauf hinaus die fertigen Gleichungen hinterher zweckentsprechend abzuändern. Man kann indessen auch fragen: Liegt nicht schon in den Maxwell'schen Grundideen der Keim zu Erweiterungen, die eintreten müssen, wenn wir von den über endliche Strecken stattfindenden Electricitätsverschiebungen, wie wir sie bei Strömen in gewöhnlichen Leitern studieren, übergehen zu jenen, gegen diese unendlich kleinen, ausserordentlich rasch wechselnden Electricitätsbewegungen, die wir in der Optik vor uns haben, wenn wir uns auf den Standpunkt der electromagnetischen Lichtheorie stellen?

Schon seit längerer Zeit bin ich damit beschäftigt, der Frage in diesem Sinne näher zu treten.

In einer Anmerkung einer am 14. December 1891 vor der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen vorgetragenen „Vorläufigen Mittheilung" über eine experimentelle Untersuchung, welche Herr Professor E. Wiedemann und ich angestellt haben,[1] bemerkte ich (p. 30 des Separat-Abzuges): „Die Maxwell'sche Theorie verfolgt consequent das Ziel, die electrischen Bewegungen den Grundgleichungen der Mechanik zu unterwerfen und zeigt, wie in der That die etwas specialisirten Lagrange'schen Differential-Gleichungen (in ihrer zweiten Form) ausreichen die meisten electrischen Erscheinungen als einfache Bewegungsvorgänge darzustellen; die Specialisirungen laufen darauf hinaus, die Strombewegungen auf *eine* cyklische Variabele zurückzuführen und durch eine Reihe langsam veränderlicher Parameter näher zu bestimmen. Die allgemeinen Feldgleichungen werden dann aus den polycyklischen Gleichungen gewonnen, unter der Annahme, dass die Geschwindigkeiten aller Theile des Systems sich linear ausdrücken lassen durch die ersten Ableitungen der cyklischen Variabelen nach der Zeit; der Begriff des electromagnetischen Momentes, welches den electrotonischen Zustand des Feldes bestimmt, erhält seine bestimmte Definition, wie dies in der Boltzmann'schen Darstellung besonders schön hervortritt.

1) E. Wiedemann und H. Ebert, Ueber electrische Entladungen. (Sitz. Ber. der physikalisch-medicin. Soc. Erlangen. 24. p. 84. 1892.)

Bei dieser Ableitung aus der Cykeln-Theorie wurden indessen nur reine Cykeln benutzt d. h. nur solche, bei denen keine periodisch hin- und hergehenden Theile vorkommen. Darum kann die daraus entwickelte Theorie streng auch nur für solche Electricitätsbewegungen gelten. Sowie rasch hin- und hergehende Bewegungen betheiligt sind, müssen sich Abweichungen einstellen. Bei der Ordnung der bei den neueren Versuchen über electrische Schwingungen benutzten Schwingungszahlen ($10^8$ bis $10^{10}$ pro Secunde) sind die Abweichungen noch gering. Bei electrischen Oscillationen von der Ordnung der Lichtschwingungen sind sie erheblich. Es scheint, dass man bei Berücksichtigung der Glieder, welche hin- und hergehenden Theilen entsprechen, deren Geschwindigkeiten nicht mehr linear mit den cyklischen Variabelen zusammenhängen, bei dem Ansatze der polycyklischen Gleichungen und dem daraus gebildeten Ausdrucke für das das Feld bestimmende electromagnetische Moment zu plausibelen Formeln sowohl für die Absorption wie für die Dispersion in Halbleitern gelangt. Es soll dementsprechend die Theorie der polycyklischen Bewegungen mit hin- und hergehenden Theilen und ihre Anwendung auf die Maxwell'sche Theorie gelegentlich eingehender behandelt werden."

Ich habe die hier angedeutete Untersuchung durchgeführt und bin in der That zu Systemen von Differentialgleichungen gelangt, welche die längst an der Erfahrung erprobten Formeln der Herren H. von Helmholtz und E. Lommel als Lösungen hatten. Um dieselbe Zeit, als ich meine Arbeit an die Redaction der „Annalen" einschicken wollte, erschien die Arbeit von Hrn. D. A. Goldhammer über: „Die Dispersion und Absorption des Lichtes nach der electrischen Lichttheorie.[1]) Derselbe gelangt zu denselben Endformeln, aber auf einem von dem meinigen gänzlich verschiedenen Wege. Hr. Goldhammer geht nicht von den mechanischen Grundlagen der Maxwell'schen Theorie aus, sondern stellt die beiden Systeme von Differential-Gleichungen (9) und (10), die ihm bei seinen Betrachtungen als Ausgangspunkt dienen, *hypothetisch* auf. Es schien mir daher nicht überflüssig, wenigstens denjenigen

1) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. 47. p. 93. 1892.

Theil meiner Untersuchungen zu veröffentlichen, welcher die Ableitung dieser Gleichungen aus den Principien Maxwell's und zwar nach der Theorie der cyklischen Bewegungen enthält.

2. Einer der Hauptvorzüge der Maxwell'schen Theorie, dem sie auch das Uebergewicht über alle anderen Theorien der electrischen Erscheinungen verdankt, scheint mir darin zu liegen, dass es möglich ist, die Gleichungen derselben aus den Formeln der allgemeinen Kinematik herzuleiten, wie ja auch Maxwell selbst grossen Werth auf diese mechanische Begründung legt. Vgl. Cap. V—VIII des zweiten Bandes des Treatise. Die sich hier findenden Betrachtungen sind durchaus solche, wie sie der v. Helmholtz'schen Cykeln-Theorie entsprechen; die Gleichungen der §§ 579 und 580 lassen sich geradezu als die Helmholtz'schen für Monocykel auffassen, wo $y$ die cyklische Variabele, die $x$ die langsam veränderlichen Coordinaten, entsprechend den Helmholtz'schen $p_b$ und $p_a$ sind, worauf schon Hr. Boltzmann 1884 aufmerksam machte.[1]) Man kann bei dieser Auffassung der electrischen Bewegungen als cyklische die Gleichungen der Maxwell'schen Theorie mit einem Minimum von Nebenannahmen ableiten, wie dies für ruhende, homogene isotrope Körper von Boltzmann in seinem Buche über die Maxwell'sche Theorie gezeigt worden ist.[2]) Dass auch die Grundgleichungen der Electrodynamik für

1) L. Boltzmann, Sitz.-Ber. Wiener Ak. math.-naturw. Cl. II. Abth. p. 231. 1884.

2) L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwell's Theorie der Electricität und des Lichtes. Leipzig, J. A. Barth. 1891. Im Folgenden wird öfter auf diese Darstellung Bezug genommen werden. Hr. H. Poincaré kommt in der Vorrede zum ersten Bande seiner Electricité et Optique (Paris 1890) auf diese mechanischen Betrachtungen Maxwell's als der „idée fondamentale, mais un peu masquée“ zu sprechen, aber er führt sie in seinem Buche nicht durch. Dagegen hat Hr. G. Wiedemann vor diesen neueren Darstellungen im II. Bande 2. Hälfte seiner Lehre vom Galvanismus (2. Aufl. p. 595 ff. 1874) die Betrachtungen, die sich als cyklische darstellen, als den eigentlichen Kern der Maxwell'schen Theorie herausgehoben; in der That sind die hier gegebenen Gleichungen

$$\Xi = -\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\xi}\right)$$

($T$ kinetische Energie) identisch mit der Boltzmann'schen Formel

bewegte Körper[1]) vollständig aus dem an das Princip der kleinsten Wirkungen anknüpfenden, rein mechanischen Betrachtungen erhalten werden, hat kürzlich Hr. H. v. Helmholtz[2]) gezeigt.

Knüpfen wir unsere Betrachtungen also an die Cykeln-Theorie an, so sind wir sicher mit Vorstellungen, welche bereits von Maxwell seiner Theorie zu Grunde gelegt wurden, im Einklang zu stehen. Wir erinnern hier daran, dass Hr. v. Helmholtz unter einer cyklischen Bewegung eine solche versteht, die stationär in sich zurückläuft, sodass an jeder Stelle jedes sich von seinem Platze entfernende Theilchen sofort durch ein gleichbeschaffenes, in derselben Richtung mit der gleichen Geschwindigkeit bewegtes ersetzt wird. Die allgemeine Lagrange'sche Coordinate, welche diese stationäre Bewegung bestimmt, wird die cyklische genannt (bei Helmholtz mit $p_{\mathfrak{b}}$, bei Boltzmann mit $l$ bezeichnet). Daneben wird der Zustand des Systems noch durch eine Reihe relativ langsam sich verändernder Coordinaten (Parameter) ($p_{\mathfrak{a}}$ bezw. $k$) bestimmt. Enthält das mechanische System nur eine in sich zurücklaufende Bewegung, so heisst es ein *monocyklisches* System, sind mehrere solche, durch verschiedene, voneinander unabhängige cyklische Variabele $l_1, l_2, l_3 \ldots l_\nu$ bestimmte Bewegungen vorhanden, so heisst es ein *polycyklisches* System.

In analytischer Beziehung ist für eine cyklische Bewegung characteristisch, dass bei Aufstellung der Bewegungsgleichungen der Werth der cyklischen Variabelen selbst gar nicht in Betracht kommt, sondern dass sowohl die kinetische wie die

---

$$L = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'}$$

für die cyklische Variabele $l$, die Formel

$$X = -\frac{dT}{dx}$$

identisch mit der Formel

$$K = -\frac{\partial T}{\partial k}$$

für die den ponderomotorischen Kräften $K$ entsprechenden „langsam veränderlichen Parameter" (Boltzmann p. 16).

1) Vgl. H. Hertz, Untersuchungen. **14.** p. 256.

2) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. **47.** p. 1. 1892, vgl. über die Beziehungen zur Cykeln-Theorie namentlich den Schluss (p. 25 u. 26).

gesammte Energie nur von der Ableitung der cyklischen Variabelen nach der Zeit abhängt. So ist z. B. bei dem Centrifugalregulator, der zwar nur einen „unechten“ Monocykel darstellt, weil bei ihm die ihren Ort verlassenden Massen nicht unmittelbar, sondern erst nach einer bestimmten Periode durch gleiche und gleichbewegte Massen ersetzt werden, sowohl die kinetische Energie, wie die durch die Kugelhöhe bestimmte potentielle Energie nur von der Geschwindigkeit $l'$ der Kurbel, d. i. des „Antriebpunktes der cyklischen Variabelen“ abhängig, nicht aber von der jeweiligen Kurbelstellung $l$ zu einer bestimmten Anfangslage selbst.

3. Die Grundgleichungen der Maxwell'schen Theorie sind für isotrope ruhende Medien bei Leitern $\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}$ [609 ($G$) des Treatise], bei Nichtleitern $\mathfrak{D} = 1/(4\pi) K\mathfrak{E}$ [608 ($F$)], wo $\mathfrak{K} = ip + jq + kr$ die Leitungsströmung, $C$ die Leitfähigkeit, $\mathfrak{E} = iP + jQ + kR$ die electromotorische Kraft, $\mathfrak{D} = if + jg + kh$ die electrische Verschiebung und $K$ die specifische inductive Capacität des Mediums ist.[1] Die erste Gleichung stellt eine Electricitätsbewegung über grössere Strecken vor, die zweite eine Bewegung, welche wir uns auf die kleinsten Theilchen beschränkt zu denken haben (vgl. p. 21). Als einen characteristischen Zug für seine Theorie bezeichnet Maxwell selbst, dass bei ihm die wahre Gesammtströmung $\mathfrak{C} = iu + jv + kw$ aus der einfachen Superposition von Leitungsströmung $\mathfrak{K}$ und Verschiebungsströmung $\mathfrak{D}'$ hervorgeht:

$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \mathfrak{D}'$ [610 ($H$)] (Die Accentuirungen bedeuten hier wie im Folgenden Ableitungen nach der Zeit).

Bei der Betrachtung der Lichtbewegungen sind die electromotorischen Kräfte electrostatischen (guerikischen[2]), hydro- oder thermoelectrischen Ursprungs auszuschliessen, sodass die electromotorische Kraft $\mathfrak{E}$ nur durch die inducirende Wirkung des Feldes bestimmt ist. Diese Feldwirkung wird an jeder Stelle gegeben durch $\mathfrak{A}$ (bei Boltzmann $J$), das electromagnetische oder electrokinetische Moment, und zwar so, dass

1) Wir werden im Folgenden wegen der grösseren Kürze und Uebersichtlichkeit der Formeln immer die Vectoren schreiben und erst zum Schluss, wo es sich um den Vergleich mit Hrn. Goldhammer's Formeln handelt, die Vectorengleichungen auflösen.

2) Vgl. Boltzmann, a. a. O. p. 78. Anm.

$\mathfrak{E} = -d\mathfrak{A}/dt$, d. h. $-\mathfrak{A}'$ (resp. $-J'$) $= iP + jQ + kR$ zu setzen ist. Dieser Begriff ist einer der wichtigsten der ganzen Theorie; wir werden zeigen, dass er auch bei der hier versuchten Erweiterung der Theorie seine Bedeutung behält.

4. Fassen wir das System von Bewegungen, welches einem galvanischen Strome zu Grunde liegt, als einen Monocykel im Sinne des Hrn. v. Helmholtz auf, so erscheint die Ableitung $q_{\mathfrak{b}}$ der cyklischen Variabelen $p_{\mathfrak{b}}$ als Stromesintensität ($l'$ bei Boltzmann), die die Gestalt und Lage der Strombahn bestimmenden Coordinaten als „langsam veränderliche Parameter" ($p_{\mathfrak{a}}$ bezw. $k$). Sowie der stationäre Zustand eingetreten ist, theilt die Electricitätsbewegung in der That vollkommen die Grundeigenschaft mit den monocyklischen Bewegungen: alle Erscheinungen hängen nur von der Ableitung der cyklischen Variabelen nach der Zeit ab, die Variabele $p_{\mathfrak{b}}$ selbst kommt weder in dem Ausdrucke $\Phi$ für die potentielle, noch in dem Ausdrucke $L$ für die kinetische Energie vor. Für diesen Fall gehen dann die allgemeinen Lagrange'schen Gleichungen in der ihnen von Hrn. v. Helmholtz gegebenen Form

$$\text{(a)} \qquad P_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

($H = \Phi - L$ das kinetische Potential) für die cyklische Variabele in die Form

$$\text{(b)} \qquad P_{\mathfrak{b}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q_{\mathfrak{b}}}, \text{ oder in } P_{\mathfrak{b}} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_{\mathfrak{b}}}$$

über, da allgemein $\partial H / \partial q_i = -\partial L / \partial q_i$ ist. Dieser Ausdruck für die electromotorische Kraft $P_{\mathfrak{b}}$ der electromagnetischen Induction stimmt mit dem von Maxwell § 579 gegebenen $-dp/dt$ überein, wo $p = \partial T / \partial y$ ist ($T$: kinetische Energie, $y$ : cyklische Variabele) [bei Boltzmann : $d/dt\, \partial T / \partial l'$].

Bei unserem Problem, wo es sich nicht mehr um stationäre, sondern um (rasch) hin- und hergehende Bewegungen handelt, kann man die vorstehenden Betrachtungen nicht mehr in vollem Umfange anwenden. Denn bei solchen Bewegungen wie z. B. bei den Pendelbewegungen oder den elastischen Schwingungen ist die potentielle Energie $\Phi$ eine Function des Parameters $p_{\mathfrak{b}}$, der hier die Abweichung vom Gleichgewichtszustande bestimmt. Ist $p_{\mathfrak{b}}$ klein, so können wir $\Phi$ in eine nach steigenden Potenzen

von $p_\mathfrak{b}$ fortschreitende Reihe entwickeln. Da bei allen zum Gleichgewichtszustand symmetrischen oscillatorischen Bewegungen $\Phi$ für positive wie negative $p_\mathfrak{b}$ denselben Werth hat, so fallen Glieder mit ungeraden Potenzen fort und vernachlässigen wir Glieder von vierter und höherer Ordnung, so haben wir zu setzen:

$$\Phi = \frac{A}{2} p_\mathfrak{b}^2, \qquad L = \frac{B}{2} q_\mathfrak{b}^2;$$

die allgemeinen Bewegungsgleichungen lauten jetzt:

$$P_\mathfrak{b} = -A p_\mathfrak{b} - B \frac{d q_\mathfrak{b}}{d t}; \tag{c}$$

hier fällt die cyklische Variabele *nicht* fort, wir können das erste Glied der allgemeinen Gleichung (a) nicht mehr vernachlässigen wie bei stationärer, stets in demselben Sinne weiterschreitender Electricitätsbewegung. Legt man eine „harmonische" Schwingung zu Grunde, so ergiebt die Gleichung (c), dass die Kraft, welche in jedem Augenblicke auf den Antriebspunkt von $q_\mathfrak{b}$ wirken müsste, um die Coordinate $p_\mathfrak{b}$ constant zu erhalten, selbst eine periodische Function der Zeit und des Ortes, ihre Grösse aber auch von der Schwingungszahl der Wechselströmung abhängig sein müsste.

Dies zeigt, dass die Cykelntheorie nicht ohne weiteres auf unseren Fall anwendbar ist, ja es könnte sogar scheinen, als ob überhaupt die Anwendung dieser zunächst speciell für stationäre Bewegungen ausgearbeiteten Theorie auf das hier vorliegende Problem von Electricitätsbewegungen aussichtslos wäre. Dass das nicht der Fall ist, liegt in der nahen Verwandtschaft der echt monocyklischen Systeme mit solchen, in denen hin- und hergehende Bewegungen vorkommen, die mit den eigentlich monocyklischen durch dieselbe cyklische Variabele verbunden sind, und die sich in einer bestimmten Periode für längere Zeit immer in derselben Weise wiederholen. Es würde an dieser Stelle zu weit führen, dies allgemein zu begründen, das specielle Beispiel, welches die Maxwell'sche Theorie in ihrer Erweiterung darbietet, wird weiter unten eingehender erörtert; nur darauf möchte ich hinweisen, dass solche Bewegungssysteme mit hin- und hergehenden Theilen u. a. auch die wichtige Eigenschaft mit den echt monocyklischen theilen,

dass die lebendige Kraft als integrirender Nenner bei irgend einer Zustandsänderung auftritt.[1])

Folglich ist Aussicht vorhanden, auch das Maxwell'sche Gleichungssystem, welches sich als polycyklisches darstellt, für diese Fälle geeignet erweitern zu können. Beginnen wir mit einem einfachen Monocykel.

5. Entsprechend den von Faraday und Maxwell angebahnten Anschauungen nimmt die Umgebung der electrisirten oder von electrischen Bewegungen erfüllten Körper an der Bewegung theil. Folglich haben wir uns auch die monocyklische Strombewegung nicht nur auf den Stromträger selbst beschränkt zu denken, sondern wir müssen uns vorstellen, dass das ganze umgebende Medium, das „Feld", an der Bewegung theilnimmt.

Die Veränderung des Zustandes, die wir beim Stromschluss an einer Stelle des Raumes bemerken (z. B. das Auftreten magnetischer Kräfte), ist nach dieser Auffassung auf eine Bewegung an dieser Stelle zurückzuführen, welche in einfacher rationaler[2]) Weise für jeden Feldpunkt von derselben Variabelen, der cyklischen Variabelen, abhängt. Bei der Strombildung geht die Bewegung von der Strombahn aus, von Theilchen zu Theilchen fortschreitend verbreitet sie sich über das ganze Medium, indem sie einen Feldpunkt nach dem anderen ergreift. Während des stationären Zustandes bleiben diese Bewegungen im Felde erhalten; die in ihnen aufgespeicherte kinetische Energie repräsentirt die zur Ausbildung des Feldes aufzuwendende Arbeit, die bei einfachem Stromkreise bekanntlich $\frac{1}{2}(AS)S$ ist, wo $A$ der Coefficient der Selbstinduction, $S$ die schliesslich erreichte constante Stromstärke ist. Wir haben uns vorzustellen, dass Strom und Feld dauernd in Wechselwirkung sich befinden und wie der Strom oder die Bewegung im Stromleiter fortwährend die Bewegung in jedem Feldpunkte bestimmt, umgekehrt jeder Feldpunkt auf den Stromleiter zurückwirkt. Diese Wirkung kommt zur Geltung, wenn wir den Strom öffnen. Die jetzt successive ebenfalls verschwindenden Bewegungen im Felde unterhalten den sogenannten Oeffnungs-

---

1) Vgl. H. Poincaré, Thermodynamique. p. 408. 1892.

2) Vgl. Boltzmann, l. c. p. 19.

strom, bei dem genau wieder diejenige Energiemenge zurückgegeben wird, die vorher zur Ausbildung des Feldes aufgewendèt werden musste. Hierbei ist es völlig gleichgültig, welche Vorstellung wir uns im Speciellen über den Mechanismus dieser Verbindung der einzelnen Feldpunkte mit dem Stromleiter machen; in vieler, namentlich auch formaler Beziehung empfiehlt sich die schon von Maxwell selbst vorgeschlagene Wirbeltheorie, wonach wir uns die längs einer Kraftlinie gelegenen Feldpunkte wie in einem Wirbelfaden bewegt vorzustellen haben. Indessen darf man auch diese Analogie nicht zu weit ausdehnen. [1])

Das Wesentliche dieser Auffassung liegt jedenfalls darin, dass die Bewegungen, die den electrischen Erscheinungen zu Grunde liegen, monocyklisch miteinander verbunden sind und von Theilchen zu Theilchen weitergegeben werden, dass also das Zwischenmedium eine wesentliche Rolle spielt.

In natürlichstem Zusammenhange hiermit steht die Folgerung, dass die electromagnetische Wirkung *Zeit* zu ihrer Verbreitung braucht. In der That erscheinen schon in dem ersten Entwurfe der Maxwell'schen Theorie die beiden Forderungen: Betheiligung des Zwischenmittels und endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit untrennbar vereint. Gerade hier müssen sich demzufolge bei der Aufstellung der Feldgleichungen Abweichungen einstellen, wenn wir Stromschwankungen zu Grunde legen, die so rasch erfolgen, dass ihre Aenderungen schon merklich werden in Zeiten, in denen sich die electrischen Bewegungen um relativ kleine Strecken fortgepflanzt haben, mit anderen Worten, um sogleich periodische Aenderungen von der Ordnung der Lichtbewegungen ins Auge zu fassen, wenn die Wellenlänge commensurabel mit den Abständen der Molecüle wird. Hier bedarf die Maxwell'sche Theorie einer Erweiterung, ohne dass irgend welche Annahmen eingeführt werden müssten, die nicht schon in Maxwell's Theorie liegen. Eine Erweiterung in diesem Sinne habe ich im Folgenden durchzuführen versucht.

6. Wenn wir die Beziehungen des Stromes in einem Feldpunkte durch eine Formel darstellen wollen, so zeigt die Er-

---

1) Vgl. u. a. H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 47. p. 25. 1892.

fahrung, dass dabei die einfachste Annahme, die wir machen können, bereits ausreicht, um Ausdrücke zu erhalten, die sich für stationäre oder langsam veränderliche Ströme vollkommen bewähren, die Annahme nämlich, dass die Geschwindigkeit $v_i$ in einem Feldpunkte $i$ der cyklischen Geschwindigkeit $l'$ proportional ist. Wir können also setzen für den Zeitmoment $t$[1]):

$$(1) \qquad v_i(t) = a_i \, l'(t);$$

hier hängt der Factor $a_i$ von der Lage des Punktes $i$ zur Strombahn, aber auch von der Natur des Mediums ab.

Dabei sind die $v_i$ und das $l'$ Functionen der Zeit, was wir durch das in Klammer dahintergesetzte $t$ zum Ausdruck bringen wollen.

Wenn der Strom sehr rasch wechselt, so müssen wir dem Umstande Rechnung tragen, dass die Wirkung *Zeit braucht*, um sich von dem Stromträger bis zum Feldpunkte $i$ fortzupflanzen. Die Verbreitung der cyklischen Bewegung geschehe mit der Geschwindigkeit $V$, wo $V$ eine für das Medium charakteristische Grösse ist, die ausserdem im allgemeinen von der Periodenzahl der Wechselströmung abhängig ist. Dann haben wir zu setzen:

$$(2) \qquad v_i(t) = a_i \, l'\left(t - \frac{c_i}{V}\right),$$

wo $c_i$ eine für den Punkt $i$ charakteristische Constante von der Dimension einer Länge ist, welche abhängt von der Art der Verknüpfungen, die zwischen dem Feldpunkte $i$ und dem Stromleiter bestehen, also einerseits von der Lage des ersteren zu letzterem, andererseits aber auch von der Natur des Mediums.

Für schnell wechselnde Electricitätsbewegungen haben wir also zu setzen:

$$(3) \qquad \begin{cases} v_i(t) = a_i^{(1)} l'(t) + a_i^{(2)} l''(t) + a_i^{(3)} l'''(t) + \ldots, \text{ wo} \\ a_i^{(1)} = a_i, \quad a_i^{(2)} = -a_i^{(1)} \dfrac{c_i}{V}, \quad a_i^{(3)} = \dfrac{a_i^{(1)}}{1 \cdot 2}\left(\dfrac{c_i}{V}\right)^2 \text{ etc.,} \end{cases}$$

ein Ausdruck, der für langsame Veränderungen in der Electricitätsbewegung in den für die Maxwell'sche Theorie geltenden (1) übergeht.

Dabei ist nur vorausgesetzt, dass die Verknüpfungen im

---

1) Vgl. Boltzmann, l. c. p. 19.

Medium bei den rasch wechselnden Strömen gerade so functioniren, wie die bei stationären Strömen, eine Annahme, zu der wir berechtigt sind; denn Abweichungen könnten sich nur infolge reibungsähnlicher Vorgänge geltend machen; wir sehen aber, wie Stahlmagnete jahrelang ihr Feld behalten; die hier zu Grunde liegenden Bewegungen gehen also augenscheinlich so gut wie ohne Energieverlust vor sich.

Für harmonische Bewegungen, d. h. solche, die durch eine Kreisfunction dargestellt werden, wie bei Lichtschwingungen, für die die Abhängigkeit von der Zeit im allgemeinen von der Form $l' = A . e^{i 2 \pi m t}$ ($m = 1 / T$ Schwingungszahl) ist, lautet die Reihe:

$$v_i(t) = l'(t)\left[a_i^{(1)} - a_i^{(3)}(2\pi m)^2 + a_i^{(5)}(2\pi m)^4 \mp \ldots\right].$$

Das $n$te Glied der Reihe hat die Form

$$(-1)^{n-1}\frac{a_i^{(1)}}{(2n-2)!}(2\pi c_i)^{2n-2} . \frac{1}{\lambda^{2n-2}},$$

wenn wir für $m / V$ die reciproke Wellenlänge $\lambda$ schreiben; die $a_i$ und $c_i$ sind endliche Grössen von der Ordnung des Abstandes der aufeinander wirkenden Bewegungen, bei dem Lichte also von molecularen Dimensionen; die Reihe convergirt „unbedingt“.

Da die Wellenlänge nur im Nenner vorkommt, so werden die höheren Glieder überhaupt erst bei den sehr kurzwelligen Schwingungen bemerklich, bei den meterlangen Wellen der Hertz'schen Versuche wird schon das zweite Glied völlig unmerklich und die Reihe zieht sich auf das erste Glied zusammen (wo wir dann wieder für $a_i^{(1)}$ einfach $a_i$ wie in (1) schreiben können), wie bei stationären und angenähert stationären electrischen Bewegungen. Abweichungen, wie sie sich z. B. in der Arbeit „Ueber die Ausbreitungsgeschwindigkeit der electrodynamischen Wirkungen“ des Hrn. Hertz[1]) herausstellten, haben daher nicht ihren Grund darin, dass hier die Theorie bereits nicht mehr ganz zutreffend wäre, sondern in anderen specielleren Ursachen, wie ja Hr. Hertz selbst schon hervorgehoben hat.[2])

Dagegen werden bei Lichtschwingungen die höheren Glieder

1) H. Hertz, Unters. p. 115. 1892.

2) H. Hertz, l. c. p. 12 ff. u. p. 290. 1892.

merklich und müssen hier berücksichtigt werden; unter Lichtschwingungen verstehen wir dabei den ganzen Bereich der infrarothen, sichtbaren und ultravioletten Schwingungen, also Wellen von etwa 24 $\mu$ bis zu 0,18 $\mu$ Länge. In der Berücksichtigung der höheren Glieder in (3) besteht analytisch die hier vorgeschlagene Erweiterung.

7. Haben wir einen von schwingungsfähigen Molecülen, innerhalb deren sich periodische, electrische Bewegungen vollziehen, erfüllten Raum, so müssen wir der Wechselwirkung aller in ihm vorhandenen electrischen Bewegungen Rechnung tragen; wir haben dann nicht mehr einen Monocykel, sondern einen Polycykel vor uns. Hier wird der Feldzustand in der Maxwell'schen Theorie durch das electromagnetische Moment bestimmt; dasselbe hängt von den Verknüpfungen aller bewegten Theilchen mit den Antriebspunkten der im System vorhandenen cyklischen Variabelen ab und bringt die genannte Wechselwirkung zum Ausdruck; wir wollen zeigen, dass ein analoger Ausdruck von derselben Bedeutung auch in der erweiterten Theorie besteht.

Sind $\nu + 1$ Ströme vorhanden, die durch ebensoviele cyklische Variabele $l, l_1, l_2 \ldots\ldots l_\nu$ bestimmt sind, so ist in diesem polycyklischen System die Geschwindigkeit in einem Feldpunkte $i$:

$$(4) \quad \begin{cases} v_i = a_i^{(1)} l' + a_i^{(2)} l'' + a_i^{(3)} l''' + \ldots\ldots \\ \quad + b_{1i}^{(1)} l_1' + b_{1i}^{(2)} l'' + b_{1i}^{(3)} l''' + \ldots\ldots \\ \quad + b_{2i}^{(1)} l_2' + b_{2i}^{(2)} l_2'' + b_{2i}^{(3)} l_2''' + \ldots\ldots \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad + b_{\nu i}^{(1)} l_\nu' + b_{\nu i}^{(2)} l_\nu'' + b_{\nu i}^{(3)} l_\nu''' + \ldots\ldots \end{cases}$$

wo die Coefficienten $a$ die Bedeutung wie oben in (3) haben und

$$(4a) \quad \begin{cases} b_{1i}^{(2)} = -b_{1i}^{(1)}(d_{1i/V}), \; b_{1i}^{(3)} = \tfrac{1}{2} b_{1i}^{(1)} (d_{1i/V})^2, \\ b_{2i}^{(2)} = -b_{2i}^{(1)}(d_{2i/V}), \; b_{2i}^{(3)} = \tfrac{1}{2} b_{2i}^{(1)} (d_{2i/V})^2 \text{ etc.} \end{cases}$$

sind, wo die $d$ analoge Bedeutung wie oben die $c$ haben; $l$ ohne Index soll sich auf den Strom beziehen, *auf* den wir unsere Aufmerksamkeit speciell lenken. Herr Boltzmann bezeichnet ihn passend als „Aufstrom“.[1])

---

1) Boltzmann, a. a. O. p. 51.

Wir wollen zunächst annehmen, dass nur harmonische Bewegungen im Felde vorkommen, bez. von den Schwingungszahlen m, $m_1$, $m_2$, .... $m_\nu$, dann können wir analog wie auf S. 12 schreiben:

$$(5)\quad \begin{cases} v_i = l\,(\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(3)}.\mathrm{m}^2 + \alpha_i^{(5)}.\mathrm{m}^4 \mp \ldots) \\ \quad + l_1'\,(\beta_{1i}^{(1)} - \beta_{1i}^{(3)}.\mathrm{m}_1^2 + \beta_{1i}^{(5)}.\mathrm{m}_1^4 \mp \ldots) \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + l_\nu'\,(\beta_{\nu i}^{(1)} - \beta_{\nu i}^{(3)}.\mathrm{m}_\nu^2 + \beta_{\nu i}^{(5)}.\mathrm{m}_\nu^4 \mp \ldots) \end{cases}$$

oder, wenn wir für die convergierenden Reihen die Abkürzungen: $A_i$, $B_{1i}$, $B_{2i}$, ... $B_{\nu i}$ einführen,

$$(6)\qquad v_i = A_i l + B_{1i} l_1' + B_{2i} l_2' + \ldots + B_{\nu i} l_\nu'.$$

Die Coefficienten $A$ und $B$ hängen von den Verknüpfungen des Feldpunktes $i$ mit den Strömen des Feldes, also der gegenseitigen Lage beider und der Natur des Zwischenmediums, ausserdem von der speciellen Beschaffenheit jedes einzelnen Stromes (Amplitude, Schwingungszahl und Phase) ab. Die gesammte kinetische Energie, die im Felde aufgespeichert ist, wird

$$(7)\quad \begin{cases} T = \dfrac{l'^2}{2} \sum m_i A_i^2 \\ + l \sum i \sum\limits_{h=1}^{h=\nu} m_i A_i B_{hi} l_h' + \sum i N_i \end{cases}$$

Die letzte der drei Summen ist nur von Verbindungen der Ströme $l_h$ untereinander abhängig, sie enthält $l$ gar nicht.

Die Doppelsumme, der Factor von $l$, ist das electromagnetische Moment $J$ des Feldes in Bezug auf den Aufstrom. Sie ist abhängig 1. von der Natur des Feldes und zwar a) von dem augenblicklichen Zustande d. h. der Phase und Intensität jeder im Felde vorhandenen electrischen Bewegung (bestimmt durch $l_h'$), b) von der räumlichen Anordnung aller dieser Bewegungen (bestimmt durch $B_{hi}$), c) der Vertheilung der im Felde bewegten Massen (bestimmt durch $m_i$); 2. von der Lage (aber nur von dieser) des Aufstroms im Felde (bestimmt durch $A_i$).

Es existirt also auch hier eine Function $J$, welche dieselbe geometrische Bedeutung und Eigenschaften hat, wie in der gewöhnlichen Maxwell'schen Theorie; auf sie sind alle

Schlüsse ohne Weiteres anwendbar, mittelst deren man aus dieser Function die Maxwell'schen Feldgleichungen ableiten kann (vergl. Boltzmann a. a. O. p. 52 f.). Unsere allgemeinere Function $J$ geht in das Maxwell'sche elektromagnetische Moment $\mathfrak{A}$ für stationäre oder nahezu stationäre Bewegungen über; dann bleiben von den Reihen $A_i$ und $B_{hi}$ in 6. nur die Anfangsglieder zurück, die wir dann mit den entsprechenden kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen wollen, um völlige Identität mit Maxwell's Formel (Boltzmann Gleichung 24, p. 52) zu erzielen.

Wir wollen nun noch die Voraussetzung fallen lassen, dass die Feldbewegungen im Allgemeinen harmonische sind, und wollen nur annehmen, dass an der Stelle, die wir gerade ins Auge fassen, eine zu Lichterscheinungen im weitesten Sinne des Wortes Veranlassung gebende electrische Bewegung stattfindet; diese Bewegung, die wir somit als der Klasse der „Leuchtbewegungen"[1]) zugehörig betrachten, ist nach den Principien der Optik immer eine harmonische; auf sie beziehe sich $l$ ohne Index. Wir können dann für die Reihe

$$(a_i^{(1)} l + a_i^{(2)} l' + a_i^{(3)} l'' + \dots)$$

wieder den einfacheren Ausdruck $l\, A_i$ (vgl. die Gleichungen (5) und (6)) treten lassen.

Die Geschwindigkeit $v_i$ in dem Feldpunkte $i$ ist dann wieder durch (4) gegeben, das electrokinetische Moment $J$, welches aus den Doppelproducten der ersten mit allen übrigen Reihen hervorgeht, hat nach Umordnung der Glieder die Form:

$$\begin{aligned}
\sum i\, m_i & (a_i^{(1)} l + a_i^{(2)} l' + a_i^{(3)} l'' + \dots) \\
\times & [b_{1i}^{(1)} l_1' + b_{2i}^{(1)} l_2' + \dots + b_{\nu i}^{(1)} l_\nu' \\
& + b_{1i}^{(2)} l_1'' + b_{2i}^{(2)} l_2'' + \dots + b_{\nu i}^{(2)} l_\nu'' \\
& + b_{1i}^{(3)} l_1''' + b_{2i}^{(3)} l_2''' + \dots b_{\nu i}^{(3)} l_\nu''' \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots .]
\end{aligned}$$

wofür wir mit Rücksicht auf (4a) schreiben können:

---

1) Vgl. E. Wiedemann: Zur Mechanik des Leuchtens, Wied. Ann. **37**. p. 179. 1889.

$$l'\{\sum m_i A_i [b_{1i}^{(1)} l_1' + b_{2i}^{(1)} l_2' + \ldots + b_{\nu i}^{(1)} l_\nu']$$
$$+ \sum m_i A_i \left(-\frac{d_i}{V}\right) \left[b_{1i}^{(1)} l_1'' + b_{2i}^{(1)} l_2'' + \ldots + b_{\nu i}^{(1)} l_\nu''\right]$$
$$+ \sum m_i \frac{A_i}{1.2} \left(\frac{d_i}{V}\right)^2 \left[b_{1i}^{(1)} l_1''' + b_{2i}^{(1)} l_2''' + \ldots + b_{\nu i}^{(1)} l_\nu'''\right] + \ldots\}.$$

Die $d_i$ sind Mittelwerthe der $d$; sie bestimmen die Beziehungen der Ströme $l_1', l_2' \ldots$ zu den einzelnen bewegten Massen des Feldes. Die Summen sind über alle vorhandenen Massen zu erstrecken. Wir erhalten sie richtig, wenn wir jedes der Producte $m_i A_i [\,]_i$ multipliciren mit einem gewissen Mittelwerthe von $d_i$, $(d_i)^2$ etc., Mittelwerthe, welche wir durch darüber angebrachte horizontale Striche bezeichnen wollen. Die Berechnung dieser Mittelwerthe, sowie der $d_i$, $d_i^2 \ldots$ selbst, geschieht in derselben Weise wie die Berechnung der Schwerpunktscoordinaten eines Massensystems aus dessen Momenten.

Wir erhalten hier also für das electrokinetische Moment:

$$\sum m_i A_i [b_{1i}^{(1)} l_1' + b_{2i}^{(1)} l_2' + \ldots b_{\nu i}^{(1)} l_\nu']$$
$$- \frac{\overline{d_i}}{V} \cdot \frac{d}{dt} \sum m_i A_i \left[b_{1i}^{(1)} l_1' + b_{2i}^{(1)} l_2' + \ldots b_{\nu i}^{(1)} l_\nu'\right]$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\overline{(d_i)^2}}{V^2} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \sum m_i A_i \left[b_{1i}^{(1)} l_1' + b_{2i}^{(1)} l_2' + \ldots b_{\nu i}^{(1)} l_\nu'\right] + \ldots$$

Jede der Summen hat die Form des electrokinetischen Momentes in der gewöhnlichen Theorie (Boltzmann 24, p. 52).

Wir können also sagen: *Sind im Felde rasch wechselnde electrische Bewegungen vorhanden, so wird die Wirkung des Feldes in Bezug auf einen gewissen Aufstrom im Allgemeinen gegeben durch eine Reihe von der Form*

$$J + C^{(1)} J' + C^{(2)} J'' + \ldots \tag{8}$$

*wo $J$ eine Function von derselben Form wie das electrokinetische Moment in der gewöhnlichen Maxwell'schen Theorie ist.*

Dieser Nachweis, dass das Moment oder der Momentenvector $J$ auch in der erweiterten Form des Maxwell'schen Gleichungssystems seine volle Bedeutung bewahrt, schien mir deshalb nothwendig, weil ich glaube, dass gerade dieser Begriff ein sehr wesentlicher der Maxwell'schen Theorie ist. Er hat den Namen eines Potentiales erhalten (Vectorpotential), weil sich zeigt, dass seine Variation die im Felde von den

ponderomotorischen Kräften geleistete Arbeit bestimmt. (Boltzmann, Gleichung (32) p. 56); doch kann der Begriff durchaus ohne die Hypothese der unvermittelten Fernewirkung erhalten werden, wie es bei Herrn Boltzmann und hier geschehen ist; im Gegentheil ist er dann erst recht der Ausdruck für die consequente Durchführung der Anschauung, dass Ströme nur auf einander wirken können durch Mitbetheiligung aller zwischen liegenden Massen $m_i$ des Mediums an den Bewegungen, die wir — sei es, dass wir sie in ihrer Gesammtheit, sei es nur in einzelnen Theilen in's Auge fassen — „Electricität" nennen. Faraday's Begriff des electrotonischen Zustandes einer im Felde liegenden Leiterbahn konnte wohl nicht sinngemässer von Maxwell in Formeln eingekleidet werden, als es von ihm bei Einführung dieser Function geschehen ist. —

8. Nach diesen Betrachtungen über polycyklische Bewegungen mit hin- und hergehenden Theilen im Allgemeinen wollen wir uns dem speciellen Falle zuwenden, der bei den Erscheinungen der Dispersion und Absorption vom Standpunkte der electromagnetischen Lichttheorie aus betrachtet in Frage kommt.

Wir denken uns den freien Aether mit den einzelnen Molecülen erfüllt, und fassen die dem Aether und den Molecülen eigenthümlichen Bewegungen gesondert in's Auge; die Gesammtwirkung in dem absorbierenden und dispergierenden Medium erhalten wir dann durch Uebereinanderlagerung der electrischen Vorgänge, wie sie im Aether vor sich gehen würden ohne Vorhandensein der Molecüle und der electrischen Bewegungen, wie sie sich in, bezw. auf den Molecülen abspielen, wobei natürlich zwischen beiden Erscheinungen und der Gesammtbewegung gewisse Beziehungen bestehen. Hierbei haben wir den Molecülen im Allgemeinen (vgl. weiter unten) sowohl die Eigenschaft einer gewissen electrischen Leitfähigkeit wie der dielectrischen Polarisierbarkeit zuzuschreiben, während wir dem Aether mit Maxwell nur die letztere Eigenschaft zuerkennen.

Diese Zerlegung und gesonderte Betrachtung der electrischen Vorgänge in den Molecülen und dem umgebenden Aether steht mit den Untersuchungen des Herrn Hertz im Einklange, nach dem die Erscheinungen der Absorption und Dispersion zu denjenigen Problemen gehören, bei welchen zur Erklärung nicht mehr zwei Vectoren an jeder Stelle des

Raumes ausreichen, sondern mehr von einander unabhängige electrische und magnetische[1]) Vectoren nöthig sind, da es Erscheinungen sind, bei denen die specielle Natur der Molecüle eine hervorragende Rolle spielt. An einer andern Stelle[2]) bezeichnet Hr. H. Hertz als richtige eine Theorie des Feldes, „welche in jedem Punkte die Zustände des Aethers von denen der eingebetteten Materie unterscheidet“.

Dabei brauchen wir, wenn wir die hier vorgeschlagene Erweiterung der Maxwell'schen Theorie zu Grunde legen, keine Annahmen über die electrischen Bewegungen in den Molecülen im Speciellen weiter einzuführen. Versuche, sich von den in den Molecülen möglichen electrischen Schwingungen Rechenschaft zu geben, liegen in ausgedehntem Maasse in den scharfsinnigen Untersuchungen von Herrn F. Koláček[3]) vor. Herr Koláček wendet u. A. die Thomson-Kirchhoff'sche Formel $T = 2\pi\sqrt{LC}$ auf die Molecüle an, und findet, indem er sie als leitende Kugeln betrachtet, „dass die Dimensionen der Molecüle etwa so gross sind, wie ein Sechstel derjenigen Lichtwelle, die den Eigenschwingungen der Molecüle entspricht“ (a. a. O. p. 225). Die Eigenschwingungen der Molecüle liegen indessen fast ausschliesslich tief im Infrarot; die sichtbaren Strahlen entsprechen im Allgemeinen sehr hohen Oberschwingungen. So berechnet Herr G. Johnstone Stoney aus den Linien $h$, $F$ und $C$ des Wasserstoffes die Wellenlänge der Eigenschwingung des Molecüles zu 0,13127714 mm.[4]) Hieraus würde sich der Molecüldurchmesser nach Herrn Koláček zu ca. $20 . 10^{-3}$ mm berechnen. Die kinetische Gastheorie gibt ca. $5 . 10^{-7}$ mm, also einen 4000mal kleineren Werth. Der Grund dieser geringen Uebereinstimmung liegt wohl darin, dass die benutzte Schwingungsformel auf die Molecüle nicht mehr anwendbar ist. Schon für gewöhnliche Condensatoren und Schliessungskreise gilt sie nur angenähert, schon hier ergeben sich Abweichungen, weil der Verschiedenheit der Stromvertheilung und der gegenseitigen Induction der stromdurch-

---

1) H. Hertz, Untersuchungen. **19.** p. 211 u. p. 293.

2) H. Hertz, Untersuchungen. **14.** p. 285.

3) Vgl. namentlich Fr. Koláček, Wied. Ann. **32.** p. 224. 1887.

4) G. Johnstone Stoney, Phil. Mag (4). **41.** p. 291. 1871; Fortschritte der Physik. **27.** p. 333. 1871.

flossenen Leitertheile nicht Rechnung getragen ist, wie die Untersuchungen der Herren Cohn und Heerwagen gezeigt haben.[1]) Für den durchaus abweichenden Bau eines molecularen Stromsytems verliert sie jedenfalls völlig ihre Anwendbarkeit.

Im Jahre 1891 habe ich zu zeigen versucht, dass man eine Reihe optischer Erscheinungen qualitativ wie quantitativ erklären kann, wenn man die Hertz'schen Formeln für eine geradlinige electrische Schwingung auf die electrischen Ladungen, die wir den Molecülen nach den electrolytischen Erscheinungen zuerkennen müssen, auf die Valenzladungen, anwendet.[2]) Es zeigte sich namentlich, dass wir uns dabei durchaus in den Grössenordnungen bewegen, die nach den absoluten Messungen von Hrn. E. Wiedemann[3]) für die molecularen Strahlungen maassgebend sind.[4]) Mit dieser Auffassung lässt sich auch die Vorstellung von mehr, das Feld an jeder Stelle bestimmenden Vectoren leicht in Einklang bringen, wobei zugleich die getrennte Behandlung der Vorgänge im Molecül und im Aether bewahrt bleibt. Man hat den electrischen und magnetischen Vector des freien, das Molecül umgebenden Aethers, den electrischen Vector, der die Richtung und Grösse der electrischen Eigenschwingung des Molecüles in jedem Augenblick bestimmt und endlich einen magnetischen Molecülvector, den man, wenn man ihn nicht als dem Molecül inhaerent betrachten will, eventuell davon herrührend ansehen kann, dass das Molecül mit seinen in jedem Augenblick mehr oder weniger verschobenen Valenzen um eine Axe rotirt und dass hierbei analog wie bei dem Rowland'schen Versuche durch die Beziehung des bei der Rotation zum Theil mitgeführten Aethers zu dem in grösserer Entfernung befindlichen, nicht mehr mitbewegten Aether eine magnetische Wirkung des Molecüles entsteht.[1])

Die hier angedeuteten Vorstellungen im Einzelnen an der Erfahrung zu erproben, dürften Untersuchungen über die

1) E. Cohn u. Heerwagen, Wied. Ann. **43.** p. 343. 1891.

2) H. Ebert, Arch. Scienc. phys. et nat. Genève (3). **25.** p. 489. 1891.

3) E. Wiedemann, Zur Mechanik des Leuchtens, Wied. Ann. **37.** p. 177. 1889.

4) Zu gleicher Zeit, wie ich selbst, hat Hr. Fr. Richarz ähnliche Ideen ausgesprochen; auch er sieht die Lichtschwingungen als bedingt durch Oscillationen der „Valenzladungen“ an; vgl. Richarz, Sitz.-Ber. der niederrhein. Ges. in Bonn, Sitz. vom 12. Januar 1891. p. 18.

Linienvertheilungen in den Spectren und das Verhalten einzelner Spectrallinien und Liniengruppen bei verschiedenen Bedingungen des Leuchtens ermöglichen, worauf ich bei anderer Gelegenheit zurückzukommen gedenke.

Wie schon erwähnt, bedürfen wir für den vorliegenden Zweck keiner besonderen Hypothesen. Denn die Spectralerscheinungen sowie directe Versuche über das Leuchten der Gase unter dem Einflusse regelmässiger electrischer Schwingungen, mit denen Hr. E. Wiedemann und ich seit länger als einem Jahre beschäftigt sind, lassen so viel über die molecularen electrischen Vorgänge erkennen, als wir für die vorliegenden theoretischen Betrachtungen nöthig haben.[2]) Bei allen diesen Versuchen hat sich uns mehr und mehr die Ueberzeugung aufgedrängt, dass, wenn wir auch den Molecülen in Uebereinstimmung mit allen hierher gehörenden Erklärungsversuchen eine gewisse Leitfähigkeit und dielectrische Polarisirbarkeit und damit eine gewisse electrische Erregbarkeit zuschreiben, *die Molecüle doch immer nur auf gewisse Schwingungen oder Schwingungssysteme ansprechen*; dass das Erregen electrischer Molecülschwingungen speciell zu solcher Intensität, dass die emittirte Strahlung intensiv genug ist uns als Licht zu erscheinen, viel eher einem *Resonanzphänomen* zu vergleichen ist, als der gewöhnlichen Electricitätsbewegung, die immer dort eintritt, wo Potentialunterschiede vorhanden sind. Wir müssen den Molecülen gewisse Eigenperioden von electrischen Schwingungen zuerkennen.

9. Auch bei den molecularen electrischen Bewegungen ist die Leitungsströmung durch $\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}$ und die dielectrische Verschiebung durch $\mathfrak{D} = 1/(4\pi)K\mathfrak{E}$ gegeben.

Stellen wir uns auf den Boden der jetzt herrschenden atomistischen Anschauungen, so können wir uns etwa vorstellen, dass ein einzelnes Atom zwar nur einer dielectrischen Polarisation fähig ist, in ihm also nur Verschiebungsströme vorkommen, dass aber bei dem Molecül, das wir uns im Allgemeinen aus sehr vielen Atomen aufgebaut zu denken haben,

---

1) Vgl. H. v. Helmholtz, Wied. Ann. **47.** p. 19. 1892.

2) E. Wiedemann u. H. Ebert, Ueber electrische Entladungen, vorläufige Mittheilung, Sitz.-Ber. der physik.-med. Soc. zu Erlangen. **24.** p. 84. 1892; und: Ueber electrische Entladungen, 2. Abhandl., ebenda. p. 241. 1892.

daneben auch ein wirklicher Transport dessen, was wir Electricität nennen, stattfindet, dass wir hier also eine Art Leitungsströme haben. Die Spectralanalyse zeigt nun, dass die einzelnen Atome sowohl, wie die Molecüle nur Schwingungsbewegungen von bestimmten, durch ihren Bau bedingten Perioden ausführen; dabei geben die einzelnen Atome Linien, die Molecüle Bandenspectra. Da eine Absorption und damit eine Energieaufnahme nur für Schwingungen bestimmter Dauer eintritt, und da wir die Absorption gerade wie die zugehörige Emission auf electrische Vorgänge im Molecül zurückführen, die selbst wieder durch die Constanten $C$ und $K$ bestimmt sind, so müssen diese Functionen der Schwingungsdauer sein. Nur für gewisse Perioden haben $C$ und $K$ endliche, von Null verschiedene Werthe, nur für diese „spricht das Molecül an.“

Der Zustand des Feldes und seine Wirkung auf das Molecül ist durch das electromagnetische Moment $J$ bestimmt. Bezeichnen wir die zu derselben Periode gehörenden Grössen durch denselben Index $k$, so haben wir bei raschen periodischen Aenderungen nach 8) p. 16 zu setzen:

$$(9) \qquad \mathfrak{K}_k = -C_k^{(1)} J_k' - C_k^{(2)} J_k'' - C_k^{(3)} J_k''' - \dots$$

$$(10) \qquad \mathfrak{D}_k = -\frac{1}{4\pi} K_k^{(1)} J_k' - \frac{1}{4\pi} K_k^{(2)} J_k'' - \frac{1}{4\pi} K_k^{(3)} J''' - \dots$$

und für die Gesammterregung des Molecüles ist

$$(11) \qquad \mathfrak{C}_k = \mathfrak{K}_k + \mathfrak{D}_k'$$

Hierzu kommt noch die electrische Bewegung im Aether, die wir durch den Index 0 bezeichnen wollen. Entsprechend der Eigenschaft des Aethers, dass er sich wie ein reines Dielectricum verhält, haben wir zu setzen:

$$(12) \qquad \mathfrak{C}_0 = \mathfrak{D}_0' = -\frac{1}{4\pi} K_0^{(1)} J_0'' - \frac{1}{4\pi} K_0^{(2)} J_0''' - \frac{1}{4\pi} K_0^{(3)} J'''' - \dots$$

Für das ganze aus Aether mit eingelagerten Molecülen bestehende Medium haben wir also:

$$(\mathrm{I}) \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{D}_0' + \sum k\,(\mathfrak{K}_k + \mathfrak{D}_k').$$

Dies ist die Gleichung der gesammten electrischen Bewegung in der erweiterten Theorie. Sie unterscheidet sich von der entsprechenden Gleichung (p. 6) $\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \mathfrak{D}'$ [610 ($H$)] der gewöhnlichen Maxwell'schen Theorie dadurch, dass a) die Vorgänge im Aether und in den Molecülen gesondert zum

Ausdruck gebracht sind, dass b) der speciellen Natur der Molecüle Rechnung getragen wird und dass c) die succesiv höheren Ableitungen des electrokinetischen Momentes eintreten, entsprechend dem Umstande, dass die Feldänderungen sehr rasch vor sich gehen. Denn denkt man sich in I für die $\mathfrak{K}_k$, die $\mathfrak{D}_k$ und $\mathfrak{D}_0'$ ihre Werthe aus 9), 10) und 12) eingesetzt, so wird $\mathfrak{C}$ offenbar dargestellt durch eine Reihe, die nach den höheren Ableitungen der verschiedenen $J_k$ fortschreitet. Führen wir dagegen in der Maxwell'schen Gleichung $\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \mathfrak{D}'$ mittelst der Gleichungen p. 6 die entsprechende Substitution aus, so erhalten wir

(Ia) $$\mathfrak{C} = - R^{(1)} J' - R^{(2)} J''$$

wo die Constanten $R^{(1)}$ und $R^{(2)}$ das Feld definiren; sie entsprechen in der gewöhnlichen Theorie der Leitfähigkeit und der Dielectricitätsconstante des Mediums.

Wir können die Beziehungen der erweiterten Theorie zur gewöhnlichen noch in anderer Weise zum Ausdruck bringen, dadurch nämlich, dass wir die Gleichungen (I) und (I, a), die ja dieselbe Grösse $\mathfrak{C}$ im Sinne der beiden Theorien darstellen, einander gleichsetzen. Zerlegen wir dann die Coefficienten $R^{(1)}$ und $R^{(2)}$ in die Summen:

$$R^{(1)} = R_0^{(1)} + \sum k \, R_k^{(1)} \qquad R^{(2)} = R_0^{(2)} + \sum k \, R_k^{(2)},$$

so wird die Gleichung

$$\mathfrak{D}_0' + \sum k \, (\mathfrak{K}_k + \mathfrak{D}_k') = - R^{(1)} J' - R^{(2)} J''$$

erfüllt, wenn die Ausdrücke

(II) $$\mathfrak{K}_k + \mathfrak{D}_k' = - R_k^{(1)} J' - R_k^{(2)} J'', \ldots$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$ einzeln einander gleich sind, Gleichungen, die man mit Rücksicht auf die Reihen in (9) (10) und (12) auch schreiben kann:

(II a) $$\nu_k^{(1)} J_k' + \nu_k^{(2)} J_k'' + \nu_k^{(3)} J_k''' + \ldots = R_k^{(1)} J' + R_k^{(2)} J_k''$$

wo $\nu$ und $R$ Grössen sind, die für jede der einzelnen Schwingungszahlen $k$ im Allgemeinen andere Werthe haben.

Die Gleichungen (I) und (II) lassen sich leicht auch auf den Fall eines *anisotropen*, dispergierenden und absorbierenden Mediums ausdehnen. Dann sind die Componenten der dielectrischen Verschiebung

$$f = \frac{1}{4\pi} K_1 P \qquad g = \frac{1}{4\pi} K_2 Q \qquad h = \frac{1}{4\pi} K_3 R \, [796\,(1)];$$

die Betrachtungen sind für jede Componente einzeln anzustellen und die in dieselbe eingehenden Constanten $K$ und $C$ haben für die verschiedenen Richtungen verschiedene Werthe. Ein Aufstellen der einzelnen Gleichungen erscheint mir überflüssig, die Erweiterungen geschehen genau nach den hier entwickelten Grundsätzen.

10. Die Gleichungssysteme (I) und (II) führen ohne weitere Hypothese zu den Formeln der Herren H. von Helmholtz und E. Lommel für die Dispersion und Absorption. Die Rechnung gestaltet sich im Wesentlichen analog wie bei Herrn Goldhammer. In der That sind in unseren Gleichungen (I) und (IIa) die von Herrn Goldhammer hypothetisch aufgestellten Gleichungssyteme (9) und (10) (p. 96 und 97 a. a. O.) enthalten.

Man erkennt dies, wenn man die Bedeutung der in Frage kommenden Vectorengrössen berücksichtigt (vgl. p. 6 und 7); dann zerfällt die Gleichung (I) in folgende drei, wo statt des $k$ der Buchstabe $n$ als Reihenindex benutzt ist, und, da es sich nur um harmonische Bewegungen handelt, jedes des $J$ die Zeit also nur in dem Factor $e^{-iqt}$, $q = 2\pi / T$ ($T$ Schwingungsdauer) enthält, die vorkommenden Reihen analog wie oben S. 12 in der Form geschrieben sind: periodische Function $J$ multiplicirt mit einem Coefficienten von der Form

$$\delta = \delta_0 - \frac{\delta_1}{T^2} + \frac{\delta_2}{T^4} \mp \dots$$

für $C$ ist ausserdem $1/\varkappa$, für $K$ ist $\delta$ gesetzt worden:

$$u = \frac{1}{4\pi}\delta_0 \frac{\partial P_0}{\partial t} + \sum^n \left( \frac{\delta_n}{4\pi} \frac{\partial P_n}{\partial t} + \frac{P_n}{\varkappa_n} \right)$$

$$v = \frac{1}{4\pi}\delta_0 \frac{\partial Q_0}{\partial t} + \sum^n \left( \frac{\delta_n}{4\pi} \frac{\partial Q_n}{\partial t} + \frac{Q_n}{\varkappa_n} \right)$$

$$w = \frac{1}{4\pi}\delta_0 \frac{\partial R_0}{\partial t} + \sum^n \left( \frac{\delta_n}{4\pi} \frac{\partial R_n}{\partial t} + \frac{R_n}{\varkappa_n} \right)$$

Führt man noch für die gesammte electromotorische Kraft die Grössen $P = P_0 + \sum P_n$, etc. ein, so schreiben sich die Gleichungen:

$$u = \frac{1}{4\pi}\left\{ \frac{\partial P}{\partial t} + \sum (\delta_n - 1) \frac{\partial P_n}{\partial t} \right\} + \sum \frac{P_n}{\varkappa_n}$$

und ebenso für die anderen Componenten, wie bei Hrn.

Goldhammer Gleichung (9) (die Dielectricitätsconstante $\delta_0$ für den freien Aether wurde dabei $= 1$ gesetzt). Durch dieselbe Auflösung der Vectorengleichung für die entsprechenden Componenten (IIa) geht diese Gleichung in das System (10) des Hrn. Goldhammer:

$$P_n + b_n \frac{\partial P_n}{\partial t} + c_n \frac{\partial^2 P_n}{\partial t^2} = \alpha_n P + \beta_n \frac{\partial P}{\partial t}$$

und ebenso für $Q_n$ und $R_n$ über, wenn man sich bei der Reihenentwickelung links auf die ersten drei Glieder beschränkt. Die Grössen $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$ sind Constanten in Bezug auf die Zeit. Es könnte scheinen, als ob sie dies bei der hier durchgeführten Ableitung nicht alle wären, denn sie sind aus den $\nu$ und $R$ in Gleichung (IIa) p. 22, die ersteren aus den $C$ und $K$ der Gleichungen (9) und (10) p. 21 hervorgegangen, welche Grössen dieselbe Rolle wie die $C$ in der Entwickelung 8 p. 16 spielen. Diese $C$ enthalten die Mittelwerthe, welche erhalten wurden bei der Summirung über alle im Felde bewegten Theilchen; sie sind von der Zeit unabhängig, soweit sich dieses überhaupt nicht mit der Zeit ändert. Wenn daher auch die $d_i$, $d_i^2$ etc. p. 16 für die einzelnen Massen Functionen der Zeit sind (denn sie enthalten die $l_h''$, $l_h'''$ etc.), so sind doch die Mittelwerthe dieser Grössen im ganzen Medium als Constante in Bezug auf die Zeit anzusehen, wenn die electrischen Schwingungen das Medium selbst nicht verändern, indem sie etwa zu Dissociationserscheinungen Veranlassung geben; solche Fälle wollen wir ausschliessen.

Aus diesen Gleichungen leitet Herr Goldhammer die genannten Dispersionsformeln ab. Da die von mir eingeschlagene Weiterführung der Rechnung von den Formeln (I) und (II) aus, die mich zu den Dispersionsformeln geführt hat, sich nur in unwesentlichen Punkten von der Goldhammer'schen unterscheidet, verzichte ich auf ihre Wiedergabe. Es kam mir hier wesentlich darauf an, zu zeigen, dass jene Gleichungen nothwendig aus den Grundvorstellungen der Maxwell'schen Theorie folgen, wenn man an diesen diejenigen Erweiterungen anbringt, die eintreten müssen, wenn man von den gewöhnlichen electrischen Bewegungen zu denjenigen übergeht, in denen nach dieser Theorie die Lichterscheinungen ihre Ursache haben.

## II. *Eine neue Art magnetischer und electrischer Messinstrumente; von G. Quincke.*

---

### a. Magnetometer, Tangentenbussole und Multiplicator.

(Vorgezeigt der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte in Halle am 22. September 1891.)

Als Magnetometer, Tangentenbussole oder Multiplicator benutze ich ein Messinstrument, welches im Wesentlichen aus Glas, Hartgummi und Holz besteht, keine Schrauben ent-

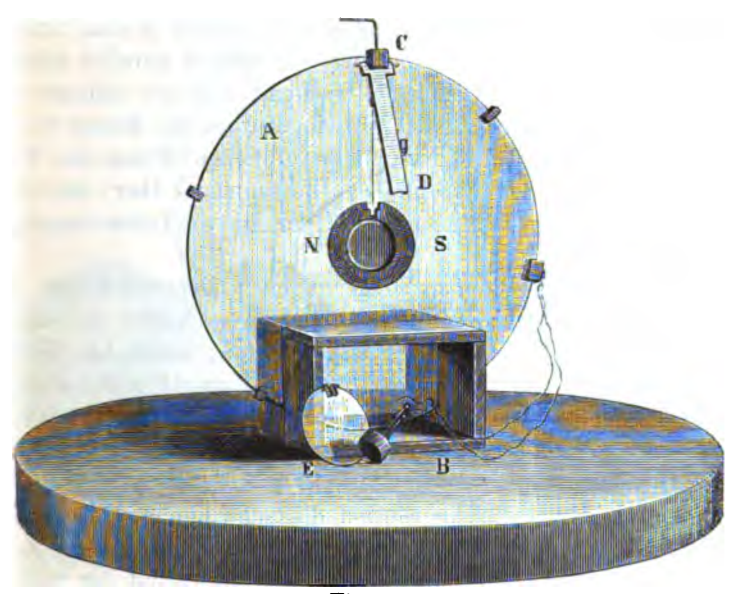



Fig. 1.

hält und bei gleicher Genauigkeit etwa den zehnten Theil der sonst gebräuchlichen Instrumente kostet. Dasselbe ist in Fig. 1 dargestellt.

Eine runde Glasplatte $A$ von 25 cm Durchmesser und 4 mm Dicke dreht sich in dem 4 mm breiten vertikalen Schlitz eines Holzrahmens $B$ von 12 cm Länge, 12 cm Breite und 8 cm Höhe. An ihrer höchsten Stelle trägt ein Reiter $C$ aus Hartgummi und Kork einen rechtwinkelig gebogenen Messing-

drath mit einem Coconfaden und einem versilberten Hohlspiegel von 3,5 cm Durchmesser, auf dessen Rückseite ein Stahlring von 2 cm Durchmesser aufgekittet ist. Der Hohlspiegel schwebt in einer flachen, durch Plangläser geschlossenen, Kammer aus Hartgummi, in Mitten der runden Glasplatte, und wirft das Bild eines dünnen, von einer Petroleumflamme beleuchteten, Drahtes auf eine horizontale Millimeterscala. Die Lage des Bildes läst sich in einem hell erleuchteten Zimmer auf der 1 bis 2 m entfernten Scala bis auf 0,1 mm genau messen, wie bei der gewöhnlichen subjectiven Spiegelablesung.

Der Messingdraht mit Coconfaden und Spiegel wird gehoben oder gesenkt, der Holzrahmen durch einen untergeschobenen Holzkeil geneigt und die Glasplatte in dem Schlitz des Holzrahmens gedreht, bis der Coconfaden parallel seinem Spiegelbilde in der Glasplatte erscheint und der Spiegel frei schwebt. Durch Drehen des Messingdrathes im Reiter *C* um einen vollen Kreis lässt sich in der üblichen Weise das Torsionsverhältniss des Coconfadens bestimmen, über den eine Hartgummirinne *CD* geklappt wird, um ihn vor Luftströmungen zu schützen.

Das vordere Planglas *E* der flachen Kammer hängt mit einer Nase aus Hartgummi in einem Ausschnitte des Hartgummiringes, kann leicht entfernt werden, und lehnt in der Zeichnung an dem Holzrahmen *B*. Die eingeklappte Fadenrinne sichert gleichzeitig die Lage des eingehängten Planglases *E*. Der Coconfaden läuft durch eine Rinne der Hartgummi-Nase.

Durch Luftdämpfung werden die Schwingungen des Hohlspiegels in 15 Sekunden beruhigt; oder in noch kürzerer Zeit, wenn man hinter dem Magneten an der Hinterwand der flachen Kammer einen Kupferpenny mit Wachs befestigt.

Die Tangentenbussole besteht aus einem seidebesponnenen Kupferdrahte von 0,27 mm Durchmesser, der in 1 oder 2 Windungen auf der Peripherie der runden Glasplatte *A* mit 6 oder mehr Hartgummiklammern befestigt ist. Die Enden des Kupferdrahtes werden zusammengedreht, so dass sie in 20 oder 30 cm Abstand vom Drahtkreise mit angelötheten Stecknadeln in Quecksilbernäpfchen aus Kork eingesteckt werden können.

Auf den Holzrahmen zu beiden Seiten der runden Glasplatte werden Drahtrollen aufgesetzt, wie bei einem gewöhnlichen Wiedemann'schen Multiplicator.

Der Draht der Tangentenbussole hat 0,5 Ohm Widerstand; 1 Sc. Ablenkung entspricht bei einer Drahtwindung und 1 m Spiegelabstand einer Stromstärke von 0,002 Amp. Eine Multiplicatorrolle von 135 Windungen hat 1 Ohm Widerstand und 1 Sc. entspricht 0,000005 Amp. (Rolle *F* in Fig. 2.)

Für starke Ströme stellt man einen Ring aus dickem

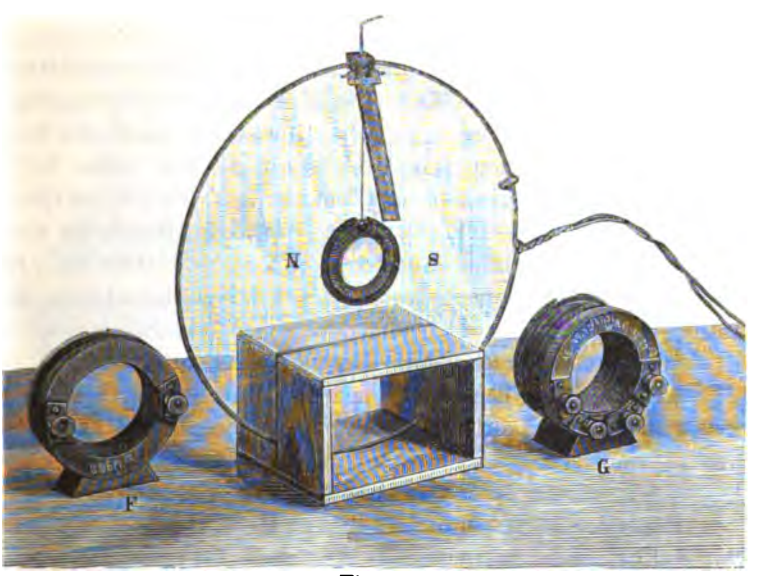



Fig. 2.

Kupferdrahte auf der Peripherie einer zweiten Glasplatte in passender Entfernung von dem Magnetometer auf, ähnlich wie bei einer Tangentenbussole von Helmholtz oder Gaugain.

Für einen Ring vom Radius $R$ in der Entfernung $E$ von der Magnetnadel ist die Stromstärke bei gleicher Ablenkung im Verhältniss $(1 + E^2 / R^2)^{3/2}$ grösser, als mit der Magnetnadel in der Ringebene. Ein Drahtring von 25 cm Durchmesser muss in 17,34 cm oder 23,85 cm Entfernung gestellt werden, um ein Instrument von fünf- oder zehnmal geringerer Empfindlichkeit zu erhalten; Fig. 2 zeigt eine Tangentenbussole mit dickem Kupferdrahte, welche nach Entfernung der Magnet-

nadel mit dem Apparate Fig. 1 combinirt eine Gaugain'sche Tangentenbussole von zehnmal kleinerer Empfindlichkeit gibt.

Als Hohlspiegel von 1 oder 2 m Radius werden biconvexe Brillengläser von 2 oder 4 m Brennweite (also von 0,5 oder 0,25 Dioptrien) verwandt, deren eine Seite versilbert und lackirt ist.

Für schwache Ströme stellt man neben die Magnetnadel Drahtrollen von 10 000 Windungen oder wenn der Apparat als Differential-Multiplicator benutzt werden soll, Rollen von Doppeldraht mit 500 oder 1000 Windungen und 20 bis 50 Ohm Widerstand. (Rolle *G* Fig. 2).

Die Drahtenden der Tangentenbussole tragen angelöthete Stecknadeln von 4 cm Länge, welche in Quecksilbernäpfchen aus Kork eingesetzt werden. Die Korkstücke sind mit Colophoniumkitt auf einer Glasplatte befestigt, und diese ist in einen niedrigen Pappkasten eingelegt, um das verschüttete Queck silber aufzunehmen. Eine kleine vertikale Glasplatte theilt ein solches Quecksilbernäpfchen in 2 isolirte Hälften. Bei Umsetzen der Stecknadeln, die durch einen schwarzen und rothen Knopf zu unterscheiden sind, wird die Stromrichtung in der Tangentenbussole die entgegengesetzte.

An die freien Enden der mit den Multiplicatorrollen verknüpften dünnen Leitungsdrähte und an die übrigen Leitungsdrähte sind ebenfalls Stecknadeln angelöthet, um die Verbindungen schnell herstellen und lösen zu können.

Für schnelle Stromwechsel dienen Pohl'sche Stromwender mit 6 Korknäpfchen von 3 cm Abstand. Daneben sind noch andere Korknäpfchen in 3 cm Abstand festgekittet, um Widerstände von 1 bis 100 Ohm aus Nickel-Mangan-Kupferdraht oder von 1000 bis 20000 Ohm aus Graphit-bestrichenem Papier einlegen zu können. Das letztere wird in aufgeschnittene Bleikugeln von 8 mm Durchmesser geklemmt. Durch die Bleikugeln sind Stecknadeln gesteckt und festgelöthet. 2 angekittete Glasstreifen halten die Stecknadeln in 3 cm Abstand und schützen die Graphitschichten vor äusseren Einflüssen.

Zur Beleuchtung dienen Petroleumlampen mit Flachbrenner, über welche ein viereckiger Kasten aus dünnem geschwärzten Metallblech gestülpt ist. Der Kasten ist 26 cm hoch, 12 cm breit, 10 cm lang; oben und unten offen; trägt

an der Hinterseite eine Oeffnung, durch welche der Docht regulirt wird; an der Vorderseite in Flammenhöhe einen Schlitz von 8 mm Breite und 40 mm Höhe, vor welchem ein verticaler Draht von 0,2 mm Durchmesser festgelöthet ist. Auf der Vorderseite des Kastens sind über dem Schlitze 2 kurze rechtwinkelig gebogene Messingdrähte aufgelöthet. In den von diesen Messingdrähten gebildeten offenen Haken lässt sich ein horizontales Holzlineal mit der in 500 mm getheilten Papierscala leicht verschieben. Die Lampe wird so vor dem Hohlspiegel aufgestellt, dass ein scharfes Bild des dünnen vertikalen Metalldrahtes auf der Papierscala erscheint. Fig. 3 zeigt die

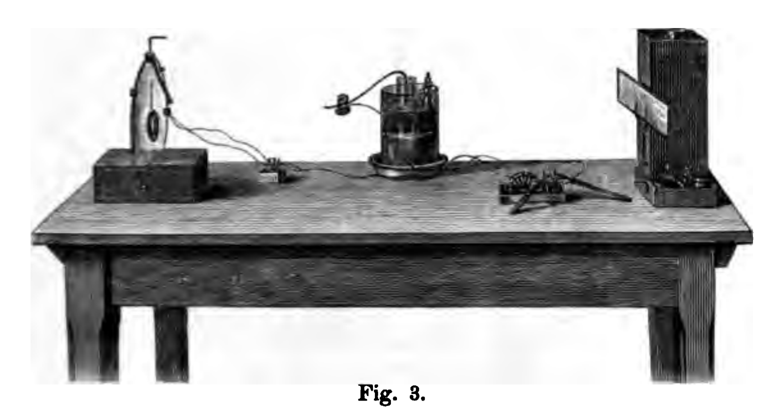


Fig. 3.

Aufstellung der Tangentenbussole mit Stromwendern, Kette und 2 Ohm Widerstand im Stromkreis.

Die Apparate[1]) haben sich beim Gebrauch während mehrerer Jahre bewährt, sind leichter und schneller als die bisher gebräuchlichen aufzustellen, und lassen sich auch mit subjectiver Spiegelablesung benutzen.

b. Grosse Tangentenbussole mit Kreistheilung und Spiegelablesung.

In neuerer Zeit habe ich mit ähnlichen Mitteln aus Glas, Holz und Hartgummi grosse Tangentenbussolen construirt mit Oeldämpfung und einer Magnetnadel, deren Ablenkung nach

---

1) Zu beziehen durch Herrn Mechaniker Ad. Veith, Heidelberg, Hauptstrasse 15.

Belieben an einer Kreistheilung oder mit subjectiver oder objectiver Spiegelablesung gemessen werden kann.

Eine runde verticale Glasplatte *A* (Fig. 4), von 40 cm Durchmesser, 4 mm Dicke und mit einem centralen Loch von 11 cm Durchmesser, dreht sich in dem 4 mm breiten und 55 mm tiefen Schlitz eines Holzrahmens *B* von 20 cm Breite, 10 cm Höhe und 12 cm Länge. Ein rechtwinkelig gebogener

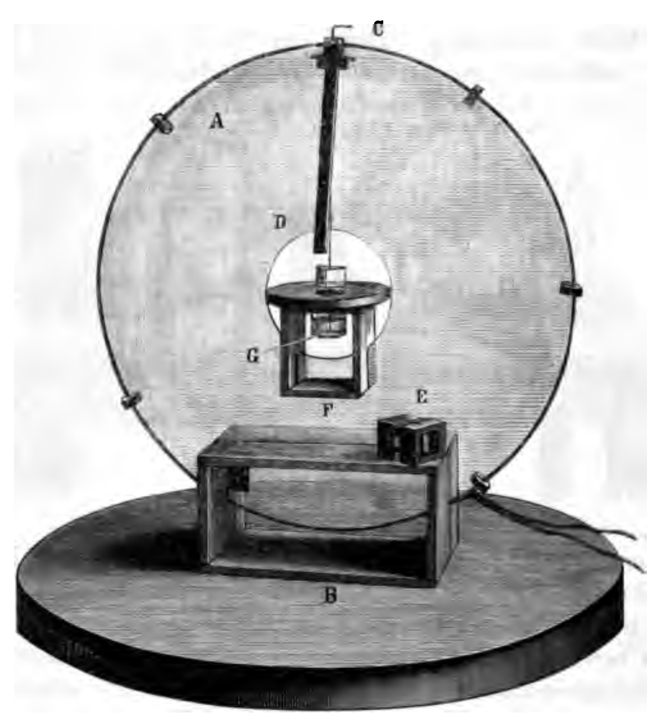



Fig. 4.

Messingdraht mit Coconfaden, Magnetnadel und Spiegel kann in einem Kork des Hartgummi-Reiters *C* gehoben, gesenkt oder gedreht werden, wie bei dem oben beschriebenen Instrumente Fig. 1. Die gegen die Glasplatte *A* geklappte Fadenrinne *CD* aus Hartgummi und das zweitheilige Kästchen *E* aus geschwärztem Carton mit 2 Glasfenstern von 20 mm Höhe und 26 mm Breite, schützen die Magnetnadel nebst Zubehör vor Luftströmmungen. Die Fenster stehen parallel der Glas-

fläche *A*. Der untere Theil der Fadenrinne in der centralen Oeffnung bei *D* ist 4 mm dicker, als der obere Theil, und wird durch ein Planglas geschlossen, das auf die Hinterfläche der Glasplatte *A* aufgekittet ist.

Ein mit Seide besponnener Kupferdraht (von 0,27 oder 1,5 mm Durchmesser) wird mit 6 Hartgummiklammern auf der Peripherie der Glasplatte festgehalten und bildet den Drahtkreis der Tangentenbussole. In der centralen Oeffnung der Glasplatte *A* ist ein kleiner Holzrahmen *F* von 6,5 cm Breite und Länge und von 7,5 cm Höhe mit einem 4 mm breiten und 35 mm tiefen Schlitz aufgesetzt, so dass die obere quadratische Fläche des Holzrahmens ein horizontales Tischchen bildet,

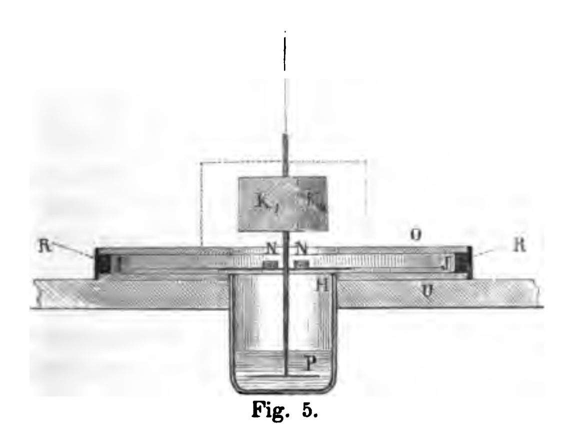



Fig. 5.

dessen Mitte in der Verlängerung des Coconfadens liegt. Die Holzrahmen *B* und *F* sind aus tannenen Brettchen von 7,5 mm Dicke mit Holznägeln zusammengefügt.

In einer centralen Oeffnung des Tischchens ist mit Hartgummi ein kleiner Glasbecher *G* (Fig. 4 und 5) von 3 cm Durchmesser und 3,5 cm Höhe eingepasst, dessen gerader cylindrischer Rand 2 mm über die Tischfläche hervorragt und in das centrale Loch der runden Spiegelglasplatte *U* eingreift, welche die Kreistheilung von 10 cm Durchmesser trägt. Auf dem Rande der Spiegelglasplatte *U* ruht ein oben und unten ausgedrehter Messingring *R* von 7,5 mm Höhe; auf diesem eine in zwei gleiche Hälften geschnittene Spiegelglasplatte *O* mit centraler Oeffnung von 3 cm. Diese Spiegelglasplatte bildet

die obere, die Kreistheilung die untere Basis der flachen Büchse, in welcher die Magnetnadel $N$ schwebt, im Mittelpunkte des Drahtkreises und der Glasplatte $A$.

Der verticale weiche Kupferdraht am unteren Ende des Coconfadens trägt aufgelöthet ein horizontales Kreuz $H$ und eine runde Scheibe $P$ von 2 cm Durchmesser aus dünnem Kupferblech. Auf dem Kreuz sind 2 kleine Stahlmagnete $NN$ (von $12 \times 4 \times 2$ mm) und 2 Glasfäden $J$ senkrecht zur magnetischen Axe der Stahlmagnete aufgekittet. Das Kreuz ruht auf der Kreistheilung, wenn der Coconfaden gesenkt wird, so dass der Apparat ohne Gefährdung des Coconfadens und der Glasfäden transportirt werden kann. Die geschwärzten Enden der Glasfäden schweben über der Kreistheilung und bestimmen die Ablenkung der Magnetnadel bis auf $0{,}1^0$ genau. Die Kupferscheibe $P$ schwebt in Paraffinoel oder Olivenoel, mit welchem der Glasbecher 1 cm hoch gefüllt ist.

Die halbe Schwingungsdauer der Magnetnadel mit Spiegel und Gehänge beträgt 4 Sekunden. Die Nadel kommt nach 4 halben Schwingungen zur Ruhe. Durch Verkleinern der Kupferscheibe oder durch Zusatz von Petroleum zum Olivenoel kann man die Dämpfung verringern.

Als Spiegel dienen die 3 Seitenflächen eines rechtwinkeligen Prismas. 3 Silberspiegel, die mit Colophoniumkitt an den Kanten von 2 horizontalen Hartgummiplatten befestigt und mit diesen auf den oberen Theil des Kupferdrahtes aufgeschoben sind. Die Kathetenspiegel haben 20 mm Höhe und Breite und werden genau normal gestellt, indem man sie gegen die eine Kathetenfläche und ein Planglas auf der anderen Kathetenfläche eines rechtwinkeligen Glasprismas drückt, so lange der Kitt noch weich ist.

Der Hypotenusenspiegel von 28 mm Breite wird durch Drehung des ganzen Prismas parallel der magnetischen Axe der Magnetnadel gestellt, und zur Messung kleiner Ablenkungen dieser Nadel verwandt.

Die Kathetenspiegel $K_1$ und $K_2$ dienen dazu, Ablenkungen $\pm \varphi$ der Magnetnadel, welche nur wenig von $\pm 45^0$ verschieden sind, mit Spiegelablesung bis auf Minuten genau zu messen. Die Kathetenspiegel stehen während der Ablenkung dann nahezu parallel der Glasplatte $A$ oder dem magnetischen Meridian.

Sie reflectiren denselben Scalentheil ins Fernrohr, wenn die Ablenkung genau $\pm$ 45° beträgt. Reflectiren sie bei gleicher und entgegengesetzter Stromstärke die Scalentheile $s_1$ und $s_2$ in das Fernrohr, so würde die Ablenkung

$$(1) \qquad \pm \varphi = 45 \pm \frac{s_1 - s_2}{4r} \frac{360}{2\pi}$$

sein, wenn $r$ den Abstand der Scala vom Spiegel bezeichnet. Das obere oder untere Vorzeichen der rechten Seite gilt, wenn bei abnehmender Stromstärke $s_1$ abnimmt und $s_2$ zunimmt, oder umgekehrt.

Bilden die beiden Kathetenspiegel einen Winkel, der um $v$ grösser oder kleiner ist, als ein rechter, so würde zu 45° auf der rechten Seite der Gleichung (1) noch der Winkel $-v/2$ oder $+v/2$ zu addiren sein.

Den Winkel $90 \pm v$ der Kathetenspiegel kann man entweder mit dem Goniometer messen, oder mit folgendem Verfahren.

Man drückt ein auf der Hinterseite geschwärztes Planglas (Objectträger) gegen den einen Kathetenspiegel und betrachtet in dem aus dem Planglas und dem anderen Kathetenspiegel gebildeten Winkelspiegel die Bilder einer Lichtlinie (eines vertikalen Platindrahtes von 0,2 mm Durchmesser in einer Bunsen'schen Gasflamme). Sind die beiden durch Doppelreflexion im Winkelspiegel entstehenden Bilder der Lichtlinie um die Strecke $\sigma$ von einander und um die Strecke $\varrho$ vom Spiegel entfernt, so ist die Neigung der Kathetenspiegel

$$(2) \qquad \psi = 90 \pm v \doteq 90 \pm \frac{\sigma}{4\varrho} \frac{360}{2\pi}$$

das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem beim Verkleinern des Winkels $\psi$ (durch Einschiebung eines Keiles oder eines Kartenblattes zwischen Kathetenspiegel und Objectträger) die Bilder der Lichtlinien auseinandergehen oder zusammenrücken.

Sehr bequem ist es, bei diesem Versuche 2 Lichtlinien (zwei parallele Platindrähte in den beiden Seiten einer Bunsen'schen Gasflamme) vom Abstande $\sigma$ zu benutzen, und den Abstand $\varrho$ so zu wählen, dass das rechte Bild des einen Platindrahtes mit dem linken des anderen sich deckt. Die Entfernung der

beiden Bilder einer Lichtlinie ist dann gleich dem Abstande der beiden Lichtlinien. Die Entfernung $\varrho$ der Lichtlinie vom Winkelspiegel wird mit einem Bandmasse gemessen.

Die Spiegel schweben in dem geschwärzten Cartonkästchen *E*, das auf der halbirten Spiegelplatte *O* ruht und in Fig. 4 an einer andern Stelle auf dem Holzrahmen *B* steht. Das eine Fenster des Kästchens ist durch ein Planglas, das andere durch ein biconvexes Brillenglas von 1 oder 2 m Brennweite geschlossen. — Für subjective Spiegelablesung wird das erstere, für objective Spiegelablesung das letztere benutzt, indem man die Petroleumlampe mit Gehäuse und Scala in 1 oder 2 m Entfernung von der Linse aufstellt.

Die Kathetenspiegel haben den Vortheil, dass man den Ablenkungswinkel $\varphi$ sehr genau messen kann für Stromstärken, bei welchen der Apparat die grösste Empfindlichkeit besitzt. Die Stromstärke beträgt dann bei den angegebenen Dimensionen wenig mehr als 6 Amp. Benutzt man nur 1 Spiegel so würde 1 Sc. bei 1 m Spiegelabstand einer Stromstärke von 0,0032 Amp. entsprechen.

Uebrigens habe ich auch Apparate mit Glasplatte *A* von 30 cm Durchmesser, also einer $^4/_3$ Mal grösseren Empfindlichkeit, gebaut, bei denen Holzrahmen, Kreistheilung, Magnetnadel und Zubehör dieselben Dimensionen, wie bei dem grösseren Apparate, hatten.

Herrn H. Rönne, Assistenten am hiesigen physikalischen Institut, spreche ich für seine umsichtige Hülfe bei Herstellung dieser Tangentenbussole mit Kreistheilung und Winkelspiegel meinen besten Dank aus.

Heidelberg, den 27. October 1892.

## III. *Ueber eine Nullmethode zur Messung der Dielectricitätsconstanten leitender Flüssigkeiten; von Friedrich Heerwagen.*

Einleitung.

Das hohe Interesse, welches man dem Studium der Dielectricitätsconstanten entgegenbrachte, und welches in der grossen Literatur über diese Materie zu Tage tritt, hat sich seither vornehmlich *einem* Punkte zugewandt. Es stand die wichtige Frage offen: Ist die von Maxwell[1]) aus der electromagnetischen Lichttheorie gefolgerte Beziehung $K = n_x^2$ richtig, ist in der That die Dielectricitätsconstante $K$ dem Quadrate des Brechungsquotienten für Strahlen unendlicher Wellenlänge $n_\infty$ gleich?

Lange blieb die Antwort auf diese Frage zweifelhaft. Für viele Substanzen schien Maxwell's Beziehung sich zu bewähren, für eine grössere Zahl wohl stimmte sie nicht. Doch es war kein allzugrosses Gewicht auf Uebereinstimmung und Nichtübereinstimmung zu legen, denn offenbar fehlte es noch an einwurfsfreien Methoden zur Bestimmung von $K$. Hierauf liessen die grossen Unterschiede schliessen, welche oft zwischen den Zahlen verschiedener Beobachter vorhanden waren, auch zwischen den Zahlen desselben Beobachters, die nach verschiedenen Methoden gewonnen waren.

*Eine* wichtige experimentelle Stütze fand Maxwell's Theorie in Boltzmann's[2]) Untersuchungen über die Dielectricitätsconstanten der Gase, deren Resultate später durch Klemenčič[3]) nach neuen Methoden bestätigt wurden. Die *permanenten Gase* zeigten eine schöne Uebereinstimmung mit Maxwell's Theorie. Hier aber trafen zwei Bedingungen zusammen, deren Fehlen bei anderen Körpern die unsicheren und die widersprechenden Resultate erklären konnte. Vor

1) Treatise on Electricity and Magnetism. art 788.
2) Boltzmann, Wien. Ber. 69. p. 793. 1874.
3) Klemenčič, Wien. Ber. 91. p. 712. 1885.

allem hatte man es bei den Gasen mit wirklichen Isolatoren zu thun, den einzigen *vollkommenen Isolatoren* vielleicht, die es überhaupt gibt. Ferner besitzen die Gase bei kleinem Brechungsvermögen nur sehr geringe Dispersion, und mit hoher Sicherheit durfte hier der Brechungsquotient für unendlich lange Wellen aus den optischen Daten mit Cauchy's Formel berechnet werden.

Die Erfahrung hatte gezeigt, dass beim Experimentiren mit der gleichen Substanz oft verschiedene Zahlen für $K$ gefunden wurden, wenn man die Zeit variirte, während deren Dauer die electrischen Kräfte wirkten. Je kürzer die Ladungsdauer, um so kleiner wird in der Regel $K$ gefunden. Man glaubte an eine continuirliche Abnahme von $K$ mit noch kleiner werdender Ladungsdauer bis zum theoretischen Werthe von $n_\infty^2$ hin. Es scheint die Ueberzeugung geherrscht zu haben, dass wirklich die Dielectricitätsconstanten gemessen worden seien; während doch, abgesehen von sonstigen Mängeln der Versuchsanordnungen und unerlaubten Vernachlässigungen, welche auf diesem Gebiete besonders schwer zu vermeiden sind, thatsächlich alle die errechneten Zahlen entstellt sein konnten durch die Einflüsse der Electricitätsleitung im untersuchten Dielectricum, welche mit der Wirkungsdauer der electrischen Kräfte zunehmen.

Nur Schiller[1]) hatte Zahlen für die Dielectricitätsconstanten einiger Körper geliefert, die frei von dem Einflusse der Leitung waren. Schiller arbeitete mit electrischen Schwingungen einer offenen Inductionsspirale, deren Enden zu den Belegungen eines Condensators geführt waren. Er beobachtete Schwingungsdauer ($^1/_{20000} - {^1/_{10000}}$ Sec.) und Dämpfung der electrischen Oscillationen, und konnte hieraus die Dielectricitätsconstante gesondert von der Leitung berechnen. Auch diese Methode ergab für Spiegelglas $K$ fast $= 6$, also mehr als doppelt so gross, wie $n_\infty^2$.

Eine zweite Methode zur getrennten Bestimmung von Dielectricitätsconstanten und Leitvermögen gaben Cohn und Arons.[2]) Sie bewiesen endgültig, durch Messungen des zeit-

1) Schiller, Pogg. Ann. 152. p. 535. 1874.
2) Cohn u. Arons, Wied. Ann. 28. p. 454. 1886.

lichen Ladungsverlaufes von Flüssigkeitscondensatoren, dass Leitung und dielectrische Polarisirbarkeit zwei von einander völlig unabhängige Eigenschaften der Körper sind, deren Wirkungen sich einfach superponiren. Sie zeigten in dieser und in einer folgenden Arbeit[1]), dass geringe Verunreinigungen, welche das Leitungsvermögen verzehnfachen und mehr, die *richtig definirt und gemessene* Dielectricitätsconstante kaum merklich änderten.

Durch die Arbeiten der erwähnten Autoren war die Zahl einwandfrei bestimmter Dielectricitätsconstanten, welche der Maxwell'schen Beziehung nicht im entferntesten genügten, um zwei besonders auffallende Beispiele vermehrt worden. Die von Silow[2]) zuerst experimentell ausgeführte *Methode der Kraftmessung* hatten Cohn und Arons durch Anwendung von Wechselströmen an Stelle constanter Potentiale auf solche Flüssigkeiten anwendbar gemacht, welche stets zur Classe der Electrolyte gezählt wurden. Es ergab sich für Alkohol $K = 26{,}5$, für Wasser $K = 76$. Dies unerwartete Resultat konnte einerseits von Cohn[3]) durch Messungen nach der Methode des Ladungsverlaufes bald bestätigt werden, andererseits fanden auch die späteren Beobachter[4]) dasselbe.

Wieder konnte es scheinen, als ob doch vielleicht die hohen Dielectricitätsconstanten und damit die grossen Abweichungen von Maxwell's Gesetz durch das Vorhandensein electrischen Leitungsvermögens bedingt seien.

Hertz lenkte durch seine bahnbrechenden Untersuchungen von neuem die Aufmerksamkeit auf die Faraday-Maxwell'schen Anschauungsweisen, und indem er in Gebiete eindrang, welche bisher dem Experimente unzugänglich gewesen, konnte er electromagnetische Wellen erzeugen, die sich im Luftraume

1) Cohn u. Arons, Wied. Ann. **33.** p. 13. 1888.

2) Silow, Pogg. Ann. **156.** p. 389. 1875.

3) Cohn, Wied. Ann. **38.** p. 42. 1889.

4) Tereschin, Wied. Ann. **36.** p. 792. 1889. — Rosa, Phil. Mag. **31.** p. 188. 1891. — Winkelmann, Wied. Ann. **38.** p. 161. 1889. Dass Hr. Stscheglajew (Separatabdr. aus Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. und Beibl. **15.** p. 651. 1891) nach einer mit der Winkelmann'schen identischen Methode für Alkohol und Wasser Zahlen erhält, die genau gleich dem Quadrate der Brechungsquotienten sind, kann dagegen wohl kaum in Betracht kommen.

fortpflanzten, auch Reflexion und Brechung, sowie die Erscheinungen der Polarisation zeigten, gerade so wie Lichtstrahlen. Eine neue und sichere Stütze für die Identität des Lichtäthers mit dem Medium der electrischen und magnetischen Kräfte war hierdurch geschaffen.

Man versuchte bald, das neue Hilfsmittel der sehr schnellen electrischen Schwingungen, deren Wellenlänge in Laboratoriumsräumen messbar war, in verschiedener Weise zur Messung von Dielectricitätsconstanten zu verwerthen. J. J. Thomson[1]) fand für Glas $K = 2,7$, Lecher[2]) dagegen 6,5 und 7,3, Blondlot[3]) wieder 2,8. Diese einander so widersprechenden Bestimmungen beruhen auf Capacitätsmessungen; eine unbefangene Kritik wird denselben weniger Gewicht beilegen, denn die Fehlerquellen mannigfacher Art sind zu bedeutend bei dieser Art Messungen.

Doch es konnte auf anderem Wege der scheinbare Widerspruch der experimentellen Ergebnisse mit Maxwell's Theorie gelöst werden. Arons und Rubens[4]) verglichen die Geschwindigkeit, mit welcher electrische Wellen längs Drähten sich in Luft fortpflanzen, mit der Geschwindigkeit derselben Wellen in verschiedenen Dielectricis. Und sie fanden in der That den electrischen Brechungsquotienten gleich der Wurzel aus der Dielectricitätsconstante, letztere gemessen nach Schiller's Methode am gleichen Material. Diese Gleichheit bewährte sich auch für diejenigen Körper, für welche die optischen Brechungsquotienten ganz andere waren. Die Gleichheit des electrischen Brechungsquotienten mit $\sqrt{K}$ wurde dann von Cohn[5]) auch für Wasser nachgewiesen, und ist kürzlich von Ellinger[6]) bestätigt worden durch Versuche, welche gar in völliger Analogie optischer Messungen mit einem Wasserprisma angestellt wurden.

Um die Maxwell'sche Beziehung zu prüfen, hatte man

1) J. J. Thomson, Proc. Roy. Soc. **46.** p. 292. 1889 und Beibl. **14.** p. 53. 1890.

2) Lecher, Wien. Ber. **99.** Abth. IIa. p. 480. 1890 und Wied. Ann. **42.** p. 142. 1891.

3) Blondlot, Compt. rend. **112.** p. 1058. 1891. Beibl. **15.** p. 575. 1891.

4) Arons u. Rubens, Wied. Ann. **42.** p. 581 und **44.** p. 206. 1891.

5) Cohn, Berl. Ber. **50.** p. 1037. 1891. Wied. Ann. **45.** p. 370. 1892.

6) Ellinger, Wied. Ann. **46.** p. 513. 1892.

bis dahin stets den Brechungsquotienten für $\infty$ lange Wellen aus den optischen Daten mit Hülfe der Cauchy'schen Dispersionsformel $n = A + B/\lambda^2 + \ldots$ berechnet, obschon es seit lange bekannt war, dass diese Formel keineswegs im Stande sei, die beobachteten Dispersionscurven richtig wiederzugeben. Dennoch wurde immer das nach Cauchy berechnete $n_\infty = A$ zum Vergleich mit $\sqrt{K}$ herangezogen, und meist suchte man die Abweichung von dem erwarteten Gesetz in der electrischen Grösse, statt in der optischen.[1]) Durch Untersuchung von Dispersionscurven bis zu hohen ultrarothen Wellenlängen hin hat Rubens[2]) jetzt den Nachweis erbracht, dass Cauchy's Formel bei solchen Substanzen den Gang der Brechungsquotienten richtig wiedergibt, für welche $A = \sqrt{K}$ gefunden worden ist; dass dagegen bei anderen Körpern, wie bei verschiedenen Gläsern, Wasser etc., zur Ermittelung der Grenzwerthe $n_\infty$ alle rationellen Anhaltspunkte fehlen.

Wenn somit die Frage nach der Berechtigung der Maxwell'schen Lichttheorie als zu Gunsten derselben entschieden angesehen werden kann, so muss nunmehr die genauere numerische Kenntniss der Dielectricitätsconstanten von anderem Gesichtspunkte aus Interesse gewinnen. Durch möglichste Variation der Methoden eine mehr qualitative Uebereinstimmung nachzuweisen, war bisher die Aufgabe. Jetzt ist unter Vermeidung oder Berücksichtigung aller Fehlerquellen ein einwandfreies Verfahren auszubilden, welches geeignet ist, bequem und sicher numerische Werthe der Constanten für verschiedene Stoffe zu liefern. Es ist zu erwarten, dass die stöchiometrischen Beziehungen, welche eine grosse Anzahl von Forschern[3]) aus dem Studium der Lichtbrechungsverhältnisse abzuleiten sich bemüht haben, klarer und deutlicher zu Tage treten werden, wenn man $\sqrt{K}$, resp. $K$ der Rechnung zu Grunde legt, als wenn man mit Cauchy's Constante $A$, oder mit dem Brechungsquotienten eines beliebigen Lichtstrahles operirt. Denn eben das leistet die Messung der Dielectricitätsconstanten, was bisher keine Formel vermochte: sie liefert uns den Grenzwerth für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Aetherwellen

1) Vgl. z. B. Wüllner, Lehrbuch IV. p. 1161. (1886).
2) Rubens, Wied. Ann. **45.** p. 238. 1892.
3) Vgl. Ostwald, Allgem. Chem. I. 2. Aufl. p. 402—460.

in dem betreffenden Medium, befreit von den Einflüssen der Dispersion, welche ihrerseits besonders zu untersuchen wäre.[1])

Zur weiteren Ausbildung geeignet ist nun zur Zeit am meisten die von Cohn und Arons[2]) modificirte Methode von Silow, welche Werthe der Dielectricitätsconstante liefert, die nicht durch Leitung entstellt sind, ohne dass die complicirten Apparate erforderlich wären, welche Schiller sowie Cohn und Arons in ihrer ersten Arbeit zur Zeitmessung bedurften.[3]) Diese Methode, welche nur auf Flüssigkeiten anwendbar ist, beruht auf dem von Helmholtz gegebenen Satze, dass die mechanischen Kräfte, welche zwei auf festen Potentialen und in gleicher Lage erhaltene Leiter aufeinander ausüben, der Dielectricitätsconstanten des Mediums proportional sind, in welchem die Kraftlinien zwischen diesen Leitern verlaufen.

Cohn und Arons füllten mit der Flüssigkeit ein passend gebautes Quadrantelectrometer, in welchem Flügel, Hülle und ein Quadrantenpaar zur Erde abgeleitet waren, während das zweite Quadrantenpaar geladen wurde. Zur Ladung dienten die Wechselströme eines Inductionsapparates, und die Ausschläge des Flüssigkeitselectrometers wurden mit den Ausschlägen eines demselben parallel geschalteten gewöhnlichen Electrometers verglichen. Dieselbe Vergleichung wurde ausgeführt, wenn Luft statt der Flüssigkeit sich im ersten Electrometer befand. Das Verhältniss der beiden Ausschläge des Flüssigkeitselectrometers, reducirt auf gleiche Ausschläge des Luftelectrometers, ist gleich der gesuchten Dielectricitätsconstante. Hat man es mit Flüssigkeiten von sehr hoher Dielectricitätsconstante zu thun, wie Alkohol, namentlich aber Wasser, so arbeitet man hierbei unter sehr ungünstigen Umständen, da das Verhältniss der Ausschläge beider Electrometer gar zu sehr von der Einheit abweicht.

Tereschin[4]) benutzte daher zwei einander ähnliche Electro-

---

1) Einen ausgedehnten Versuch in dieser Richtung unternehmen bereits Landolt und Jahn, Z.-S. f. phys. Chem. **10.** p. 289. 1892. Die vorliegende Arbeit war seit einiger Zeit niedergeschrieben, als jene Publikation erschien.

2) Cohn und Arons, Wied. Ann. **33.** p. 13. 1888.

3) Vgl. die Citate p. 36 u. 39.

4) Tereschin, Wied. Ann. **36.** p. 792. 1889.

meter, und verglich alle untersuchten Flüssigkeiten mit Aethylalkohol, dessen Dielectricitätsconstante mit möglichster Genauigkeit bestimmt wurde. Derselbe Autor ersetzte den Inductionsapparat durch eine Accumulatorenbatterie in Verbindung mit einem rotirenden Commutator, und erzielte dadurch grössere Constanz in den Einstellungen der Electrometer. Doch blieb die Unbequemlichkeit bestehen, zwei Apparate gleichzeitig beobachten zu müssen.

Die Form, welche Rosa[1]) bei einer Wiederholung der Versuche von Cohn und Arons seinem Electrometer gab, kann nur als ein Rückschritt bezeichnet werden. Auch die Ersetzung des Hülfselectrometers durch einen technischen Spannungsmesser für constanten Strom ist bedenklich, denn dieser musste *vor* den rotirenden Commutator geschaltet werden, und kann daher die Schwankungen und Unregelmässigkeiten, welche durch den stets etwas variablen Contact der Schleiffedern veranlasst werden, gar nicht mitmachen. Infolgedessen misst man gar nicht direct die Grösse, auf welche es ankommt, nämlich den zeitlichen Mittelwerth des Quadrates der Potentialdifferenz im Electrometer.

Das Differentialelectrometer von Pérot[2]) hat bisher nur zur Untersuchung gut isolirender Flüssigkeiten mittels constanter Potentiale gedient. Bei diesem Instrument ist im Luftelectrometer der Abstand der Quadranten vom Flügel regulirbar. Dadurch können stets die Kräfte compensirt werden, welche auf den in der Flüssigkeit befindlichen zweiten Electrometerflügel wirken. Man ist von einer umständlichen Calibrirung der Empfindlichkeit des Electrometers bei verschiedener Stellung der Quadranten abhängig, und man hat es bei Pérot's Methode schliesslich ebenso wie früher mit Empfindlichkeitsvergleichungen aus Scalenausschlägen zu thun.

### Nullmethode unter Anwendung eines Differentialelectrometers.

Das Verfahren, welches ich eingeschlagen habe, ist das folgende: An *einem* Draht hängen zwei Electrometernadeln in zwei übereinander angeordneten Electrometern. Nadel, Hülle und je ein Quadrantenpaar ($q_l$ und $Q_r$ in der schematischen

1) Rosa, Phil. Mag. **31.** p. 188. 1891.

2) Pérot, Journ. de physique. **10.** p. 149. 1891.

Fig. 1) sind miteinander verbunden und mit dem Punkte $A$ eines Stromkreises. Durch Abzweigung von den Punkten $B$ und $C$ desselben Stromkreises werden die Quadrantenpaare $q_r$ und $Q_l$ geladen. Diese Ladungen streben die Nadel in entgegengesetzten Richtungen zu drehen. Sind die Abzweigungen so angelegt, dass die Nadel in Ruhe bleibt, so ist das *Empfindlichkeitsverhältniss* der zwei Electrometer umgekehrt proportional dem *Verhältniss der Quadrate der in ihnen wirksamen Potentialdifferenzen*, also auch dem *Quadrate des Widerstandsverhältnisses* zwischen $AC$ und $AB$. Dieses Verhältniss ermittelt man einmal, wenn in beiden Electrometern Luft $(W_l / W_f)$ ein anderes Mal, wenn im unteren Electrometer die zu untersuchende Flüssigkeit sich befindet $(W_L / W_F)$. Bei der letzteren Bestimmung sind natürlich Wechselströme anzuwenden, und es ist für inductionsfreie Widerstände Sorge zu tragen. Dann ist die Dielectricitätsconstante der Flüssigkeit

$$K = \left(\frac{W_L}{W_F} \cdot \frac{W_f}{W_l}\right)^2$$

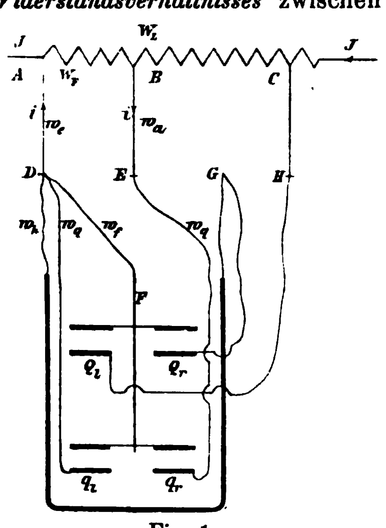


Fig. 1.

*Das Differentialelectrometer*, welches ich benutzte, wurde nach meinen Angaben von Hrn. Mechaniker Bosch in Strassburg ausgeführt.[1]) Bei der Construction desselben habe ich vornehmlich die Untersuchung von Flüssigkeiten mit hoher Dielectricitätsconstante und merklicher Leitung im Auge gehabt — Wasser, Alkohol, wässerige und alkoholische Lösungen. Fig. 2 zeigt den Aufbau des ganzen Instrumentes im Querschnitt; Fig. 3 gibt einen verticalen, Fig. 4 einen horizontalen Schnitt durch das untere, zur Aufnahme von Flüssigkeit be-

1) Hrn. Prof. Dr. F. Kohlrausch bin ich für die Liberalität, mit welcher er mir stets die reichen Mittel des Strassburger Instituts zur Verfügung gestellt hat, zu grösstem Danke verpflichtet.

stimmte Electrometer. Durch die Messingplatte $P$ sind, mit Hartgummi isolirt, die Träger der vier Cylinderquadranten geführt. In der Mitte der Platte befindet sich eine Bohrung, welche den Draht $F$ durchlässt, an welchem das Flügelpaar (Flächen je 18 × 16 mm) hängt. Letzteres ist möglichst leicht aus hartem Messingdraht und Blech angefertigt und sitzt mittels einer Hülse mit leichter Reibung auf dem Drahte $F$, der weiter

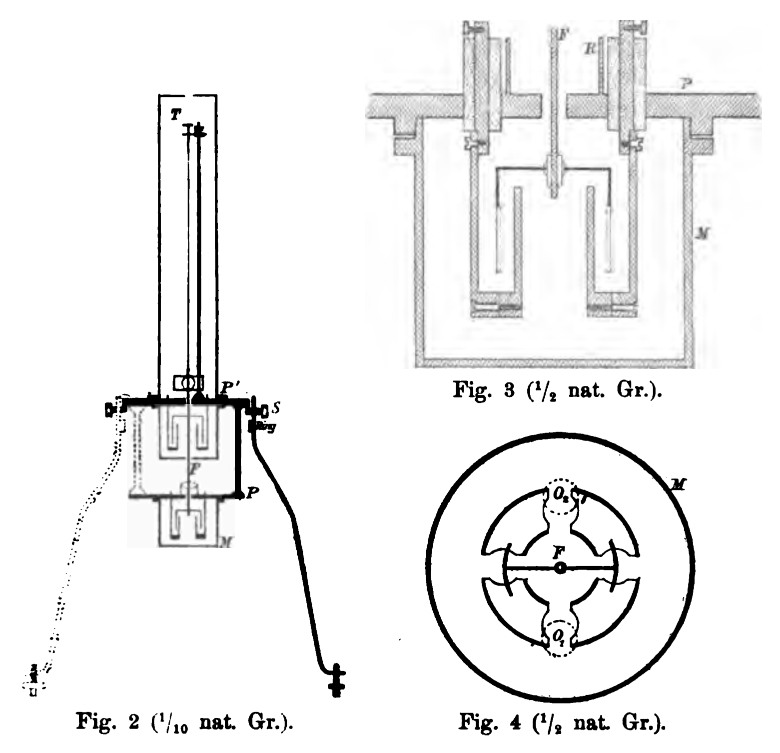



Fig. 3 (1/2 nat. Gr.).

Fig. 2 (1/10 nat. Gr.).

Fig. 4 (1/2 nat. Gr.).

oben in ähnlicher Weise die Nadel des Luftelectrometers trägt. Das metallene Gehäuse $M$ wird von unten her an die Platte geschraubt, und schliesst den Raum ab. Die Mittelöffnung in $P$ ist umgeben von einem weiteren Ringe $R$, ebenso sind durch Röhren um 10 mm überhöht noch zwei Oeffnungen $O_1$ und $O_2$, deren Lage in $P$ in Fig. 4 angedeutet ist, und welche zum Einfüllen der Flüssigkeit dienen. Bei den Versuchen mit Wasser wurde dasselbe stets bis zum Niveau dieser Röhren aufgefüllt, und dieselben dann mit Glasplättchen bedeckt.

Alle Theile, welche mit dem Wasser in Berührung kamen, waren hochpolirt nnd vernickelt. Die Vernickelung hat sich vorzüglich erhalten. Bei der gewählten Form des Electrometers wird einmal mit grosser Strenge der Bedingung Genüge geleistet, dass der ganze Raum durch das Dielectricum ausgefüllt sei, in welchem die Kraftlinien von der beweglichen zur festen Electrode verlaufen. Dann aber ist die nöthige Empfindlichkeit mit ziemlich hoher Widerstandscapacität vereinigt, was im Hinblick auf eine Erwärmung des untersuchten Electrolytes durch den Strom, sowie im Hinblick auf eine demnächst zu besprechende Correctionsgrösse von Wichtigkeit ist.

Das obere Electrometer war ähnlich gebaut, nur konnten dort die Cylinderquadranten enger gemacht werden, auch wurde der bewegliche Flügel länger gewählt, und ihm ein etwas grösserer Abstand von der Axe ertheilt. Dadurch wurde die Empfindlichkeit des Luftelectrometers nahe viermal so gross wie die des Flüssigkeitselectrometers. Die Tragplatte $P$ des unteren Electrometers wurde mittels dreier Säulen von der Platte $P'$ des oberen getragen. Auf dieser Platte erhebt sich eine weitere Säule, welche, mit Hartgummi isolirt, den Torsionskopf $T$ trägt, an welchem der Aufhängedraht des beweglichen Systems befestigt ist. Als solcher diente ein Silberdraht von 0,047 mm Durchmesser und ca. 30 cm Länge. Ein Blechgehäuse war über die Suspensionsvorrichtung gestülpt, dasselbe hatte oben Durchlässe für einen Schlüssel zum Regieren des Torsionskopfes, sowie für die Zuleitungsdrähte zur Nadel und zu den Quadrantenpaaren des Luftelectrometers. Unten war ein mit Spiegelglas bedeckter Ausschnitt angebracht zur Beobachtung des an der Nadel befestigten Spiegels mit Fernrohr und Scala. Die Tragplatte des oberen Electrometers, an welcher alle anderen Theile des Instrumentes befestigt waren, war kreisrund gedreht und ruhte auf den cylindrischen Fortsätzen dreier horizontaler Schrauben $S$ (Fig. 2), welche an einem soliden eisernen Dreifusse sassen. Letzterer war mit Fussschrauben zur Nivellirung versehen. Das ganze Electrometer war also von unten her zugänglich und konnte leicht um seine eigene Axe gedreht werden.

Das Instrument wurde auf einem grossen Steine fest aufgestellt, Beobachtungsfernrohr und Scala standen in 250 cm Abstand gleichfalls auf einem vom Fussboden isolirten Stein. Spiegel und Flügel des Electrometers wurden auf ihrer Axe $F$ (vgl. die Figuren) so justirt, dass, wenn die Mitte der Scala im Fernrohr sichtbar war, die Flügel in beiden Electrometern symmetrisch in den Quadranten hingen. Am oberen Electrometer wurde dies durch die Gleichheit der verschieden gerichteten Ausschläge controllirt, welche eintraten, wenn man abwechselnd $Q_r$ oder $Q_l$ ableitet und das andere Quadrantenpaar ladet. Am unteren Electrometer wurde die Justirung mit der Schaltung der Fig. 1 ausgeführt. Ein geeigneter Commutator, welcher neben dem Beobachtungsfernrohr stand und bei allen Versuchen benutzt wurde, regierte die Verbindungen bei $D$, $E$, $G$ und $H$. Er gestattete, abwechselnd $Q_r$ und $q_l$ — oder $Q_l$ und $q_r$ — mit Hülle und Flügel zu verbinden, $Q_l$ und $q_r$ — oder $Q_r$ und $q_l$ — zu $B$ und $C$ zu führen. (In der Figur sind die Verbindungen so dargestellt, wie sie der ersteren Stellung des Commutators entsprechen.) Der Flügel des Flüssigkeitselectrometers wurde nun auf dem Drahte $F$ so gedreht, dass, bei nahe richtigem Abzweigungsverhältniss $W_l / W_f$, die übrigbleibenden kleinen Ausschläge der Nadel entgegengesetzt gleich waren beim Umlegen des Commutators. Eine einfache Arretirvorrichtung, durch welche der Draht $F$ in seiner axialen Lage festgehalten werden konnte, erleichterte das Hantiren an den Flügeln. Die Stellung des Electrometers mit den Quadranten, für welche diese Justirung ausgeführt war, konnte wiedergefunden werden, und wurde durch einen Anschlag gesichert, welcher an die Tragplatte $P$ geschraubt war. Dieser Anschlag legte sich stets in gleicher Weise gegen den eisernen Dreifuss. Letztere Stellung liess sich überdies leicht controlliren durch das Spiegelbild der Scala an der Verschlussplatte des Gehäuses vor dem Spiegel. Die richtige Lage der Nadel war durch die Ablesung 500 (Mitte der Scala) gegeben.

**Bestimmung des Empfindlichkeitsverhältnisses, wenn nur Luft im Electrometer sich befindet.**
**(Luftempfindlichkeit.)**

Kleine Abweichungen der Nadel von der Normalstellung bei 500 konnten jedenfalls das Empfindlichkeitsverhältniss nur unbedeutend beeinflussen. Als äusserste Grenzen hielt ich 460 und 540 ein (Scalenabstand 2500 mm), doch wurde nur selten bei mehr als 20 mm Abweichung von der Mitte beobachtet.

Zur Bestimmung der Luftempfindlichkeit benutzte ich eine Batterie von 20 kleinen Chromsäureelementen, welche durch einen grossen Stöpselrheostaten geschlossen wurden. $W_l$ war hierbei stets gleich 4000 S. E., der zugehörige Werth von $W_f$ wurde interpolirt, und zwar meist aus Beobachtungen bei $W_f = 7800$ und 7900. Nullpunkt und Einstellungen des Electrometers, welches hierbei fast völlig ungedämpft schwang, wurden stets aus drei Umkehrpunkten abgeleitet. Die Beobachtungen wurden zuerst mit positiven Potentialen (Strom von $C$ nach $A$, Fig. 1), dann in umgekehrter Reihenfolge mit negativen (Strom von $A$ nach $C$) angestellt. Ich gebe ein Beispiel für das Schema dieser Beobachtungen. Die Zeichen ⦣ und ∠ bedeuten die beiden Stellungen des Commutators $D$—$H$, welcher die verschiedenen Quadrantenpaare mit Nadel und Gehäuse verbindet oder zur Ladung bringt.

Tabelle I.

**Luftempfindlichkeit. 6. Juli 1892. 11[h] 7[m] bis 11[h] 17[m] a. m.**
$W_l = 4000$

| | Nullpunkt | | $W_f' = 7800$ ⦣ | | $W_f' = 7800$ ∠ | | $W_f'' = 7900$ ∠ | | $W_f'' = 7900$ ⦣ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Umkehrpunkte | *489,9* / *490,2* | *494,0* | *486,5* / *486,9* | *488,7* | *498,4* / *497,8* | *492,8* | *487,2* / *488,0* | *494,4* | *495,4* / *494,8* | *489,2* |
| Umkehrpunkte | *495,0* / *494,5* | *489,2* | *485,0* / *485,6* | *491,6* | *497,1* / *4967* | *492,1* | *487,9* / *488,2* | *492,3* | *490,6* / *491,0* | *494,7* |
| Mittel: | 92,4 | 91,6 | 86,00 | 90,15 | 97,50 | 92,45 | 87,83 | 93,35 | 92,95 | 91,95 |
| Ruhelage: | 492,0 | | 488,08 | | 494,98 | | 490,59 | | 492,45 | |

⦣ − ∠ = − 6,90 + 1,86

$$\frac{6{,}90 \times 100}{8{,}76} = 78{,}76$$

$$-\ 1{,}88 = C_r$$

$$7800$$

$$W_f = 7876{,}9$$

Die Widerstände der Rheostaten, welche bei meinen Versuchen zur Verwendung kamen, hatte ich sorgfältig miteinander verglichen und auf das Stück 4000 zurückgeführt. Die kleinen Fehler des Rheostaten liefern im wesentlichen die Correction $C_r$. Ein ganz unbedeutender Antheil der Correction rührt noch daher, dass, streng genommen, die lineare Interpolation nicht zwischen den Widerständen 7800 und 7900 vorzunehmen war, sondern zwischen den wirksamen Kräften.

Aufeinanderfolgende Bestimmungen von $W_f$ zeigten stets eine sehr hohe Uebereinstimmung untereinander. In längeren Zeiträumen traten Schwankungen auf, vor und nach einer Beobachtungsreihe mit Wasser wurden manchmal etwas abweichende Zahlen gefunden — doch blieben diese Differenzen auf einige Zehntausendstel des ganzen Betrages beschränkt. In Betracht ziehen musste man aber, dass das Empfindlichkeitsverhältniss sich noch merklich mit der Nullstellung der Nadel änderte. Zur Illustration des Gesagten sind in der nachfolgenden Tabelle diejenigen Messungsergebnisse, welche an meine hauptsächlichsten zwei Beobachtungsreihen mit Wasser sich anschliessen, wiedergegeben.

Tabelle II.

| Nullp. | $W_f$ | $W_{500} = W_f +$ $+ 0,16(500 - \mathrm{Np.})$ | | Datum und Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|
| 492,0 | 7876,9 | 7878,2 | | 6. Juli 1892 |
| 517,0 | 81,2 | 78,5 | | 6. „ |
| 515,3 | 79,2 | 76,7 | | 8. „ |
| | | | 7875,9 | ← inzwischen $H_2O$-Füllung |
| 512,3 | 76,3 | 74,3 | | 10. Juli |
| 465,2 | 68,0 | 73,6 | | 10. „ |
| 468,4 | 70,7 | 75,7 | | 22. „ |
| 515,1 | 78,1 | 75,7 | | 22. „ |
| 516,7 | 78,0 | 75,3 | | 22. „ |
| | | | 7875,0 | ← inzwischen $H_2O$-Füllung |
| 486,4 | 72,5 | 74,7 | | 25. Juli |
| 521,5 | 77,4 | 74,0 | | 25. „ |

Ein wenig wanderte der Nullpunkt stets, infolge der elastischen Nachwirkung im Aufhängedraht. Die grösseren Aenderungen sind absichtlich durch Drehen des Torsionskopfes hervorgerufen.

**Bestimmung des Empfindlichkeitsverhältnisses für Füllung des unteren Electrometers mit Flüssigkeit.**

Die mitzutheilenden Versuche beschränken sich zunächst nur auf die Untersuchung destillirten Wassers; an der Hand dieses Beispieles soll das Verfahren auseinandergesetzt werden.

**Correctionen.**

Bei der Untersuchung leitender Flüssigkeiten im Electrometer tritt eine wichtige Correction auf: Ist der Widerstand der Flüssigkeit im Electrometer noch vergleichbar mit dem Widerstande $W_P$ des Hauptstromkreises, welcher die Potentiale liefert, sowie mit dem Widerstande der Zuleitungsdrähte zum Electrometer, so hat man den hieraus entstehenden Potentialverlust in Rechnung zu setzen.

Bei genaueren Messungen, welche überdies bis zu höheren Leitfähigkeiten ausgedehnt werden sollen, kann es nicht mehr gestattet sein, den Aufhängedraht des Electrometerflügels direct mit der Hülle und dem einen Quadrantenpaare zu verbinden. Der dünne Draht hat einen merklichen Widerstand (22 S. E. bei Cohn und Arons, bei mir 3,2 $\Omega$), und da ein Strom denselben durchlaufen muss, so befindet sich bei directer Verbindung die Electrometernadel nicht mehr auf genau dem gleichen Potential wie Hülle und ein Quadrantenpaar — ein Umstand, auf welchen meines Wissens bisher noch von keiner Seite aufmerksam gemacht worden ist.

Da der Potentialverlust auf der Zuleitung zum Flügel unvermeidlich ist, so sorgte ich dafür, dass auch auf den Leitungen zu den Quadrantenpaaren sowie zur Hülle die gleichen Verluste auftraten. Ich führte besondere Leitungen $w_f$, $w_q$ und $w_h$ (Fig. 1) zu dem schon mehrfach erwähnten Commutator. Die Widerstände der Leitungen $w_h$ und $w_q$, welche aus ganz dünnem und etwas stärkerem Kupferdraht zusammengesetzt wurden, glich ich bis auf Bruchtheile eines Procentes so ab, dass die Leitungsfähigkeiten $1/w_f \dots 1/w_h \dots 1/w_q$ proportional der Anzahl von Stromfäden waren, welche bei den Messungen im Electrometer, von einem Quadrantenpaare ausgehend, zum Flügel, zur Hülle, zum anderen Quadrantenpaare hinübergingen. *Dadurch wird die von der Theorie des Experimentes vorausgesetzte Gleichheit der letzteren drei Potentiale nun auch wirklich mit möglichster Schärfe erreicht.*

Um zu der geforderten Kenntniss der Stromvertheilung im Electrometer zu gelangen, beachte man, dass hier ein System von vier Electroden vorliegt: Flügel, Hülle und zwei Quadrantenpaare. Die Hülle schliesst die anderen drei Electroden fast völlig ein, und der Raum ist mit homogener Flüssigkeit gefüllt. Dann ist im allgemeinen Falle die Anzahl der Stromfäden, welche von den vier Electroden mit den Potentialen $v_1 \dots v_4$ ausgehen, eine lineare homogene Function der vier Potentiale, und zwar

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} i_1 &= \phantom{-}l_1\, v_1 - l_{12} v_2 - l_{13} v_3 - l_{14} v_4 \\ i_2 &= - l_{12} v_1 + l_2\, v_2 - l_{23} v_3 - l_{24} v_4 \\ i_3 &= - l_{13} v_1 - l_{23} v_2 + l_3\, v_3 - l_{34} v_4 \\ i_4 &= - l_{14} v_1 - l_{24} v_2 - l_{34} v_3 + l_4\, v_4 \end{aligned}\right.$$

und, weil ebensoviel Strom in das System hinein- wie heraustritt, muss bei beliebigen $v$-Werthen stets sein

$$(2)\qquad i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0.$$

Es ist dies dieselbe Form der Gleichungen, wie sie für die statischen Ladungen der vier Electroden gilt, wenn ein Isolator das Zwischenmedium bildet, statt eines Leiters. Die Grössen $l$ sind Constanten, welche von Form und Lage der Electroden abhängen und noch als gemeinsamen Factor das specifische Leitungsvermögen der Flüssigkeit enthalten. Ihrer Dimension nach sind die $l$ reciproke Widerstände. Die Addition der Gleichungen (1) gibt mit Rücksicht auf (2) noch vier Gleichungen, sodass nur sechs unabhängige Coefficienten vorhanden sind, welche man durch passende Widerstandsmessungen ermittelt.

Geht ein Strom von 1 zu den untereinander verbundenen Electroden 2, 3, 4, so kann man $v_1 = v$ und $v_2 = v_3 = v_4 = 0$ setzen, also

$$i_1 = l_1\, v \qquad \begin{aligned} i_2 &= - l_{12}\, v \\ i_3 &= - l_{13}\, v \\ i_3 &= - l_{14}\, v. \end{aligned}$$

Folglich gibt die Bestimmung des bei dieser Schaltung vorhandenen Flüssigkeitswiderstandes $w_1$ direct

$$l_1 = l_{12} + l_{13} + l_{14} = 1 / w_1.$$

Ebenso erhält man für die anderen Gruppirungen der Electroden: 2 | 1,3,4; 3 | 1,2,4; 4 | 1,2,3; 1,2|3,4; 1,3 | 2,4 und 1,4 | 2,3 je eine weitere Gleichung zwischen gemessenen Widerständen und den Coefficienten $l$. Eine Gleichung ist überzählig, dieselbe kann zur Controlle der Beobachtungen dienen. Aus diesem Material berechnet man die uns interessirenden Strombruchtheile $l_{qf} / l_q$; $l_{qh} / l_q$; $l_{qq} / l_q$.

Die Untersuchung der Stromvertheilung im Electrometer wurde einmal mit frei hängendem Flügel an dem fertig montirten Instrumente vorgenommen, wobei als Füllung Wasser mit einer Leitfähigkeit von ca. $10 \times 10^{-10}$ (Hg = 1) diente. Bei einer zweiten Beobachtungsreihe war der Flügel in seiner normalen mittleren Lage von einer Hülfsvorrichtung festgehalten. Zu den Widerstandsmessungen diente eine Walzenbrücke mit Inductionsapparat und Telephon nach F. Kohlrausch. Die Einstellungen waren sehr sicher und konnten so rasch gemacht werden, dass auch bei der ersten Beobachtungsweise die Messung schon beendigt war, ehe die Nadel noch merklich aus ihrer Ruhelage sich fortbewegt hatte. Beide Beobachtungsreihen lieferten übereinstimmende Werthe, welche auch durch spätere Controllversuche noch bestätigt wurden. Die gefundenen Strombruchtheile und die abgeglichenen Widerstände der Zuleitungen vom Commutator zum Electrometer betrugen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Quad.-Flügel: | $l_{qf}/l_q = 0{,}235$; | $w_f = 3{,}34\ \Omega$; | Product = 785 |
| Quad.-Hülle: | $l_{qh}/l_q = 0{,}463$; | $w_h = 1{,}69\ \Omega$; | „ = 782 |
| Quad.-Quad.: | $l_{qq}/l_q = 0{,}303$; | $w_q = 2{,}60\ \Omega$; | „ = 788 |

Die Producte der zusammengehörigen Grössen in der letzten Colonne zeigen die erforderliche Gleichheit.

Die wirksamen Potentialdifferenzen in beiden Electrometern verhalten sich in erster Annäherung wie $W_L : W_F$. Wir bezeichnen die durch die Leitung im Electrometer verursachte Correction mit $C_E$, und führen der Kürze halber für die Zuleitungswiderstände besondere Buchstaben ein (vgl. Fig. 1).

$$w_e + \frac{1}{{}^1/w_f + {}^1/w_h + {}^1/w_q} = z_1, \qquad w_a + w_q = z_2.$$

Dann ist der correcte Ausdruck für das Verhältniss der in beiden Electrometern wirksamen Potentiale (vgl. Fig. 1)

$$\frac{W_L + C_E}{W_F} = \frac{J(W_L - W_F) + (J - i)\, W_F - i \,.\, z_1}{(J - i)\, W_F - i\,(z_1 + z_2)} .$$

Bei den späteren Versuchen wurde stets der Widerstand $W_E$ der Flüssigkeit im Electrometer gemessen. Eine einfache Umschaltvorrichtung hob die Verbindungen mit $A$ und $B$ auf, und stellte solche her mit der zur Widerstandsmessung dienenden Walzenbrücke, welche neben dem Commutator stand. Die Widerstände der Zuleitungen sind vom gemessenen Widerstande zu subtrahiren. Da nun

$$\frac{i}{J} = \frac{W_F}{W_E + W_F + z_1 + z_2} ,$$

so findet man die Correction für $W_L$:

$$C_E = \frac{W_L(W_F + z_1 + z_2) - W_F(W_F + z_1)}{W_E} .$$

Es war $z_1 = 0{,}81$, $z_2 = 2{,}61$, und bei den Messungen am Wasser $W_F = 4{,}5$, $W_L$ zwischen 20 und 21 $\Omega$. Der Widerstand $W_E$ lag zwischen 7500 und 2500 $\Omega$ und die Correction betrug demnach 0,018 bis 0,056 $\Omega$, also 0,1 bis 0,3 Proc. von $W_L$.

Gelegentlich der Untersuchung der Stromvertheilung wurde auch die Widerstandscapacität $\Gamma$ des Electrometers bestimmt durch Vergleichung mit einem wohlbekannten Widerstandsgefässe. Es ergab sich $\Gamma = 9900 \times 10^{-10}$. Dabei sind die Leitfähigkeiten auf $Hg$ bezogen, die Widerstände jedoch in $\Omega$ gemessen. Die Widerstandsmessungen, welche später bei den Bestimmungen der Dielectricitätsconstanten für die Berechnung der Correction $C_E$ stets erforderlich waren, lieferten also zugleich auch das auf Quecksilber bezogene Leitvermögen $\lambda = 9900/W_E \,.\, 10^{-10}$.

### Hülfsapparate.

Die Messung der Dielectricitätsconstanten ist bei dieser Methode zurückgeführt auf die Messung zweier Widerstandsverhältnisse (vgl. p. 42). Bei Bestimmung der Luftempfindlichkeit konnte hierzu ein gegebener Rheostat benutzt werden, anders liegt es bei den Messungen an leitenden Flüssigkeiten. Um die Correction $C_E$ nicht über einen mässigen Betrag hinausgehen zu lassen, ist es erforderlich, dass die *Widerstände*, von

welchen abgezweigt wird, nicht zu gross seien. Dann muss man aber relativ starke Ströme hindurch schicken, um die nöthigen Potentiale an den Enden zu erhalten. Ich stellte für meine Versuche einen besonderen Rheostaten her aus Mangandraht von 1,0 mm Durchmesser. Derselbe enthielt hintereinander folgende Stücke: 0,5 $\Omega$, dann 21 Ohmstücke und 11 Stücke von 0,1 $\Omega$. Die Verbindungen von den Einern nach den Zehnteln konnten nach Belieben so eingerichtet werden, dass 21, 20, 19... ganze Ohm im Stromkreise sich befanden. Ein grosses Intervall von Widerstandsverhältnissen kann bei dieser Anordnung mit Leichtigkeit beherrscht werden.

Die Widerstände waren bifilar gewickelt, durch kleine Quecksilbernäpfchen hintereinandergeschaltet, und hingen in einem Petroleumbade. Der Rheostat wurde hergestellt im November 1891, und wurde im April 1892 nochmals nachjustirt. Keines der herstellbaren Widerstandsverhältnisse wich um mehr als $^1/_{100\,000}$ von seinem Nominalwerth ab. Bei den bisherigen Versuchen wurde die Abzweigungsstelle $A$ (Fig. 1) stets an den Anfang der Widerstandsreihe gelegt, und $W_F$ immer = 4,5 genommen. Der Punkt $C$ wird in die Reihe der Zehntel gelegt und es sind elf Zehntel vorhanden, um immer bequeme Interpolationsgrenzen zu haben, ohne bei zusammengehörigen Versuchen den ganzen eingeschalteten Widerstand — und damit auch die Potentialdifferenz $AB$ — ändern zu müssen.

Durch den Rheostat wurde ein Wechselstrom geleitet, der anfangs von einer constanten Batterie in Verbindung mit einem *rotirenden Commutator* geliefert wurde. Der Commutator bestand aus zwei isolirt verschraubten Halbcylindern von Messing, denen seitliche Schleifringe den Strom zuführten. Diametral gegenüberstehende Bürsten aus acht federnden Kupferdrähten nahmen den Wechselstrom ab. Getrieben wurde der Commutator von einem Wassermotor. Bei *gleichförmiger* Rotation muss diese Vorrichtung völlig gleiche Strommengen in + und — Richtung liefern, unbeschadet geringer Excentricitäten in der Trennungslinie der Halbcylinder und der Verbindungslinie der zwei Bürstencontacte. Sitzt aber die Schnurscheibe excentrisch auf der Axe des Commutators, so ist die Winkelgeschwindigkeit nicht mehr in allen Momenten einer Umdrehung die gleiche, und es können sich Stromüberschüsse in einer

Richtung herstellen. Gewisse störende Erscheinungen, welche anfangs bei meinen Versuchen auftraten, legten die Vermuthung nahe, dass bei der Genauigkeit meiner Messungen diese Art der Wechselstromerzeugung nicht mehr hinreichend sicher eine dauernde Polarisation ausschlösse.

Ich will hinzufügen, dass diese Vermuthung keinen weiteren Beweis gefunden hat, doch war es in jedem Falle ein methodischer Fortschritt, dass ich wieder zur Anwendung *inducirter Ströme* zurückkehrte. Ich baute einen *Transformator* aus □-förmigen Eisenblechscheiben, mit Papier voneinander isolirt, umwickelt mit 2 × 187 Windungen Kupferdraht von 1 mm Durchmesser (zus. 0,9 $\Omega$) als secundärer, und 2 × 55 Windungen eines dicken Leitungskabels als primärer Wickelung. In letztere ging nun der Wechselstrom vom rotirenden Commutator, der Strom aus der secundären Wickelung wurde in den Rheostaten geführt. Jetzt ist nicht nur das Electrometer stets metallisch geschlossen — das war es immer durch $W_F$ — sondern auch der ganze Abzweigungsrheostat ist es, und ein einseitiger Ueberschuss der durchgehenden Electricitätsmengen ist nicht mehr denkbar. Ich hatte die weitere Bequemlichkeit, mit einem niederen primären Potential arbeiten zu können, also mit einer geringeren Anzahl von Elementen, da stärkerer Strom als früher denselben unbeschadet entnommen werden konnte. Bei meinen letzten Versuchen benutzte ich vier oder fünf Accumulatoren. Der Commutator rotirte mit hoher Geschwindigkeit, meist 70—80 Touren in der Secunde. Die Unterbrechungsfunken schädigten denselben stark und die Bürsten nutzten sich rasch ab. Die Folge davon war, dass bei fortgesetztem Arbeiten in tagelangen Beobachtungsreihen bei gleicher Elementenzahl im primären Kreise der secundäre Strom oft erheblich abnahm. Wenn erforderlich, verstärkte ich dann die primäre Batterie.

Zur Bestimmung der *Tourenzahl des Commutators* diente das Zählwerk eines kleinen Woltmann'schen Anemometers, welches in geeigneter Weise an den Wassermotor angeschlossen war. Mittels eines Zügels konnte man vom Platze des Beobachters aus das Zählwerk nach der Uhr in Gang setzen und ausrücken. Um gleichförmigeren Gang von Motor und Commutator zu erzielen, setzte ich auf die Axe des ersteren einen

Windflügel aus Blech, und drehte den Wasserhahn stets voll auf. Zur Variation der Tourenzahl war der Commutator mit drei Schnurscheiben verschiedenen Durchmessers versehen.

### Beobachtungen am Wasser.

Als erstes Object der Untersuchung sollte reines Wasser dienen, um die Dielectricitätsconstante desselben auch in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur, möglichst genau festzulegen. Man kann bequem das Flüssigkeitsgefäss des Electrometers von unten her mit einem Bade umgeben zur Erzielung niederer und höherer Temperaturen, doch beobachtete ich vorläufig nur bei den gerade vorhandenen, resp. durch Heizung, Thür- und Fensteröffnen, und dgl. erreichbaren Zimmertemperaturen. Die Kugel eines Geissler'schen Thermometers lag hart an der Wand des Flüssigkeitsgefässes, und das Ganze war mit einer doppelten Schicht sehr dicker Watte bekleidet. Das Thermometer war in $^1/_5{}^0$ getheilt, und in der Reichsanstalt an das Luftthermometer angeschlossem. Den Eispunkt bestimmte ich neuerdings, und fand ihn ungeändert. Da die Zimmertemperatur entweder fast völlig constant gehalten wurde, oder doch nur sehr langsam sich änderte, ist von Seite der Temperaturmessungen kein merklicher Fehler zu befürchten.

Das zweimal destillirte Wasser, mit welchem ich arbeitete, hatte bei meinen hauptsächlichsten Versuchsreihen nur eine Leitfähigkeit von $1 \cdot 3 \times 10^{-10}$. Das Wasser wurde in das *Electrometer gefüllt* mittelst einer gebogenen engen Glasröhre, welche durch die Oeffnung $O$ (Fig. 4) eingeführt wurde, und bis auf den Boden des Gefässes reichte. Die Glasröhre war an einen Trichter angesetzt mit einem Stück Kautschukschlauch, der durch einen Quetschhahn verschlossen werden konnte. Röhren und Trichter standen stets mit destillirtem Wasser gefüllt, letzterer zum Schutze gegen Staub mit einer Glasplatte bedeckt. Sollte das Electrometer gefüllt werden, so liess ich das Wasser auslaufen, spülte mit reinem Material nach, führte das Rohr in das Electrometer ein, während Trichter und Rohr mit reinem Wasser gefüllt waren. Dann konnte man durch Oeffnen des Quetschhahnes eine von Luftblasen völlig freie Füllung des Electrometers bewirken.

Beim Ansteigen des Wasserniveaus im Innern wird der

Flügel durch Capillarkräfte hin und her gezerrt, dies wirkt ungünstig auf den Aufhängedraht, und es können sich dabei leicht noch Luftblasen bilden, die nicht mehr glatt durch die Oeffnungen oben entweichen. Darauf deuteten Verlegungen des Nullpunktes hin, welche manchmal vorkamen, und ein Zurückführen der Nadel mittelst des Torsionskopfes nothwendig machten. Daher stellte ich eine einfache Vorrichtung her, mittelst deren der Flügel zwischen den beiden Electrometern gepackt, und in seiner axialen Stellung sicher *arretirt* werden konnte. Ebenso wie beim Füllen, so gewährt auch beim Entleeren des Electrometers die Anwendung dieser Arretirung dem Arbeiten grosse Sicherheit und Bequemlichkeit.

Beim *Entleeren* wurde zunächst von der erwähnten Oeffnung *O* aus ein Theil des Wassers mit der Wasserluftpumpe abgesaugt, dann Watte und Thermometer entfernt, die Hülle des Flüssigkeitselectrometers abgeschraubt, und das Wasser fortgegossen, resp. nochmals in einem Widerstandsgefäss die Leitfähigkeit desselben gemessen. Die Tropfen, welche an Flügel, Quadranten etc. hängen blieben, wurden alle vorsichtig mit spitzen und geeignet gebogenen Glasröhrchen mittels Wasserluftpumpe abgesaugt. Dank der vorzüglichen Vernickelung war auf diese Weise in kürzester Zeit alles getrocknet. An den Ecken der Hartgummipfropfe, welche die Quadranten trugen, wurde noch etwas mit Fliesspapier nachgeholfen, nach einigen Stunden das Gefäss wieder angeschraubt, und alsbald zur Controle wieder die Luftempfindlichkeit bestimmt (s. p. 46).

### Resultate.

Ich erhielt anfangs sehr unerwartete und schwer zu deutende Resultate. Nicht nur, dass ich auffallend hohe Zahlen für *K*, die Dielectricitätsconstante des Wassers, fand — fast 5% höhere noch als Tereschin in einem Falle; es zeigte sich, dass jede Beobachtung einen kleineren Werth gab, als die vorhergehende. Und einige Zeit nach dem Eingiessen des Wassers gingen die Zahlen noch unter die Tereschin'schen hinab. Die Temperatur, welche ja nach den Beobachtungen von Rosa[1]) einen hohen Einfluss auf *K* hat, wurde constant

1) **Rosa**, l. c.

gehalten; kleine Schwankungen von wenigen Zehntelgraden konnten überdies leicht mit genügender Sicherheit mittelst der Formel $d.(K+2)/(K-1)=D$ (s. weiter unten) in Rechnung gesetzt werden, deren Anwendbarkeit auf Rosa's Versuche Lebedew[1]) nachgewiesen hat, und die dann auch Cohn[2]) an seinen Messungen electrischer Wellen in Wasser innerhalb der Genauigkeitsgrenzen der Beobachtungen bestätigt fand.

Natürlich verschlechterte sich das Wasser nach dem Einbringen ins Electrometer, und die Leitfähigkeit stieg anfangs sehr rasch. Die scheinbare Abnahme von $K$ zeigte sich immer noch in gleicher Weise, nachdem durch Herstellung des Transformators der Verdacht beseitigt war, dass möglicherweise Unvollkommenheiten des rotirenden Commutators störende Polarisation zur Folge gehabt hätten. So lag der Gedanke unabweisbar nahe, dass man es in diesem Gebiete sehr reinen Wassers nun doch vielleicht mit einem directen Einfluss des Leitungsvermögens zu thun habe. Aber wiederholte Füllungen des Electrometers, an welchen bei gleicher Temperatur wie früher beobachtet wurde, gaben zwar qualitativ gleiche Resultate, doch waren dieselben weit entfernt, für gleiches $\lambda$ auch gleiches $K$ zu liefern.

Erst spätere Beobachtungsreihen, bei denen ich das Wasser über Nacht im Electrometer liess, und am folgenden Tage weiter arbeitete, bahnten die Lösung an. So lange Zeit nach der Füllung nahm das Leitvermögen des Wassers nur noch langsam zu, aber auch $\partial K/\partial\lambda$ schien nur noch ganz klein. Später habe ich bei tagelang fortgesetzten Beobachtungsreihen *völlige Constanz* erhalten. Doch verschlechterte sich das Wasser dann auch nur noch äusserst langsam. Auch die anfänglichen Werthe nach dem Eingiessen waren bei späteren Beobachtungsreihen lange nicht mehr so viel höher, als die normalen, und in kürzerer Zeit waren die letzteren erreicht. Zugleich erhielt sich das Wasser viel besser rein, wohl im Zusammenhange damit, dass ich jetzt durch Absaugen, früher mit Fliesspapier trocknete. Auch hatten die Hartgummi-Electrodenträger inzwischen einen Ueberzug von Schellack erhalten, und dies

1) Lebedew, Wied. Ann. **44.** p. 288. 1891.
2) Cohn, Berl. Ber. **50.** p. 1037. 1891 und Wied. Ann. **45.** p. 370. 1892.

mag ebenfalls die Quellen der Verunreinigung des Wassers vermindert haben.

Die so ausführlich besprochenen Störungen, welche immerhin in jeder Beobachtungsreihe einen hervorragend regelmässigen Verlauf zeigten, erklären sich nun offenbar so:

Das Wasser nimmt im Electrometer von den Wänden Substanzen auf in minimalen Mengen, die seine Leitfähigkeit erhöhen. Geschieht die Aufnahme rasch, was namentlich zu Anfang der Fall ist, so kann die Diffusion nicht schnell genug vor sich gehen, die Flüssigkeit ist nicht mehr homogen, besser leitende Schichten liegen an den Grenzen der Flüssigkeit. In diese Schichten nun müssen dann Endpunkte von Kraftlinien hineinfallen, welche im Falle homogener Flüssigkeit nur auf den metallischen Oberflächen sitzen würden. Dadurch wird sozusagen der Abstand zwischen Flügel und Quadranten verringert, eine grössere Kraft wird also ausgeübt, und der Flügel folgt dem ihn umgebenden Häutchen.

Frühere Beobachter haben alle mit weit geringerer Genauigkeit gearbeitet, auch leitete ihr Wasser von vorneherein schon viel besser. Doch glaube ich, dass die um $1^1/_2-2^0/_0$ höhere Zahl, welche Tereschin für die Dielectricitätsconstante des Wassers angiebt, wohl mit auf die geschilderte Fehlerquelle zurückzuführen ist. In Rosa's graphischer Darstellung Phil. Mag. (5) 31, Tafel VI, Fig. 7, könnte man diese scheinbare zeitliche Abnahme von $K$ angedeutet finden, doch liefern auch die Beobachtungsgruppen 9 und 10 wieder etwas höhere Zahlen. Dass der absolute Werth, welchen Rosa angiebt, mit seinem Temperaturcoefficienten meinen Resultaten vergleichbar gemacht, noch um $2^1/_2-3^0/_0$ kleiner ist, als letztere, kann bei der ungünstigen Construction von Rosa's Apparat nicht Wunden nehmen.

Bei den Wasserbeobachtungen habe ich anfangs mit ersten Ausschlägen gearbeitet, um aber die Einstellung der Nadel auf den Nullpunkt nicht immer abwarten zu müssen, leitete ich zuletzt die gesuchten Ruhelagen je aus 2 Umkehrpunkten ab. Es gewährt das eine grosse Erleichterung, da man die erforderlichen Manipulationen an Rheostat und Commutator, sowie die Ablesungen glatt hintereinander weg machen kann. Auch ist die Ersparniss an Zeitdauer eines Beobachtungssatzes fast

grösser als das geringe Mehr, welches nun die Rechnung erfordert.

Das Dämpfungsverhältniss $\varkappa$ der Electrometernadel bestimmte ich zwei Mal, immer als Mittel mehrerer Beobachtungen. Ich fand bei 16·4° $\varkappa = 3·0$, bei 20·7° $\varkappa = 2·71$. Die Zahlen stehen im richtigen Verhältniss zu einander, wie man es nach der Abhängigkeit der Reibung des Wassers von der Temperatur zu erwarten hat. Für Beobachtungen bei anderen Temperaturen wurde nun das Dämpfungverhältniss in eine kleine Tabelle gebracht. Sind beobachtet die Umkehrpunkte $a_1$ und $a_2$, so ist die gesuchte Ruhelage $a_2 + (a_1 - a_2) / (1 + \varkappa)$. Da die Schwingungsamplituden stets nur wenige Scalentheile betrugen, so könnte selbst eine Unsicherheit von 0·1 in $\varkappa$ noch kaum einen merklichen Fehler verursachen. Ich nahm aber stets 3 Ziffern für $\varkappa$, da dann immer noch mit gleicher Bequemlichkeit die Grösse $(a_1 - a_2) / (1 + \varkappa)$ den Crelle'schen Multiplicationstafeln entnommen werden kann.

Als Beispiel für das bestbewährte Beobachtungsschema diene der in Tab. III mitgetheilte Satz. Zuerst wurde der Wassermotor in Gang gesetzt, dann die Temperatur abgelesen und der Nullpunkt notirt. An den für Anfang und Ende angegebenen Zeiten wurde das Zählwerk für den Commutator in Gang gesetzt, resp. ausgeschaltet. Dazwischen lagen die Ablesungen des Electrometers für die verschiedenen Widerstandsverhältnisse im Hilfsrheostat, zwischen denen zu interpoliren war. Nach Beendigung der Ablesungen und nach Ausrücken des Zählwerkes wurde der Motor angehalten, wieder Temperatur und Nullpunkt notirt, und sogleich eine Widerstandsmessung angestellt. Für jede Lage des Commutators wurde eine Einstellung auf der Brücke gemacht, und das Mittel daraus genommen. Oft ging auch eine Widerstandsmessung den Ablesungen am Electrometer unmittelbar voraus. Beim Vorkommen merklicher Aenderungen wurden Widerstand und Leitfähigkeit für die mittlere Zeit der Electrometerbeobachtung interpolirt.

Bei der Interpolation von $W_L$ ist behufs correcter Rechnung das sehr kleine Glied 2. Ordnung mit berücksichtigt, welches daher rührt, das eigentlich zwischen $(W_L')^2$ und $(W_L'')^2$ linear zu interpoliren ist.

Tabelle III,

10. Juli 1892.

Beginn: $4^h$ $58^m$. Ende $5^h$ $4^m$. Zählrad: *3538* Umdr.<br>
vorher: $t = 20{,}80^0$ Np. = *507,5* Daraus Tourenz. rot. Comm.<br>
nachher: *20,80* *507,1* $N = 81{,}7$ pro Sec.<br>
$W_F = 4{,}5\ \Omega$. Zum Np. 507,3 gehört $W_f = 7877{,}1$ (vgl. Tab. II).

| Stellung des Commutat: | $W_L'' = 20{,}5\ \Omega$ | | $W_L' = 20{,}1\ \Omega$ | | | $W_L'' = 20{,}5\ \Omega$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ⦣ | ∠ | ∠ | ⦣ | ∠ | ∠ | ⦣ |
| $a_1$ | *504,2* | *511,6* | *504,8* | *510,8* | *504,6* | *510,4* | *503,2* |
| $a_2$ | *506,3* | *509,5* | *505,9* | *509,1* | *506,0* | *508,7* | *506,0* |
| $(a_1 - a_2) / (1 + \varkappa)$ | −,57 | +,57 | −,30 | +,46 | −,38 | +,46 | −,76 |
| Ruhelage | 05,73 | 10,07 | 05,60 | 09,56 | 05,62 | 09,16 | 05,24 |
| ⦣ − ∠ | − 4,34 | | + 3,96 | + 3,94 | | − 3,92 | |

$W_E = 2569\ \Omega$<br>
$\lambda = 3{,}86$

20,5 $\Omega$ . . . − 4,13<br>
20,1 „ . . . + 3,95<br>
+ 0,1965 = 3,95 × 0,4/8,08 (+ quadr. Glied)<br>
+ 0,0533 = $C_E$<br>
$W_L$ = 20,350

$$\left(\frac{W_L \cdot W_f}{W_F \cdot W_l}\right)^2 = \left(\frac{20{,}350}{4{,}5} \cdot \frac{7877{,}1}{4000}\right)^2 = \mathbf{79{,}31} = \mathbf{K'}.$$

Einfluss der Stromwechselzahl.

Es war nun zu untersuchen, ob die von der Beobachtung gelieferten Werthe $K'$ nicht noch eine Abhängigkeit von der Häufigkeit des Stromwechsels zeigten. F. Kohlrausch[1]) hat gezeigt, dass ein Electrolyt Wechselströmen gegenüber einen scheinbaren Widerstand aufweist, welcher grösser ist als der thatsächliche Widerstand um einen Betrag, der bei gegebener Lage der Electroden proportional ist $w \cdot (\lambda / N)^2$, vorausgesetzt, dass die Tourenzahl $N$ hoch genug, und dass keine Selbstinduction vorhanden sei. Dies ist für die Zweigschliessung, in welcher sich unser Electrometer befindet, der Fall. Die Kraftwirkung auf den Electrometerflügel wird ebenso von der Polarisation beeinflusst. Nur wird sie *verkleinert,* denn von dem an den Electroden gemessenen Potential subtrahirt sich noch die electromotorische Kraft der Polarisation. Es wird also die wahre Dielectricitätsconstante $K$ grösser sein als die scheinbar beobachtete $K'$, so zwar, dass

$$K = K'\left(1 + \Pi \cdot \frac{\lambda^2}{N^2}\right)$$

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. **148.** p. 143. 1873.

Aus den in Tab. IV mitzutheilenden drei Beobachtungsreihen finde ich für die Constante $\Pi = 1{,}16$. Dabei ist unter $N$ die Tourenzahl des Commutators, also die Anzahl der ganzen Perioden pro Secunde, verstanden. $\lambda$ ist wie immer in $10^{-10}$. *Hg*-Einheiten gemessen.

In folgender Tabelle sind neben die direct gefundenen Zahlen $K'$ die Correctionen $K.\Pi.\lambda^2/N^2$ gesetzt, dann die reducirten Werthe $K$. Als Mittelwerth der drei Gruppen von Beobachtungen erhält man

$$K = \mathbf{79{,}56} \text{ bei } \mathbf{20{,}75^0}.$$

Tabelle IV.

| | $t$ | $\lambda$ | $N$ | $K'$ | $\frac{\Pi K \lambda^2}{N^2}$ | $K$ beob. | $K$ ber. aus 79,56 bei 20,75° | $\Delta$ beob. – ber. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9. VII. 1892. | | | | | | | | |
| 12h 33m | 20,70° | 3,16 | 81 | 79,62 | 0,14 | 79,76 | 79,58 | + 0,18 |
| 3 53,5 | 20,70° | 3,27 | 81 | 79,28 | 0,15 | 79,43 | 79,58 | – 0,15 |
| 4 10,5 | 20,73° | 3,28 | 54,5 | 79,34 | 0,33 | 79,67 | 79,57 | + 0,10 |
| 25,5 | 20,71° | 3,30 | 43,5 | 79,00 | 0,53 | 79,53 | 79,58 | – 0,05 |
| 42 | 20.71° | 3,31 | 42,1 | 78,95 | 0,57 | 79,53 | 79,58 | – 0,05 |
| 5 15 | 20,70° | 3,32 | 53,4 | 79,31 | 0,36 | 79,67 | 79,58 | + 0,08 |
| 41 | 20,70° | 3,33 | 71 | 79,43 | 0,20 | 79,63 | 79,58 | + 0,05 |
| 6 1 | 20,70° | 3,34 | 73 | 79.39 | 0,19 | 79,58 | 79,58 | + 0,00 |
| 9 40 | 20,71° | 3,45 | 82 | 79,33 | 0,16 | 79,60 | 79,58 | + 0,02 |
| 10 35 | 20,72° | 3,47 | 83 | 79,50 | 0,16 | 79,66 | 79,57 | + 0,09 |
| 10. VII. 1892. | | | | | | | | |
| 8h 6m | 20,70° | 3,67 | 76 | 79,45 | 0,21 | 79,66 | 79,58 | + 0,08 |
| 10 12,5 | 20,74° | 3,73 | 81 | 79,38 | 0,20 | 79,58 | 79,56 | + 0,01 |
| 29 | 20,74° | 3,74 | 58,1 | 79,12 | 0,38 | 79,50 | 79,56 | – 0,06 |
| 46 | 20,74° | 3,74 | 46,8 | 79,01 | 0,59 | 79,59 | 79,56 | + 0,03 |
| 11 4 | 20,74° | 3,74 | 46,1 | 79,00 | 0,61 | 79,51 | 79,56 | – 0,06 |
| 24 | 20,74° | 3,75 | 59,4 | 79,11 | 0,37 | 79,48 | 79,56 | – 0,09 |
| 48 | 20,74° | 3,76 | 79 | 79,29 | 0,21 | 79,50 | 79,56 | – 0,06 |
| 12 43,5 | 20,74° | 3,78 | 79 | 79,34 | 0,21 | 79,55 | 79,56 | – 0,01 |
| 4h 18m | 20,82° | 3,85 | 74 | 79.27 | 0,25 | 79,52 | 79,53 | – 0,01 |
| 5 1 | 20,80° | 3,86 | 81,7 | 79,31 | 0,21 | 79,51 | 79.54 | – 0,02 |
| 16,5 | 20,80° | 3,86 | 58,5 | 79,17 | 0,40 | 79,58 | 79,54 | + 0,04 |
| 32 | 20,80° | 3 87 | 46,5 | 79,97 | 0,64 | 79,61 | 79,54 | + 0,07 |
| 48 | 20,80° | 3,87 | 47,2 | 79,94 | 0,62 | 79,56 | 79,54 | + 0,02 |
| 6 6,5 | 20,80° | 3,88 | 60,0 | 79,11 | 0,39 | 79,50 | 79,54 | – 0,04 |
| 28 | 20,80° | 3,88 | 83,0 | 79,33 | 0,20 | 79,53 | 79,54 | – 0,01 |
| 7 17,5 | 20,78° | 3,88 | 84,4 | 79,27 | 0,20 | 79,47 | 79,55 | – 0,08 |

Die Uebereinstimmung der Einzelwerthe $K$ unter einander controlirt man am besten an der Hand der Col. 8. Dieselbe

enthält für die Beobachtungstemperaturen mit Hülfe der Mossotti-Clausius'schen Gleichung

$$d.(K+2)/(K-1) = D$$ [1]

berechnete Zahlen. Die Dichtigkeit des Wassers $d$ wurde der Tabelle von Marek[2]) entnommen. Aus dem angegebenen Mittelwerth von $K$ folgt dann die Constante der Formel $D = 1{,}0361887$

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung der Beobachtungen eine ganz ausserordentlich gute. Freilich ist auch die Temperatur sehr constant und ebenso änderte sich der Nullpunkt nur ganz ausserordentlich wenig. Nur selten kommen Abweichungen vor, welche $1^0/_{00}$ übersteigen. Die Rechnungen sind mit einer Ziffer mehr ausgeführt, als hier mitgetheilt.

Durch die gute Uebereinstimmung der Einzelbeobachtungen unter einander darf man sich jedoch nicht zu der Annahme verleiten lassen, dass der angegebene Mittelwerth von $K$ den Anspruch erheben könne, auch dem absoluten Werthe nach bis auf die letzte Stelle correct zu sein. Geringe Lagenänderungen der Electrometernadel werden immerhin durch das Eingiessen des Wassers erzeugt, wie aus kleinen Verlegungen des Nullpunktes zu ersehen ist. Also kann man nicht erwarten, dass Beobachtungen, die an verschiedenen Füllungen des Electrometers angestellt sind, unter einander so grosse Uebereinstimmung zeigen, wie die Einzelmessungen *einer* zusammenhängenden Reihe. So habe ich denn auch thatsächlich bei verschiedenen Füllungen des Electrometers Differenzen der absoluten Werthe von $K$ bis zu $5^0/_{00}$ in maximo erhalten.

Versuche an Wasser verschiedener Leitfähigkeit ($\lambda = 1{,}3 - 2{,}5 \times 10^{-10} Hg$) zeigten gar keine Unterschiede unter einander, ebensowenig Versuche mit verschieden hohen Hülfspotentialen (ca. 2—7 Volt. am Wasserelectrometer). Auch habe ich die Grenzen, zwischen denen $W_L$ interpolirt wurde, in der manigfaltigsten Weise abgeändert, ebenso die Reihenfolge der Einzelablesungen — doch letztere stets derart, dass

1) Literatur und Anwendbarkeit dieser Formel findet man ausführlich besprochen bei Lebedew, Wied. Ann. **44.** p. 304 ff. 1891, Vgl. auch Cohn, Berl. Ber. **50.** p. 1037. 1891.

2) Marek, Wied. Ann. **44.** p. 172. 1891.

die *Symmetrie* des Versuchsschemas (Tab. III) erhalten blieb. Dabei waren die beobachteten Zahlen stets mit Hülfe der Formel $d(K + 2)/(K-1) = D$ auf eine gemeinsame Temperatur reducirt. Eine lange Beobachtungsreihe, welche ein Temperaturintervall von $2,6^0$ umfasste, schloss sich dieser Formel sehr gut an, doch können weitere Versuche in ausgedehnten Temperaturgrenzen erst die Frage zur Entscheidung bringen, ob wirklich die Mossotti-Clausius'sche Theorie auch mit genaueren Messungen noch im Einklange bleibt. Dass mit den beschriebenen Apparaten und Methoden das von der Theorie verlangte Maximum von $K$ bis $4^0$ sich noch mit Sicherheit muss nachweisen lassen, wenn es überhaupt vorhanden ist, kann nach den bisher vorliegenden experimentellen Daten nicht zweifelhaft erscheinen.

Strassburg i. E., Physikalisches Institut, August 1892.

## IV. *Ueber das den Newton'schen Farbenringen analoge Phänomen beim Durchgang Hertz'scher electrischer Planwellen durch planparallele Metallplatten; von Ludwig Boltzmann.*

Aus den Sitzungsberichten der mathematisch-physikalischen Klasse der k. bayer. Akad. der Wiss. 1892. Bd. XXII. Heft I.

Von den Erscheinungen der Electricitätsbewegung wurden anfangs experimentell ausschliesslich die in Leitern vor sich gehenden geprüft; Maxwell musste die für die Electricitätsbewegung in Leitern gefundenen Gesetze (das Ohm'sche, das Neumann'sche Inductionsgesetz etc.) mit entsprechenden Modifikationen auf Nichtleiter übertragen, fast ohne sich dabei auf quantitative Experimente stützen zu können, die an letzteren angestellt worden wären; nur so gelang es ihm, seine allgemeine die Leiter und Nichtleiter umfassende Theorie der Electricitätsbewegung aufzubauen.

Um so auffallender muss es erscheinen, dass, während diese Theorie sich im Verhalten der Nichtleiter fast ausnahmslos bestätigt hat, dies für die Leiter nicht in gleichem Maasse gilt. Schon Maxwell fiel dies auf; in neuerer Zeit hat Hr. Cohn[1]) diesem Gegenstande eine besondere Abhandlung gewidmet. Er bespricht daselbst besonders die Lichtbewegung in Metallen und findet im Gegensatze zu Maxwell, dass sie weniger absorbirt wird als es die Theorie verlangt. Wie er jedoch selbst erwähnt, beweisen die Erscheinungen, der auswählenden Absorption, dass hier die discontinuirliche Molekularstructur der Materie von wesentlichem Einfluss ist. Da nun die electrischen Eigenschwingungen der Molecüle offenbar nothwendig ebenfalls Veranlassung zur Absorption geben, so wäre die Thatsache, dass letztere ohne deren Berücksichtigung zu klein herauskommt, von vorne herein zu erwarten.

1) Cohn, Wied. Ann. **45.** p. 55. 1892. Ueber Durchsichtigkeit der Metalle, vgl. Rathenau, Inauguraldissertation, Berlin 1889, Drude, Wied. Ann. **39.** 1890.

In neuester Zeit haben auch E. Wiedemann und Ebert[1]) und Hertz[2]) auf die unerwartet grosse Durchlässigkeit dünner Metallschichten für Kathodenstrahlen hingewiesen. Die beiden ersteren sagen bei dieser Gelegenheit: „Wir haben hier einen neuen Fall vor uns, welcher zeigt, dass die Maxwell'sche Theorie nicht ausreicht, die Erscheinungen zu erklären.“ Wahrscheinlich hat man es jedoch auch hier mit Schwingungen zu thun, deren Wellenlänge nicht mehr unendlich gross gegen die Moleculardimensionen ist und welche sich daher der Maxwell'schen Theorie von vorne herein entziehen, sodass deren Giltigkeit auf alle anderen Erscheinungen, für welche sie allein gemacht wurde, unangefochten bleibt.

Es folgt nun aus der Maxwell'schen Theorie, dass sehr rasche electrische Schwingungen, wenn sie sich längs eines Drahtes fortpflanzen, auf dessen Oberfläche beschränkt bleiben; ferner, dass Wellen, deren Fortpflanzungsrichtung nicht wie im eben angeführten Falle parallel, sondern senkrecht zur Metalloberfläche steht (wie dies bei Lichtschwingungen der Fall ist, die senkrecht in Metall eindringen) innerhalb einer Wellenlänge bereits ganz enorm geschwächt werden. Aus

---

1) E. Wiedemann und Ebert, Phys.-med. Soc. zu Erlangen 14. Dec. 1891. Die Vrf. beschreiben ihre Versuche folgendermaassen: „Kathodenstrahlen dringen durch dünne Metallschichten die für das Licht undurchsichtig sind. [In ein cylindrisches Glasrohr von 2,5 cm Weite ist axial eine Platindrahtkathode eingeschmolzen. Man benutzt sie eine Zeit lang als Kathode, die Wand bedeckt sich dann mit einer mehr oder weniger dicken Metallschicht, einige Stellen sind fast undurchsichtig, andere nicht. Geht die Entladung in solcher Weise durch, das an nicht von Metall bedeckten Stellen des Glases grünes Licht einfliesst, so ist dies auch an den mit Metall bedeckten der Fall. Die Unterschiede in der Durchsichtigkeit der Metallschicht bedingen Unterschiede in der Helligkeit des grünen Lichtes, die aber kleiner sind als erstere. Nicht nur bei Platin-, sondern auch bei Kupferdrähten zeigt sich dasselbe Phänomen.

Abgesehen von allen weiteren theoretischen Consequenzen lehrt die eben beschriebene Thatsache, dass die Crookes'sche Anschauung von der Fortschleuderung der sogenannten strahlenden Materie irrig sein muss, da solche nicht durch die Metallschichten hindurchgehen können.

Da die dünnsten Dielectrica für Kathodenstrahlen undurchlässig sind, Metalle aber durchlässig, so haben wir hier einen weiteren typischen Unterschied zwischen beiden.

2) Hertz, Wied. Ann. 45. p. 28. 1892.

dem letzteren Resultate folgt weiter, dass ächte Lichtschwingungen schon beim Durchwandern sehr dünner Metallschichten ausserordentlich an Intensität verlieren. Die Wellen aber, welche Hertz auch in freier Luft erzeugt hat, und deren Wellenlänge nach Decimetern zählt, müssten nach Maxwell's Theorie durch das blosse Durchwandern eines Metallschirmes von $^1/_{10}$ Millimeter, ja selbst einem Millimeter Dicke noch kaum erheblich geschwächt werden. Nun hat aber Hertz beobachtet, dass selbst weit dünnere Metallschichten für diese Wellen undurchlässig sind; die Ursache hiervon kann nach dem Obigen nicht in der Absorption in deren Innerem, sondern nur in den Grenzbedingungen beim Ueberschreiten ihrer Oberfläche liegen, was in der That durch Berechnung der Metallreflexion aus Maxwell's Formeln bestätigt wird.

Obwohl die betreffenden Rechnungen für Planwellen und planparallele Metallplatten ohne alle Schwierigkeit sind, da sie ja vollkommen analog denjenigen sind, welche in der Theorie des Newton'schen Farbenglases vorkommen, so scheint mir doch bei der Wichtigkeit des Gegenstandes eine ausführliche Mittheilung desselben angezeigt umsomehr als gerade über diese Vorgänge angestellte Experimente wichtige neue Aufschlüsse namentlich über die noch nicht einmal der Grössenordnung nach bekannten Werthe der Dielectricitätsconstanten der Metalle zu versprechen scheinen. Die allgemeinen Maxwell'schen Gleichungen, welche Metalle und Dielectrica umfassen, sind folgende:

(A) $$a = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \quad b = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \quad c = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}$$

(M. T. 591, A)[1])

(B') $$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}, \quad 4\pi v = \frac{d\alpha}{dz} - \frac{d\gamma}{dx}, \quad 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}$$

(M. T. 607, E), worin

(F) $$a = \mu\alpha, \quad b = \mu\beta, \quad c = \mu\gamma$$

(M. T. 616, im Text unmittelbar vor Gleichung 1, B. V. art. 116)

1) M. T. bedeutet Maxwell's treatise on electr. a. magn. second. edit. Die folgende Zahl bedeutet den Artikel, worauf die Nummer der Gleichung folgt. Vgl. auch: Boltzmann, Vorles. über Maxwell's Theorie art. 88, Barth 1891, was ich kurz als B. V. citiren will.

(C′) $$4\pi f = kP,\ 4\pi g = kQ,\ 4\pi h = kR,$$

(M. T. 608, F; denn die beiden dortigen Vectoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ haben die Componenten $P$, $Q$, $R$ und $f$, $g$, $h$; vgl. auch M. T. 790, 16; statt Maxwell's Buchstaben $K$ wurde $k$ geschrieben).

(D′) $$p = CP,\ q = CQ,\ r = CR$$

(M. T. 609, G. Diese Gleichungen heissen bei Maxwell $\mathfrak{K} = C\mathfrak{E}$; $p, q, r$ sind die Componenten von $\mathfrak{K}$; vgl. M. T. 611, I*)

(E) $$u = p + \frac{df}{dt},\ v = q + \frac{dg}{dt},\ w = r + \frac{dh}{dt}$$

(M. T. 610, H*)

(G) $$P = -\frac{dF}{dt} - \frac{d\Psi}{dx},\ Q = -\frac{dG}{dt} - \frac{d\Psi}{dy},\ R = -\frac{dH}{dt} - \frac{d\Psi}{dz}$$

(M. T. 598, B, worin

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0,$$

da das Medium ruht).

### §. 1. Einmalige Reflexion.

Wir betrachten zuerst den Fall, dass nur eine Trennungsfläche vorhanden ist, welche wir als eben voraussetzen und zur $yz$-Ebene wählen. Links von derselben auf der Seite der negativen Abscissen sei Luft, rechts ein Metall. Electrische Planwellen sollen vom negativ Unendlichen gegen die Trennungsfläche anrücken. Hier werden sie theils reflectirt, theils dringen sie ins Metall ein; in letzterem existiren also nur Wellen, die in der Richtung der positiven Abscissen fortschreiten. Die Abscissenaxe ist die Fortpflanzungsrichtung, sodass alles nur Function von $x$ und $t$ ist. Die electrischen Verschiebungen sollen in der Richtung der $y$-Axe geschehen. Wir haben also für negative $x$: $f = P = h = R = 0$.

(1) $$\begin{cases} g = A\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + B\cos\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + \\ + C\sin\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) + D\cos\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) = \frac{k}{4\pi}Q. \end{cases}$$

Hier stellen die Glieder der ersten Zeile die directe, die der zweiten die reflectirte Welle dar. An Stelle von $\sqrt{\mu k}$ sollte

vorläufig eine später zu bestimmende Constante stehen. Wir schreiben jedoch schon jetzt diesen später sich ergebenden Werth (M. T. 784, 10; B. V., art. 95, Gl. 87). Aus C' und G) folgt $H = T_1$.

$$(2) \quad \begin{cases} G = \frac{2\tau}{k}\Big[A\cos\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) - B\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) \\ + C\cos\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) - D\sin\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k})\Big] + T_2, \end{cases}$$

wobei $T_1$ und $T_2$ kein $x$ enthalten. Nach A folgt weiter $a = \alpha = b = \beta = 0$

$$(3) \quad \begin{cases} c = \mu\gamma = 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\Big[A\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) \\ + B\cos\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) - C\sin\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) \\ - D\sin\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k})\Big] \end{cases}$$

Bilden wir $dc/dx$ und $dg/dt$, so sehen wir, dass auch die Gleichungen $B$ und $E$ erfüllt sind, dass also für die Constante, die eigentlich statt $\sqrt{\mu k}$ hätte gesetzt werden sollen, der richtige Werth gewählt wurde.

Die Werthe unserer Grössen rechts von der $yz$-Ebene sollen mit dem Index 1 versehen werden. $C_1$ und vorläufig auch $k_1$ sollen dort von Null verschieden sein, sodass die allgemeinen Gleichungen A bis G gelten. Wir haben dort nur die durchgehende in der positiven $x$-Richtung fortschreitende, keine reflectirte Welle und können den Zeitanfang so wählen, dass auch das Glied verschwindet, welches die Zeit unter dem Cosinuszeichen enthält. Dann würden die für positive Abscissen geltenden Gleichungen erfüllt durch $f_1 = P_1 = h_1 = R_1 = 0$

$$(4) \qquad q_1 = \frac{4\pi C_1}{k_1} g_1 = e^{-\xi x} E \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right) \text{[1]}$$

wobei

1) Vgl. B. V. art. 96, p. 101. Nach C' und D' können sich $f$, $g$, $h$ von $p$, $q$, respective $r$ nur durch constante Factoren unterscheiden.

$$
(5)\quad\left\{\begin{aligned}
&\xi^2 = -\frac{2\pi^2 k_1 \mu_1}{\tau^2} + \sqrt{\frac{4\pi^4 k^2_1 \mu^2_1}{\tau^4} + \frac{16\pi^4 C^2_1 \mu^2_1}{\tau^2}}\\
&\eta = \frac{4\pi^2 \mu_1 C_1}{\tau\xi}, \quad \eta^2 = \frac{2\pi^2 k_1 \mu_1}{\tau^2} + \sqrt{\frac{4\pi^4 k^2_1 \mu_1}{\tau^4} + \frac{16\pi^4 C^2_1 \mu^2_1}{\tau^2}}
\end{aligned}\right.
$$

wobei der Quadratwurzel der positive Werth beizulegen ist und auch für $\xi$ und $\eta$ deren positive Werthe zu setzen sind. Aus D′ und G folgt wieder $H_1 = T_3$,

$$
(6)\qquad G_1 = \frac{\tau E}{2\pi C_1} e^{-\xi x} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right) + T_4
$$

und aus A folgt $a_1 = \alpha_1 = b_1 = \beta_1 = 0$

$$
(7)\quad\left\{\begin{aligned}
c_1 = \mu_1 \gamma_1 = \frac{\tau E}{2\pi C_1} e^{-\xi x}\Big[&\eta \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right)\\
&- \xi \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \eta x\right)\Big].
\end{aligned}\right.
$$

Durch Bildung von $d\gamma_1 / dx$ und $dg_1 / dt$ können wieder die Gleichungen B′ und E noch verificirt werden.

Es handelt sich noch um die Grenzbedingungen für die Trennungsfläche. Obwohl dieselben schon von **Maxwell** aufgestellt wurden, wollen wir sie doch lieber nach einer oft (von **Helmholtz**, **Hertz** etc.) verwendeten Methode aus den Gleichungen A bis G entwickeln. Wir betrachten sogleich den allgemeinsten Fall, dass rechts und links von der Trennungsfläche, welche wir zur $yz$-Ebene wählen, ein ganz beliebiges Medium vorhanden ist. Rechts wenden wir den Index 1 an. Substituiren wir statt der Trennungsfläche eine Schicht continuirlichen Ueberganges von der Dicke $\delta$, so sind darin die Differentialquotienten nach $x$ im Allgemeinen unendlich wie $1 : \delta$, die nach $y$ und $z$ aber sind endlich, sodass letztere, sowie die ebenfalls überall endlichen Grössen $a$, $b$, $c$, $u \ldots$, mit $dx$ multiplicirt und von Null bis $\delta$ integrirt, Verschwindendes liefern. Es liefern daher die Gleichungen A mit $dx$ multiplicirt und von Null bis $\delta$ integrirt:

$$
G = G_1, \qquad H = H_1.
$$

Da $\psi$ das Potential der freien Electricität ist, so haben seine Differentialquotienten in Richtungen, die tangential zur Trennungsfläche stehen, zu beiden Seiten derselben den gleichen Werth. In dem von uns betrachteten Falle müssen übrigens

die Glieder $d\Psi/dy$ und $d\Psi/dz$ überhaupt verschwinden, da alles nur Function von $x$ und $t$ ist. Wir erhalten also aus G, C′ und D′

$$\text{(H)} \quad \begin{cases} Q = Q_1 = \frac{4\pi}{k} g = \frac{q}{C} = \frac{4\pi}{k_1} g_1 = \frac{q_1}{C_1} \\ R = R_1 = \frac{4\pi}{k} h = \frac{r}{C} = \frac{4\pi}{k_1} r_1 = \frac{r_1}{C_1} \end{cases}$$

Multipliciren wir ebenso die Gleichungen B′ mit $dx$ und integriren von Null bis $\delta$ so folgt:

$$\text{(G)} \qquad \beta = \beta_1 = \frac{b}{\mu} = \frac{b_1}{\mu_1}, \quad \gamma = \gamma_1 = \frac{c}{\mu} = \frac{c_1}{\mu_1}.$$

In unserem speciellen Falle erhalten wir für $t = 0$:

$$\text{(8)} \quad \begin{cases} g = (A + C)\sin\frac{2\pi t}{\tau} + (B + D)\cos\frac{2\pi t}{\tau} \\ c = \mu\gamma = 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\left[(A - C)\sin\frac{2\pi t}{\tau} + (B - D)\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right] \\ q_1 = E\sin\frac{2\pi t}{\tau}, \quad c_1 = \mu_1\gamma_1 = \frac{\tau E}{2\pi C_1}\left[\eta\sin\frac{2\pi t}{\tau} - \xi\cos\frac{2\pi t}{\tau}\right]. \end{cases}$$

Die Gleichungen H liefern also: $D = -B$, $A + C = Ek/(4\pi C_1)$; nimmt man dazu die Gleichungen G, so folgt:

$$\text{(9)} \quad \begin{cases} A = \left(\frac{k}{8\pi C_1} + \frac{\tau\eta\sqrt{\mu k}}{16\pi\mu_1 C_1}\right)E \\ C = \left(\frac{k}{8\pi C_1} + \frac{\tau\eta\sqrt{\mu k}}{16\pi^2\mu_1 C_1}\right)E \\ D = -B = \frac{\tau\xi\sqrt{\mu k}}{16\pi^2\mu_1 C_1} E \end{cases}$$

Man setzt gewöhnlich voraus, dass in Leitern die dielectrische Polarisation gering ist, also $k$ verschwindet. Experimentell dürfte dies freilich kaum feststehen, da auf electrostatische Phänomene, stationäre Strömung und die Integralinductionsströme der Werth von $k$ bei genügend guter Leitung ohne Einfluss ist. Sei das Medium rechts ein derartiger Leiter, also $k_1 = 0$, dann wird

$$\xi = \eta = 2\pi\sqrt{\frac{\mu_1 C_1}{\tau}}$$

daher

$$A = \frac{E}{8\pi}\left(\frac{k}{C_1} + \sqrt{\frac{\mu k \tau}{\mu_1 C_1}}\right), \quad C = \frac{E}{8\pi}\left(\frac{k}{C_1} - \sqrt{\frac{\mu k \tau}{\mu_1 C_1}}\right),$$

$$D = -B = \frac{E}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu k \tau}{\mu_1 C_1}}.$$

Der Unterschied der leb. Kraft der directen und reflectirten Welle getheilt durch die erstere leb. Kraft ist

$$(10) \qquad Q = \frac{A^2 - C^2}{A^2 + B^2} = \frac{4\sqrt{\mu \mu_1}\, k\, C_1 \tau}{(\sqrt{\mu_1}\, k + \sqrt{\mu\, C_1 \tau})^2 + \mu\, C_1 \tau}$$

Für alle Körper ausser Eisen, Nickel, Kohalt kann $\mu = \mu_1$ gesetzt werden. Wenden wir elektostatisches Maass an, so ist für Luft $k = 1$. Die Siemenseinheit $S$ ist 0,94 Ohm = $0{,}94.10^9$ cm / sec. Bezeichnet $C_{mq}$ die Leitungsfähigkeit des Quecksilbers im magnetischen Maasse, so ist $S = 10^4 / C_{mq}$ cm daher

$$(11) \qquad C_{mq} = 1{,}062.10^{-5} \frac{\text{sec}}{\text{cm}^2}$$

Behufs Verwandlung in electrostatisches Maass haben wir mit $V^2 = (3.10^{10} \text{ cm sec}^{-1})^2$, behufs Uebergang zu einem anderen Metalle mit $L$ zu multipliciren, wobei $L$ angibt, wievielmal das andere Metall besser leitet, als das Quecksilber. Es ist also für ein beliebiges Metall in electrostatischem Masse etwa

$$C_1 = 9{,}56 \,.\, 10^{15}\, L \sec^{-1}.$$

Bei den von Hertz in Luft erzeugten Wellen geschahen in der Sekunde etwa 500 Millionen Schwingungen (die Schwingung zu einem ganz Hin- und Rückgange inclusive gerechnet), was liefert

$$C_1 \tau = 2 \,.\, 10^7\, L.$$

Setzt man für Kupfer $L = 60$, so folgt $Q$ für dieses Metall gleich 1 / 17000; für Platin resp. Quecksilber würde $Q$ etwa drei-resp. achtmalsogross. Es überschreitet also da überhaupt nur ein verschwindender Bruchtheil der lebendigen Kraft der Welle die Trennungsfläche; die Welle wird fast total reflectirt. Diess gilt in erhöhtem Maasse von noch langsameren Schwingungen.

Dagegen dringt der kleine eintretende Bruchtheil ziemlich tief ein, pflanzt sich aber enorm langsam fort. Bezeichnen wir ein für allemal mit $a$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, mit $\lambda$ die Wellenlänge im Metalle, so ist

$$a = 2\pi : \eta\tau = 1 : \sqrt{\mu_1 C_1 \tau}, \lambda = a\tau = \sqrt{\tau : \mu_1 C_1},$$

wobei, damit $\mu_1 = 1$ sei, jetzt $C_1$ magnetisch zu messen ist. Die Absorption ist ein für allemal dadurch bestimmt, dass sich die Amplitüde in einer halben Welle auf den $e^{\pi}$ also etwa 23. Theil, die Intensität auf den 529. Theil reducirt. Für die besprochenen Hertz'schen Schwingungen wäre für Kupfer, Platin resp. Quecksilber etwa

$$a = 10^6,\ 3.10^6,\ 7.10^6 \text{ cm sec}^{-1},$$

$$\lambda = \frac{1 \text{ cm}}{500},\ \frac{1 \text{ cm}}{170},\ \frac{1 \text{ cm}}{70}.$$

In der Hälfte dieser Strecke reducirt sich die Intensität auf den 529. Theil. Die Länge der Strecke gleicher Intensitätsabnahme wächst für noch langsamere Schwingungen der Quadratwurzel aus der Schwingungsdauer proportional.

Im Natriumlichte geschehen etwa 500 Billionen Schwingungen in der Secunde, da folgt also $C_1 \tau = 20 L$,

$$Q = \frac{1}{18},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3}$$

$$a = \frac{3.10^{10} \text{cm}}{\sec \sqrt{20 L}} = 10^9,\ 3.10^9,\ 7.10^9 \text{cm}$$

$$\lambda = \frac{10^{-4} \text{ cm}}{7\sqrt{L}} = \frac{1 \text{ cm}}{500\,000},\ \frac{1 \text{ cm}}{170\,000},\ \frac{1 \text{ cm}}{70\,000}.$$

Im Platin dringt also der zwölfte Theil der einfallenden Intensität ein und diese reducirt sich nach Durchwanderung des 30000. Theil eines Millimeters wieder etwa auf den 500. Theil. Für die Dämpfungsconstante folgt $\xi = 470\,000 \sqrt{L}$. $\xi$ ist gleich Cohn's $p$, Rathenau's $k_0 : 2$; die Grösse, welche Rathenau mit $2k$, Drude mit $\varkappa$ bezeichnet, ist unsere $\xi : \eta$, müsste also bei verschwindender Dielectricitätsconstante für alle Metalle $= 1$ sein. Die angenäherte Uebereinstimmung der Werthe Rathenau's ist eine scheinbare, da er bei der Berechnung die Wellenlänge in Luft zu Grunde legt. Wie schon erwähnt, ist allgemeine Anwendbarkeit dieser Formeln in der Optik ebensowenig zu erwarten, als dass für alle durchsichtigen Körper die Dielectricitätsconstante das Quadrat des Brechungsexponenten ist.

Der Ausdruck (10) für $Q$ hat seinen Maximalwerth $2(\sqrt{2} - 1) = 0.828$ für $\tau = \mu_1 k : 2\mu C_1$, also für Kupfer, Platin und

Quecksilber für etwa 120 000, 120 000 und 20 000 Billionen Schwingungen in der Secunde. Alsdann sind Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge im Metalle $\sqrt{2}$ mal so gross als auf der anderen Seite der Trennungsfläche in Luft.

Für noch raschere Schwingungen nimmt $Q$ wieder und zwar bis ins Unendliche ab. Doch ist zu bemerken 1. dass in den zuletzt betrachteten Fällen die Wellenlänge von molekülarer Kleinheit ist, dieselben also ausserhalb des Gültigkeitsbereichs unserer Formeln liegen. 2. dass die Resultate wesentlich modificirt werden können, wenn die Dielectricitätsconstante $k_1$ des Metalles einen erheblichen Werth hat und es böten Experimente über rasche electrische Schwingungen in Metallen wohl das einzige Mittel, über die Dielectricitätsconstante der Metalle etwas zu erfahren. 3. dass man mit der Erfahrung vergleichbare Resultate erst erhalten kann, wenn man auch den Wiederaustritt der electrischen Schwingungen aus dem Metalle in Luft betrachtet. Zum 2. Punkte bemerken wir folgendes:

Setzt man $k_1$ von Null verschieden und zur Abkürzung

$$\frac{\mu k_1}{\mu_1 k} = u, \ 2\frac{C_1 \mu \tau}{k \mu_1} = v$$

so wird:

$$Q = \frac{A^2 - C^2}{A^2 + B^2} = \frac{2\sqrt{2u + 2\sqrt{u^2 + v^2}}}{1 + \sqrt{2u + 2\sqrt{u^2 + v^2}} + \sqrt{u^2 + v^2}}$$

Bei den früher betrachteten Hertz'schen Schwingungen war $\mu = \mu_1$, $k = 1$, $C_1 \tau = v : 2 = 2{,}10^7 L$. Wenn also selbst die Dielectricitätsconstante des Metalls eine millionmal grösser als die der Luft wäre, so würden die für diesen Fall gefundenen Resultate kaum alterirt. Dagegen würde im Falle des Natriumlichts die Dielectricitätsconstante des Matalls schon einen kleinen Einfluss bekommen, wenn sie der der Luft gleich wäre. Der Verlauf noch viel rascherer Schwingung würde dann gänzlich verändert.

Die Gleichungen (5) zeigen, dass mit wachsendem $k_1$ sowohl die Dämpfungsconstante $\xi$ als auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $2\pi : \eta\tau$ nur abnehmen kann. Habe $\xi$, wenn alles sonst unverändert bleibt, nur $k_1 = 0$ ist, den Werth $\xi_0$, so hat man nämlich $\xi_0{}^4 = \xi^4 + 4\pi^2 k_1 \mu_1 \xi^2 : \tau_2$.

Wenn entgegen dem zuerst betrachteten Falle das $k_1$ enthaltende Glied gross gegen das $C_1$ enthaltende ist, so wird:

$$\xi = 2\pi C_1 \sqrt{\frac{\mu_1}{k_1}}, \quad \frac{2\pi}{\eta\tau} = \frac{1}{\sqrt{k_1 \mu_1}}, \quad Q = \frac{4\sqrt{\mu\mu_1 k k_1}}{(\sqrt{\mu k_1} + \sqrt{\mu_1 k})^2}.$$

$$A = \left(\frac{k}{k_1} + \sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}}\right)\frac{E k_1}{8\pi C_1}, \quad C = \left(\frac{k}{k_1} - \sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}}\right)\frac{E k}{8\pi C_1}$$

$$B = -D = \frac{\tau E}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu k}{\mu_1 k_1}}.$$

Nun schreiten wir zur Erledigung des 3. Punktes.

### § 2. Betrachtung einer planparallelen Metallplatte.

Seien die Ebenen $x = -p$ und $x = 0$ die beiden Begrenzungsflächen einer Metallplatte. Die im Innern der Metallplatte gültigen Werthe sollen den Index 1 erhalten. Links auf Seite der negativen Abscissen (wofür kein Index angewendet wird und rechts von der Metallplatte (Index 2 für die variabeln Grössen) sei dasselbe Dielectricum Luft. Von links sollen Planwellen anrücken, welche an beiden Metalloberflächen reflectirt werden. Rechts von der $yz$-Ebene ist dann keine reflectirte, nur die durchgedrungene Welle vorhanden. Die übrigen Verhältnisse sollen wie im vorigen Paragraph sein. Dann ist also für $-\infty < k < -p$:

$$g = A \sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + B\cos\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k})$$
$$+ C\sin\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) + D\cos\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}).$$

$$c = 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}\Big[A\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}) + B\cos\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k})$$
$$- C\sin\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k}) - D\cos\frac{2\pi}{\tau}(t + x\sqrt{\mu k})\Big].$$

Für $-p < x < 0$

$$q_1 = e^{-\xi x}\left[E\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right) + F\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right)\right]$$
$$+ e^{\xi x}\left[G\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right) + H\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right)\right]$$

$$G_1 = \frac{\tau}{2\pi C_1}\left\{e^{-\xi x}\left[E\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right) - F\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right)\right]\right.$$
$$\left. + e^{\xi x}\left[G\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right) - H\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right)\right]\right\},$$
$$c_1 = \frac{\tau}{2\pi C_1}\left\{e^{-\xi x}\left[(E\eta + F\xi)\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right)\right.\right.$$
$$\left. + (-E\xi + F\eta)\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \eta x\right)\right]$$
$$+ e^{\xi x}\left[(-G\eta - H\xi)\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right)\right.$$
$$\left.\left. + (G\xi - H\eta)\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \eta x\right)\right]\right\}.$$

Endlich für $x > 0$ haben wir nur die durchgehende in der positiven $x$-Richtung fortschreitende Welle und können den Zeitanfang so wählen, dass das Glied, welches die Zeit unter dem Cosinuszeichen enthält, verschwindet. Dann wird also für $x > 0$

$$g_2 = J\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}),\ c_2 = 4\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}}J\sin\frac{2\pi}{\tau}(t - x\sqrt{\mu k}).$$

Die Bedingungsgleichungen für $x = 0$ lauten:

$$\frac{g_1}{C_1} = \frac{4\pi g_2}{k},\quad \frac{c_1}{\mu_1} = \frac{c_2}{\mu},$$

was liefert:

$$H = -F,\ G = E - 2\frac{\eta F}{\xi},\ E - \frac{\eta}{\xi}F = \frac{2\pi C_1 J}{k}$$
$$F = -H = \frac{4\pi^2\mu_1 C\xi J}{(\xi^2+\eta^2)\tau\sqrt{\mu k}},\ E = \frac{2\pi C_1 J}{k} + \frac{4\pi^2\mu_1 C_1\eta J}{(\xi^2+\eta^2)\tau\sqrt{\mu k}}$$
$$G = \frac{2\pi C_1 J}{k} - \frac{4\pi^2\mu_1 C_1\eta J}{(\xi^2+\eta^2)\tau\sqrt{\mu k}}.$$

Setzen wir

$$\cos\frac{2\pi p}{\tau}\sqrt{\mu k} = a,\ \sin\frac{2\pi p}{\tau}\sqrt{\mu k} = \alpha, \cos p\eta = b,\ \sin p\eta = \beta,$$
$$e^{\xi p} = \gamma,$$

so liefern die Bedingungsgleichungen für $x = -p$:

$$Aa - B\alpha + Ca + D\alpha = \frac{k}{4\pi C_1}\left(Eb\gamma - F\beta\gamma + \frac{Gb}{\gamma} + \frac{H\beta}{\gamma}\right)$$
$$A\alpha + Ba - C\alpha + Da = \frac{k}{4\pi C_1}\left(E\beta\gamma + Fb\gamma - \frac{G\beta}{\gamma} + \frac{Hb}{\gamma}\right)$$

$$A a - B \alpha - C \alpha - D a = \frac{\tau \sqrt{\mu k}}{8 \pi \mu_1 C_1} \Big[ E \gamma (b \eta + \beta \xi)$$

$$+ F \gamma (b \xi - \beta \eta) + \frac{G}{\gamma} (- b \eta + \beta \xi) - \frac{H}{\gamma} (b \xi + \beta \eta) \Big]$$

$$A \alpha + B a + C \alpha - D a = \frac{\tau \sqrt{\mu k}}{8 \pi^2 \mu_1 C_1} \Big[ E \gamma (- b \xi + \beta \eta)$$

$$+ F \gamma (b \eta + \beta \xi) + \frac{G}{\gamma} (b \xi + \beta \eta) + \frac{H}{\gamma} (- b \eta + \beta \xi \Big] .$$

Wir wollen $J = 1$ setzen, wodurch nur sämmtliche Amplituden mit einem constanten Factor multiplicirt werden; ferner setzen wir zur Abkürzung

$$2 \delta = \gamma + \frac{1}{\gamma} = e^{p \xi} + e^{-p \xi}, \quad 2 \varepsilon = \gamma - \frac{1}{\gamma} = e^{p \xi} - e^{p \xi},$$

dann wird:

$$A a - B \alpha + C a + D \alpha = b \delta + \frac{b \varepsilon \eta - \beta \delta \xi}{\xi^2 + \eta^2} . \frac{2 \pi \mu_1}{\tau} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$A \alpha + B a - C \alpha + D a = \beta \varepsilon + \frac{b \varepsilon \xi + \beta \delta \eta}{\xi^2 + \eta^2} . \frac{2 \pi \mu}{\tau} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

$$A a - B \alpha - C a - D \alpha = b \delta + (b \varepsilon \eta + \beta \delta \xi) , \frac{\tau}{2 \pi \mu_1} \sqrt{\frac{\mu}{k}}$$

$$A \alpha + B a + C \alpha - D a = \beta \varepsilon + (- b \varepsilon \xi + \beta \delta \eta) . \frac{\tau}{2 \pi \mu_1} \sqrt{\frac{w}{k}}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach: 1. mit $a$, $\alpha$, $a$, $\alpha$; 2. mit $-\alpha$, $a$, $-\alpha$, $a$; 3. mit $a$, $-\alpha$, $-a$, $\alpha$; 4. mit $\alpha$, $a$, $-\alpha$, $-a$ und setzt noch zur Abkürzung:

$$\varkappa = \frac{\tau}{4 \pi \mu_1} \sqrt{\frac{\mu}{k}} + \frac{\pi \mu_1}{\tau (\xi^2 + \eta^2)} \sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

$$\lambda = \frac{\tau}{4 \pi \mu_1} \sqrt{\frac{\mu}{k}} - \frac{\pi \mu_1}{\tau (\xi^2 + \eta^2)} \sqrt{\frac{k}{\mu}},$$

so erhält man

$$A = a b \delta + \alpha \beta \varepsilon + (a b \varepsilon + \alpha \beta \delta) \eta \varkappa + (a \beta \delta - \alpha b \varepsilon) \xi \lambda$$

$$B = a \beta \varepsilon - \alpha b \delta + (a \beta \delta - \alpha b \varepsilon) \eta \varkappa - (a b \varepsilon + \alpha \beta \delta) \xi \lambda$$

$$C = (\alpha \beta \delta - a b \varepsilon) \eta \lambda - (a \beta \delta + \alpha b \varepsilon) \xi \varkappa$$

$$D = - (a \beta \delta + \alpha b \varepsilon) \eta \lambda + (a b \varepsilon - \alpha \beta \delta) \xi \varkappa$$

$$A^2 + B^2 = (b^2 \varepsilon^2 + \beta^2 \delta^2) (\eta^2 \varkappa^2 + \xi^2 \lambda^2) + 2 \delta \varepsilon \eta \varkappa$$

$$+ 2 b \beta (\delta^2 - \varepsilon^2) \xi \lambda + b^2 \delta^2 + \beta^2 \varepsilon^2$$

$$C^2 + D^2 = (b^2 \varepsilon^2 + \beta^2 \delta^2) (\eta^2 \lambda^2 + \xi^2 \varkappa^2) .$$

Sobald die Metallplatte sehr dünn, also $p$ sehr klein ist, wird

$$a = b = \delta = 1, \ \alpha = \beta = \varepsilon = 0,$$

daher

$$A = 1, \ B = C = D = 0,$$

es werden also die Wellen durchgelassen, als ob die Metallplatte nicht vorhanden wäre Fall (1). Ein anderer extremer Fall (2) tritt ein, wenn $\xi\lambda$ und $\eta\varkappa$ (wenigstens eine dieser beiden Grössen) sehr gross ist. Dann verschwindet das erste Glied im Ausdruck für $A$ sowie in dem für $B$ und man hat $A^2 + B^2 = C^2 + D^2$. Alle Bewegung wird reflectirt.

Man kann die Frage aufwerfen, wie dünn in diesem letzten Falle bei gegebener Schwingungsdauer die Metallplatte sein müsse, damit der Uebergang in das zuerst genannte Extrem eintrete.

Wir wollen da wieder bloss den Fall betrachten, dass die dielektrischen Eigenschaften der Metallschicht nicht in Betracht kommen, also $k_1$ verschwindet. Dann wird, wie wir sahen:

$$\xi = \eta = 2\pi \sqrt{\frac{\mu_1 C_1}{\tau}}.$$

Wir setzen ferner $\mu = \mu_1$ und erhalten:

$$\varkappa\eta = \varkappa\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1\tau}{k}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{C_1\tau}},$$

$$\lambda\xi = \lambda\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C_1\tau}{k}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{k}{C_1\tau}}.$$

Dieser Ausdruck wird sehr gross, wenn:

$$\sqrt{\frac{C_1\tau}{k}}$$

sehr gross oder sehr klein ist. Im ersteren Fall, der, wie aus den numerischen Beispielen des vorigen Paragraphen ersichtlich ist, bei den Hertz'schen Schingungen eintritt, wird $\varkappa\xi = \lambda\xi$.

Da

$$\frac{\operatorname{arc}\cos b}{\operatorname{arc}\cos a} = \sqrt{\frac{C_1\tau}{k}},$$

so wird in diesem Falle auch dieses Verhältniss sehr gross, und daher $\alpha$ noch viel kleiner, als $\beta$ sein, dessen Kleinheit die Grösse von $\eta\varkappa$ und $\xi\lambda$ zu compensiren hat. $a$ und $b$ können gleich eins gesetzt werden. Wir verbinden hiermit

den Fäll (1), dass fast alles Licht durchgeht, wenn $p$ so klein ist dass

$$\varepsilon = p\xi = 2\pi p\sqrt{\frac{C_1\mu}{\tau}}$$

klein gegen 1, $\delta = 1$ wird.

Setzt man dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der electrischen Wellen im Medium zu beiden Seiten der Metallschicht (Luft):

$$\frac{1}{\sqrt{\mu k}} = V,$$

so ist:

$$A = 1 + 2\pi p\frac{C_1}{kV}, \quad C = -2\pi p\frac{C_1}{kV}, \quad B = D = 0.$$

Wenn $p\xi$ gross ist, also nur wenig Licht hindurchgeht, so wird:

$$A^2 + B^2 = \frac{1}{2} e^{2p\xi}(\xi^2 x^2 + \xi x), \quad C^2 + D^2 = \frac{\xi^2 x^2}{2} e^{2p}.$$

Numerische Berechnungen nach dieser Formel, ähnlich wie wir sie an die Formel des vorigen Paragraphen geknüpft haben, stossen natürlich nicht auf die mindeste Schwierigkeit. Eine experimentelle Prüfung der Durchlässigkeit äusserst dünner Schichten aus schlecht leitenden Metallen oder anderen Leitern für Licht und elektrische Schwingungen könnten vielleich Aufschlüsse über deren Dielectricitätsconstante liefern.

Auch die Berechnung des entgegengesetzten Falles, dass die Schwingungen so rasch geschehen, dass $C_1\tau / k$ sehr klein ist (Kathodenstrahlen?), hat keine Schwierigkeit, doch gehe ich darauf nicht weiter ein, da diese Phänomene wohl durch den specifischen Einfluss der Resonanz der einzelnen Molecüle zu sehr gestört werden dürften.

## V. *Ueber ein Medium, dessen mechanische Eigenschaften auf die von Maxwell für den Electromagnetismus aufgestellten Gleichungen führen; von L. Boltzmann.*

(Aus den Sitzungsberichten der mathemathisch-physikalischen Klasse der k. bayer. Akad. der Wissensch.)

---

### I. Theil.

Wir denken uns einen feinen, mit Masse und Trägheit (aber nicht mit Gewicht) begabten Stoff und nennen denselben der Kürze halber den Aether. Er soll alle Körper und auch das sogenannte Vacuum durchdringen. Ob die Eigenschaften, welche wir demselben beilegen werden, durch eine Molecularstructur verwirklicht werden können, lassen wir dahingestellt und denken uns den Aether vorläufig als Continuum, ganz in demselben Sinne, wie Kirchhoff in den Kapiteln über Elasticitätslehre und Hydromechanik seiner Vorlesungen über mathematische Physik die ponderable Materie auffasst. Wir setzen überall Isotropie voraus, schliessen also Krystalle vorläufig aus. Wo nicht gerade electromotorische Kräfte thätig sind, soll der Aether nach denselben Gesetzen wie eine incompressible Flüssigkeit strömen; zu den Kräften, welche in einer solchen wirksam sind, soll aber noch zweierlei hinzukommen:

1. Soll er an jeder Stelle (vielleicht durch die daselbst befindliche ponderable Materie, aber auch im sogenannten Vacuum) einen Widerstand erfahren, welcher der Geschwindigkeit an dieser Stelle proportional und entgegengesetzt gerichtet ist. Die hierdurch verrichtete Arbeit soll in (Joule'sche) Wärme verwandelt werden.

2. Soll an jeder Stelle ein Drehmoment auf das daselbst befindliche Volumenelement des Aethers wirken, welches der gesammten Verdrehung desselben proportional und entgegengesetzt gerichtet ist. Ich schliesse mich hierin vollkommen den Ideen Thomsons[1]) an; der Begriff der Drehung eines

1) Sir W. Thomson, Math. and phys. papers 3. art. 99.

Volumenelementes ist dabei in dem von Stokes und Helmholtz gebrauchten Sinne zu verstehen.[1])

Wir setzen zunächst voraus, dass die ponderable Materie ruhe und bezeichnen mit $F$, $G$, $H$ die Verschiebungen, mit $\varphi$, $\chi$, $\psi$ die Geschwindigkeitscomponenten irgend eines Aethertheilchens mit den Coordinaten $x$, $y$, $z$ zur Zeit $t$ in den Coordinatenrichtungen. Dann sind:

$$(1)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{dH}{dy} - \dfrac{dG}{dz} \\ b = \dfrac{dF}{dz} - \dfrac{dH}{dx} \\ c = \dfrac{dG}{dx} - \dfrac{dF}{dy} \end{cases}$$

die doppelten Drehungen eines daselbst befindlichen Volumenelementes des Aethers. Gemäss unserer Annahme wirken daher auf das Volumenelement die Drehmomente

$$\frac{a\,d\tau}{2\pi\mu};\quad \frac{b\,d\tau}{2\pi\mu};\quad \frac{c\,d\tau}{2\pi\mu}$$

um die Coordinatenaxen, deren Arbeit während der Zeit $dt$ gleich:

$$\left(\frac{a}{4\pi\mu}\cdot\frac{da}{dt} + \frac{b}{4\pi\mu}\cdot\frac{db}{dt} + \frac{c}{4\pi\mu}\cdot\frac{dc}{dt}\right) dt\,d\tau$$

ist. $\mu$ ist eine innerhalb eines homogenen isotropen Körpers constante Grösse. Wählen wir eine Zeit, wo noch keine electrischen oder magnetischen Störungen vorhanden wären, das Feld sich also vollkommen im Normalzustande befand, zum Zeitanfange, so ist die vom Zeitanfange bis zur Zeit $t$ von den Drehmomenten im Volumenelemente $d\tau$ geleistete Arbeit:

$$(2)\qquad \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8\pi\mu}\,d\tau.$$

Hierbei sind freilich die Coordinaten $x$, $y$, $z$ des Aethertheilchens als variabel aufzufassen; wollte man darunter fixe

1) Stokes, On the Theories of the internal friction of fluids in motion etc., Trans. Cambr. Phil. soc. April 1845; Helmholtz, Ueber die Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche Wirbelbewegungen entsprechen. Crelle's Journ. 55; Kirchhoff, Zehnte Vorlesung über Mechanik. Teubner 1883.

Coordinaten verstehen, so könnte man unter $\varphi$, $\chi$, $\psi$ die Componenten der daselbst zu irgend einer Zeit $t$ herrschenden Geschwindigkeit des Aethers in den Richtungen der Coordinatenaxen verstehen, sodass man hätte:

$$(3) \qquad F = \int_0^t \varphi\, dt, \qquad G = \int_0^t \chi\, dt, \qquad H = \int_0^t \psi\, dt.$$

Die Drehung, welche das im Punkt $x, y, z$ befindliche Volumenelement $d\tau$ während der Zeit $dt$ um die $x$-Axe erfährt, wäre dann gleich:

$$\frac{dt}{2}\left(\frac{d\psi}{dy} - \frac{d\chi}{dx}\right)$$

und $a$ wäre die doppelte Summe der Drehungen, welche alle durch den Punkt $x, y, z$ von der Zeit Null bis $t$ hindurchgegangenen Volumenelemente im Momente des Durchganges um die $x$-Axe erfuhren. Analoge Bedeutung hätten $b$ und $c$ bezüglich der $y$- und $z$-Axe.

Beide Auffassungen führen weder bei der stationären Aetherbewegung (Electrostatik, Electrodynamik und Induction stationärer und angenähert stationärer electrischer Ströme, Magnetismus), noch bei sehr kleinen Schwingungen (Licht) zu verschiedenen Gleichungen. Andere Phänomene wurden aber bisher kaum quantitativ mit den Gleichungen verglichen.

Bezeichnen wir ferner die Dichte des Aethers mit $k/4\pi$, so ist die kinetische Energie des im Volumenelemente $d\tau$ befindlichen Aethers:

$$(4) \qquad \frac{k}{8\pi}\left(\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2\right) d\tau.$$

Wir denken uns, bloss um die Bewegungsgleichungen des Aethers zu erhalten, auf jedes Volumenelement $d\tau$ des Aethers beliebige Kräfte mit den Componenten:

$$X d\tau, \quad Y d\tau, \quad Z d\tau$$

wirkend, deren Arbeit während der Zeit $dt$ also:

$$\left(X\frac{dF}{dt} + X\frac{dG}{dt} + Z\frac{dH}{dt}\right) dt\, d\tau$$

ist. Da ausserdem in dem betreffenden Volumenelemente die Arbeit:

$$(6)\qquad C.\left[\left(\frac{dF}{dt}\right)^2+\left(\frac{dG}{dt}\right)^2+\left(\frac{dH}{dt}\right)^2\right]dt\,d\tau$$

in Wärme umgesetzt werden soll, so lautet die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$(7)\qquad 0=\int d\tau\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\mu}\left(a\frac{da}{dt}+b\frac{db}{dt}+c\frac{dc}{dt}\right)\\ +k\left[\varphi\frac{d\varphi}{dt}+\chi\frac{d\chi}{dt}+\psi\frac{d\psi}{dt}\right]\\ +4\pi\left(X\frac{dF}{dt}+Y\frac{dG}{dt}+Z\frac{dH}{dt}\right)\\ +4\pi C\left[\left(\frac{dF}{dt}\right)^2+\left(\frac{dG}{dt}\right)^2+\left(\frac{dH}{dt}\right)^2\right],\end{array}\right.$$

wobei dies Integral über den ganzen in Betracht kommenden Raum zu erstrecken ist. Befinden sich daselbst verschiedene Körper, so wollen wir deren Trennungsflächen niemals als absolute Discontinuitätsstellen, sondern vielmehr als Uebergangsschichten denken, innerhalb deren die Werthe von $\mu$, $k$ und $C$, wenn auch rasch, so doch continuirlich von den im Innern des einen zu den im Innern des anderen Körpers geltenden Werthen übergehen.

Wir substituiren für $da/dt$, $db/dt$ und $dc/dt$ deren Werthe aus den Gleichungen (2) und integriren jedes Glied partiell. Nach der gemachten Annahme gibt es im Innern keine discontinuirlichen Trennungsflächen, an der äusseren in grosser Entfernung gedachten Oberfläche unseres Raumes aber sollen $F$, $G$ und $H$ verschwinden, sodass also alle Oberflächenintegrale verschwinden. Substituirt man ferner für $\varphi$, $\chi$, $\psi$ deren Werthe aus den Gleichungen (1), so geht die Gleichung (7) über in:

$$(8)\int d\tau\left\{\begin{array}{l}\frac{dF}{dt}\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{c}{\mu}\right)-\frac{d}{dz}\left(\frac{b}{\mu}\right)+k\frac{d^2F}{dt^2}+4\pi C\frac{dF}{dt}+4\pi X\right]\\ +\frac{dG}{dt}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{a}{\mu}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{\mu}\right)+k\frac{d^2G}{dt^2}+4\pi C\frac{dG}{dt}+4\pi Y\right]\\ +\frac{dH}{dt}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{b}{\mu}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{a}{\mu}\right)+k\frac{d^2H}{dt^2}+4\pi C\frac{dH}{dt}+4\pi Z\right]\end{array}\right\}=0.$$

Da die Kräfte und Beschleunigungen mit Ausnahme natürlich der von den Bewegungshindernissen herrührenden von den augenblicklich herrschenden Geschwindigkeiten unabhängig sind,

so sind in dieser Gleichung $dF/dt$, $dG/dt$ und $dH/dt$ als unabhängig zu betrachten und es müssen deren Coefficienten separat verschwinden. Man kann übrigens die Veränderungen von $F$, $G$ und $H$ in echte Variationen verwandeln, dadurch, dass man den Grössen $X$, $Y$, $Z$ während eines sehr kurzen Zeitintervalles sehr grosse Werthe ertheilt. (Vgl. Maxwell, On physical lines of force, Scient. Pap. I. p. 475, Gleichung 53. Phil. Mag. (4) vol. 21).

Setzen wir daher lediglich zur Abkürzung:

$$f = -\frac{k}{4\pi} \cdot \frac{dF}{dt}; \quad g = -\frac{k}{4\pi}\frac{dG}{dt}; \quad h = -\frac{k}{4\pi}\frac{dH}{dt} \tag{9}$$

$$p = -C\frac{dF}{dt}; \quad q = -C\frac{dG}{dt}; \quad r = -C\frac{dH}{dt} \tag{10}$$

$$u = p + \frac{df}{dt}; \quad v = q + \frac{dg}{dt}; \quad w = r + \frac{dh}{dt}, \tag{11}$$

so erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned} 4\pi . u &= \frac{d}{dy}\left(\frac{c}{\mu}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{b}{\mu}\right) \\ 4\pi . v &= \frac{d}{dz}\left(\frac{a}{\mu}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{c}{\mu}\right) \\ 4\pi . w &= \frac{d}{dx}\left(\frac{b}{\mu}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{a}{\mu}\right) \end{aligned}\right. \tag{12}$$

was genau mit den Gleichungen übereinstimmt, welche Maxwell für die electrischen und magnetischen Erscheinungen in ruhenden Körpern fand. (Vgl. meine Vorlesungen über Maxwell's Theorie 1. t. z. Barth. 1891. p. 84. Art. 88.)

Direct könnten diese Gleichungen nach der folgenden, ebenfalls schon von Thomson l. c. in ähnlicher Weise angewandten Methode gewonnen werden. Das Volumenelement $d\tau$ sei ein Parallelepiped, dessen eine Ecke die Coordinaten $x$, $y$, $z$ hat, während die anderen um $\xi$, resz. $\eta$, $\zeta$ grössere Coordinaten haben. Daher wirkt darauf um die $x$-Axe das Drehmoment:

$$m = \frac{b\,\xi\,\eta\,\zeta}{2\pi\mu}.$$

Das Volumenelement ist aber mit den umgebenden so verbunden, dass es sich nicht davon loslösen, und ohne diese mitzudrehen, diese Drehung ausführen kann. Es werden daher von den umgebenden Aethertheilchen auf die vier Seitenflächen,

welche der $x$-Axe parallel sind, Tangentialkräfte ausgeübt werden müssen, welche zusammen das gleiche Drehungsmoment liefern. Nehmen wir an, dass im Gegensatze zum Verhalten gewöhnlicher elastischer Körper hier Winkeländerungen des Parallelepipedes *keine* erheblichen elastischen Kräfte wachrufen, also die gewöhnlichen Tangentialkräfte der Elasticitätslehre nahe Null sind, so wird sich das Drehmoment unter beide Flächenpaare gleichmässig vertheilen. Auf die eine Fläche $\Phi$ vom Inhalte $\xi\eta$, welche zur $x$-Axe senkrecht steht, wirkt daher die Kraft $m/2\zeta$ in der positiven, auf die Gegenfläche $\Phi'$ die gleiche Kraft in der negativen $x$-Richtung. Diese Kräfte werden an den Trennungsflächen je zweier Volumenelemente wirken und natürlich an Intensität sich continuirlich von Punkt zu Punkt im Raume ändern. Da aber $\Phi'$ und $\Phi$ sich dadurch unterscheidet, dass $z$ um $\zeta$ grösser ist, so wirkt mit Beachtung des Kleinen 2. Ordnung auf letztere Fläche die Kraft:

$$\frac{1}{2\zeta}\left(m + \frac{dm}{dz}\zeta\right).$$

Beide Kräfte zusammen liefern daher:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{dm}{dz} = \frac{\xi\eta\zeta}{4\pi}\cdot\frac{d\left(\frac{b}{\mu}\right)}{dz}$$

in der $x$-Richtung. Ganz analog ist die Resultirende:

$$-\frac{\xi\eta\zeta}{4\pi}\frac{d\left(\frac{c}{\mu}\right)}{dy}.$$

Zieht man von diesen Molecularkräften den Reibungswiderstand $C\,dF/dt$ ab, setzt die so erhaltene Gesammtkraft gleich der mit der Masse $k\xi\eta\zeta/(4\pi)$ multiplicirten Beschleunigung in der $x$-Richtung und multiplicirt schliesslich mit $4\pi/(\xi\eta\zeta)$, so folgt sofort die obige Gleichung:

$$k\frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi C\frac{dF}{dt} = \frac{d\left(\frac{b}{\mu}\right)}{dz} - \frac{d\left(\frac{c}{\mu}\right)}{dy}.$$

Die Grundgleichungen des Electromagnetismus für bewegte Körper findet man hieraus, indem man unter $x$, $y$, $z$ nicht die Coordinaten einer fixen Stelle des Raumes, sondern eines Punktes der ponderabeln Körper versteht, welcher deren etwaige

Bewegung mitmacht. In Räumen, wo sich keine ponderable Materie befindet, kann dem Aether jede beliebige damit verträgliche Bewegung zugeschrieben werden. Diese Bewegungen müssen sich mit den im früheren beschriebenen Bewegungen superponiren. (Vgl. Hertz über die Grundgleichungen der Electrodynamik in bewegten Körpern. Wied. Ann. Bd. 41. p. 369. 1890; Ges. Abh. p. 256).

Wie man sieht, basirt die gesammte Beweisführung auf den Ausdrücken (2), (4), (5), (6) für die Energie des Aethers. Man kann nun den Ausdruck (2) auch in anderer Weise als durch die bisher superponirten Drehmomente erhalten. Man denke den Aether in einem isotropen Medium als einen homogenen, isotropen, elastischen Körper und $F$, $G$, $H$ als die Verschiebungen eines Theilchens desselben, die Energie der elastischen Kräfte ist dann, wie bekannt:

$$(13)\quad \begin{cases} A = K\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dG}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dH}{dz}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{dG}{dz} + \frac{dH}{dy}\right)^2\right. \\ \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{dH}{dx} + \frac{dF}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy} + \frac{dG}{dx}\right)^2 + \theta\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right)^2\right]. \end{cases}$$

(Vgl. Kirchhoff, 11. Vorlesung über Mechanik. 3. Aufl. p. 122.)

Wir wollen $\theta = -1$ setzen und jedes Glied von der Form

$$\int d\tau K \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dG}{dy}$$

zuerst partiell nach $x$, hierauf partiell nach $y$ integriren. Wenn $K$ überall denselben Werth hat, die Trennungsfläche zweier Körper keine mathematische Discontinuitätsstelle enthält, und $F$, $G$, $H$ an der im Unendlichen gedachten Begrenzungsfläche des gesammten betrachteten Körpersystems verschwinden, so verschwinden auch die auf die Oberfläche bezüglichen Glieder, und die Gleichung (13) verwandelt sich in:

$$A = \frac{K}{2}\left[\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)^2\right],$$

was mit dem Ausdruck (2) übereinstimmt, wenn man $K = 1/(4\pi\mu)$ setzt. Es würden also dann ebenfalls die Maxwell'schen Gleichungen für den Electromagnetismus folgen. Hierbei ist freilich zu bemerken, dass für einen festen Körper mit freier

im Endlichen liegenden Oberfläche $\theta$ keinen negativen Werth haben kann. Allein bei einem überall unbegrenzten Körper, wie es der Aether ist, dürften auch negative Werthe von $\theta$ zulässig sein, wenigstens sobald es sich nur um eine dynamische Illustration, wie hier, handelt.[1]) Schreibt man obendrein dem Aether Incompressibilität zu, so ist eo ipso:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0$$

und der Factor $\theta$, welcher bei dieser Grösse steht, gleichgültig, und daher kommen die Maxwell'schen Gleichungen nicht bloss für $\theta = -1$, sondern für jeden beliebigen Werth des $\theta$ zum Vorschein. Namentlich gilt dies auch für $\theta = \infty$, was Incompressibilität zur Folge hat. Für andere Werthe des $\theta$ würde eine verallgemeinerte Maxwell'sche Theorie erhalten, wie sie Helmholtz aus den Fernwirkungsgleichungen ableitete. Der schreiende Widerspruch, welcher zwischen der Existenz so magnetisirbarer Körper, wie Eisen, und der Annahme, dass $K$ in allen Körpern gleich ist, zu bestehen scheint, kann, wie ich glaube, durch die Voraussetzung behoben werden, dass die hohe Magnetisirbarkeit des Eisens nicht durch Herrschen eines kleineren Werthes von $K$ in seinem Innern bewirkt wird, sondern durch darin schon vorherbestehende Molecularmagnete, d. h. kleine electrische Ströme von unveränderlicher Intensität, die bei der Magnetisirung bloss gerichtet werden.

Hier ist freilich noch eines zu bemerken. Dem Aether, welchen wir anfangs als incompressible Flüssigkeit voraussetzten, werden neue Eigenschaften einer festen Substanz beigelegt. Er müsste sich also gewissen Kräften gegenüber wie ein fester, anderen wie ein flüssiger Körper verhalten. Analogien dafür an ponderabeln Körpern fehlen nicht. Man denke an Tresca's Versuche über den Ausfluss fester Körper, welche mit grossem Drucke durch Oeffnungen gepresst werden. Bei solchen Körpern werden trotz der Anwendbarkeit der Elasticitätsgleichungen innerhalb gewisser Grenzen doch die Ver-

1) Der durch $\theta = -1$ bedingte Zustand, welchen Thomson l. c. den quasilabilen nennt, wurde entdeckt durch Loschmidt in dessen Schrift über die Natur des Aethers, Wien bei Gerold & Sohn 1862, vgl. Fortschritte der Physik, Jahrg. 1862, p. 68.

schiebungen $F$, $G$, $H$ einen beliebig grossen Werth annehmen können. Die Theorie dieser Körper ist offenbar die Erforschung der Natur des Aethers von grösster Wichtigkeit. Vgl. Stokes, über die Natur des Aethers, wie sie sich aus der Aberration ergibt. Phil. Mag. July 1846. Scient. pap. vol. I, p. 153. Uebrigens macht es noch Schwierigkeiten, dass unsere Gleichungen $k$ mit der Zeit veränderlich liefern, während die Annahme der Incompressibilität wieder der Maxwell'schen Theorie fremde Druckkräfte hineinbringen würde. Hier will ich nur noch eine Untersuchung anschliessen, ob diese Hypothese nicht in quantitativer Beziehung auf Widersprüche stösst.

Sei ein homogenes, isotropes Medium, z. B. Luft gegeben. Daselbst habe $C$ einen sehr kleinen Werth; bei gegebenem Werthe der Geschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{\varphi^2 + \chi^2 + \psi^2}$$

des Aethers sei also die in der Zeit und Volumeneinheit in Wärme umgesetzte lebendige Kraft des Aethers $C\omega^2$ sehr klein. Ein solcher Körper heisst ein schlechter Electricitätsleiter, weil bei gegebener Stromstärke $\delta = C\omega$ umgekehrt die erzeugte Joule'sche Wärme $\delta^2 / C$ sehr gross ist. Sei:

$$F = \frac{dW}{dx}; \quad G = \frac{dW}{dy}; \quad H = \frac{dW}{dz}; \quad V = \frac{dW}{dt}.$$

Der Druck an irgend einer Stelle ist dann:

$$p + p_0 - \frac{k}{8\pi}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right].$$

Die gesammte Kraft $X$, welche auf einen im Aether befindlichen Körper in der Richtung der $x$-Axe wirkt, ist:

$$X = \int p\, ds \cos(n, x) = \iint p\, dy\, dz = \int \frac{dp}{dx} d\tau,$$

wobei $d\tau$ ein Volumenelement, $ds$ ein Oberflächenelement des Körpers, $n$ die zu letzterem gezogene Normale ist. Die Substitution des Werthes für $p$ liefert:

$$X = -\int d\tau \frac{k}{4\pi}\left[\frac{dV}{dx} \cdot \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{dV}{dy} \cdot \frac{d^2 V}{dx\, dy} + \frac{dV}{dz} \cdot \frac{d^2 V}{dx\, dz}\right].$$

und die partielle Integration liefert:

$$X = \int k \frac{d\tau}{4\pi} \frac{dV}{dx} \Delta V.$$

Setzt man $\Delta V = -4\pi\varepsilon$ und betrachtet bloss die Coordinaten $\xi\eta\zeta$ der electrischen Masse $\varepsilon\, d\tau$ als variabel, so erhält man:

$$X = -k \frac{d}{d\xi} \int \varepsilon V d\tau.$$

(Vgl. Maxwell, Scient. pap. vol. I. p. 497.)

Wir wollen hier aber nur ein ganz specielles Beispiel in einer ganz directen Weise behandeln. In dem oben beschriebenen Medium sollen sich zwei gleichnamig geladene Körper befinden. Der erste derselben soll nur unendlich wenig von einer Kugel mit dem Mittelpunkte $A$ und dem Radius $\varrho$, der zweite nur unendlich wenig von einer Kugel mit dem Mittelpunkte $B$ und dem Radius $\varrho'$ abweichen. Wir wählen $A$ zum Coordinatenanfangspunkt und ziehen die negative Abscissenaxe gegen $B$ hin. Die Länge $AB = \gamma$ soll sehr gross sein gegenüber den beiden Radien $\varrho$ und $\varrho'$. Setzen wir wieder:

$$F = \frac{dW}{dx}; \quad G = \frac{dW}{dy}; \quad H = \frac{dW}{dz},$$

so entspricht diesem Problem bekanntlich die Lösung:

$$W = \frac{M}{r} + \frac{N}{s},$$

wobei $M$ und $N$ Functionen der Zeit, $r$ und $s$ die Entfernungen des Punktes mit den Coordinaten $x, y, z$ (des Aufpunktes, von $A$ resp. $B$ sind. Ferner ist:

$$\varphi = \frac{dV}{dx}; \quad \chi = \frac{dV}{dy}; \quad \psi = \frac{dV}{dz};$$

wobei $V$ die Ableitung $W$ nach der Zeit ist, also:

$$V = \frac{M'}{r} + \frac{N'}{s},$$

wo:

$$M' = \frac{dM}{dt}; \quad N' = \frac{dN}{dt}.$$

Dies liefert überall $a = b = c = 0$. Daher folgt aus den Gleichungen (12):

$$u = p + \frac{df}{dt} = -C\varphi - \frac{k}{4\pi}\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

also:

$$(14) \qquad \begin{cases} M' = \alpha e^{-\frac{4\pi C t}{k}} \\ N' = \beta e^{-\frac{4\pi C t}{k}} \end{cases}$$

$\alpha$ und $\beta$ sind Constanten.

Das Aethervolumen, welches in der Zeit $dt$ dem ersten Körper entströmt, ist:

$$4\pi\varrho^2 \cdot \frac{M'}{\varrho^2}\, dt;$$

alles andere kann als unendlich klein vernachlässigt werden. Der gesammte Aether, welcher von der Zeit 0 bis zur Zeit $\infty$ dem ersten Körper entströmt, womit dieser also geladen war, hat nach dem Ausströmen das Volumen:

$$(15) \qquad \Omega = 4\pi . \int_0^\infty M'\, dt = k\frac{\alpha}{C},$$

da $k/(4\pi)$ die Dichte des Aethers nach dem Ausströmen ist. (Die Körper selbst können aus beliebiger ponderabler Masse bestehen, worin wir uns den Aether durch irgend welche Kräfte [chemische] beliebig verdichtet denken.)

Die Masse des Aethers, womit der erste Körper geladen war, ist also:

$$(16) \qquad m = \frac{k^2\alpha}{4\pi C}.$$

Dieselbe Grösse hat für den zweiten Körper den Werth:

$$\frac{k^2\beta}{4\pi C}.$$

Wir wollen nun die gesammte Kraft $X$ suchen, welche auf den ersten Körper infolge des Aetherdruckes ausgeübt wird. Derselbe sendet beständig durch innere Kräfte Aether normal zu seiner Oberfläche aus. Wäre er absolut kugelförmig, so müsste die durch obige Formeln angegebene Aetherbewegung ein wenig modificirt werden, damit die Aetherausstrahlung überall normal zur Körperoberfläche geschieht. Es vereinfacht die Rechnung, wenn man umgekehrt die Gestalt des Körpers so von der Kugelform abweichen lässt, dass dessen Oberfläche überall senkrecht auf die durch die obigen Gleichungen definierten Aetherströmung steht; d. h. der Gleichung:

$$\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{s} = c$$

genügt, wo $c$ eine Constante ist.

Seien $x$, $y$, $z$ die Coordinaten eines Punktes der Körperoberfläche und setzen wir:

$$y^2 + z^2 = \eta^2,$$

so ist also:

$$\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{\sqrt{\gamma^2 + 2\gamma x + x^2 + \eta^2}} = c,$$

also, da $\gamma$ gross gegen $r$ ist:

$$\frac{\alpha}{r} = c + \frac{\beta x}{\gamma^2}. \tag{17}$$

Der Druck im Punkte mit den Coordinaten $x$, $y$, $z$ ist (wieder mit Vernachlässigung des unendlich kleinen höherer Ordnung):

$$p = p_0 - \frac{k}{8\pi}\left(\frac{\alpha^2}{r^4} + \frac{2\alpha\beta x}{r^3\gamma^2}\right).$$

$p_0$ bedeutet den Druck in sehr grosser Entfernung. Setzen wir in der Klammer im ersten Glied für $1/r^4$ seinen Werth aus der Gleichung (17) ein und dann in den Gliedern von der niedrigsten Grössenordnung für $c$ wieder seinen angenäherten Werth $\alpha/r$, so folgt:

$$p = p_0 - \frac{k}{4\pi}\left(\frac{c^2}{\alpha^2} + \frac{6\alpha\beta x}{r^3\gamma^2}\right).$$

Sämmtliche Punkte des Körpers, für welche $x$ zwischen $x$ und $x + dx$, $\eta$ zwischen $\eta$ und $\eta + d\eta$ liegt, besetzen einen Gürtel von der Fläche:

$$2\pi\eta\sqrt{dx^2 + d\eta^2}.$$

Der Druck, welcher auf diesen Gürtel wirkt, hat in der Richtung der positiven Abscissenaxe die Componente $-2\pi p\,d\eta$. Da $\eta\,d\eta$, über den ganzen Körper integrirt, gleich Null ist, so verschwinden dabei die beiden ersten constanten Glieder im Ausdruck von $p$, und die gesammte auf den ersten Körper in der Richtung der Abscissenaxe wirkende Kraft ist:

$$X = \frac{3k\alpha\beta}{2\gamma^2}\cdot\int\frac{x\eta\,d\eta}{r^3}.$$

Hier kann der Körper wieder als Kugel betrachtet und

$$x = r\cos\vartheta$$
$$\eta = r\sin\vartheta$$

gesetzt werden, wodurch man, da $r$ constant ist, erhält:

$$X = \frac{3 k \alpha \beta}{2 \gamma^2} \cdot \int_0^\infty \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d \vartheta = \frac{k \alpha \beta}{\gamma^2}.$$

Es soll nun das Dielectricum so schlecht leiten, dass die Ladung in $T$ Tagen von 1 auf $1/e$ sinkt ($e = 2{,}718 \ldots$). Dann ist:

$$\frac{4 \pi C}{k} = \frac{1}{24 . 60 . 60\, T \sec}, \quad C = \frac{k}{10^6\, T \sec}.$$

Ferner soll jede der geladenen Kugeln $R$ cm Radius haben und zu Anfang mit 30 000 $V$ Volt geladen worden sein. Ein Volt ist in electromagnetischem Maasse das Potential:

$$\frac{10^8 \sqrt{\mathrm{g\, cm^3}}}{\sec^2};$$

in electrostatischem Maasse:

$$\frac{\sqrt{\mathrm{g\, cm}}}{300 \sec}.$$

Da das Potential einer Kugel gleich der Electricitätsmenge dividirt durch den Kugelradius ist, so ist die auf jeder der Kugeln vorhandene Electricitätsmenge in statischem Maase gemessen:

$$\varepsilon \doteq \frac{100\, R \sqrt{\mathrm{g\, cm^3}}}{\sec} V.$$

Die Kraft, mit welcher sich die Kugeln abstossen, ist $X = \varepsilon^2 / \gamma^2$, und vergleicht man dies mit dem oben gefundenen Werthe von $X$, so folgt

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} = \frac{100}{\sec} V R \sqrt{\frac{\mathrm{g\, cm^3}}{k}}, \text{ also:}$$

$$\Omega = 10^8\, V . T . R \sqrt{\frac{\mathrm{g\, cm^3}}{k}};$$

$$m = \frac{10^8}{4 \pi} V . T . R \sqrt{k . \mathrm{g\, cm^3}}.$$

Setzen wir die Dichte des Aethers $10^{16 + 2h}$ mal kleiner als die des Wassers, also:

$$k = 10^{-16 + 2h} \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm^3}} . 4 \pi, \text{ so folgt:}$$

$$\Omega = \frac{10^{h + 16}}{\sqrt{4 \pi}} V T R \,\mathrm{cm^3}; \quad m = \frac{10^{-h}}{\sqrt{4 \pi}} V T R \,\mathrm{gr}.$$

Thomson fand als untere Grenze für die Dichte des

Aethers $10^{-22}$ g cm $^{-3}$. Wäre dieselbe wirklich gleich dieser unteren Grenze, so hätte man $h$ etwa $= 3.5$, $m = VTR/(11000\,g)$. Wäre für das Medium, in welchem sich die angenommene Kugel von einem cm-radius befindet, $R = 1$, $T = 1$, d. h. die Ladung würde in einem Tage auf den 2,718. Theil herabsinken, so müsste für $V = 1$, d. h. bei einer Ladung mit 30000 Volt, bereits eine Aethermasse von $1/(11000$ g) in sie hinein, oder aus ihr herausgeschafft werden. Nun gibt es unzweifelhaft Media, wo $T$ weit grösser ist, sodass $m$ noch grösser ausfiele. Allein man muss bedenken, dass für die enorme von uns angenommene Ladung die Electricitätsleitung und -Verbreitung wesentlich complicirteren Gesetzen folgt, sodass die Anwendbarkeit der einfachen linearen Gleichungen Maxwell's fraglich wird. Wenn daher diese Zahl auch jedenfalls an der Grenze des möglichen liegt, so kann doch meiner Ansicht nach gerade nicht behauptet werden, dass sie der Erfahrung widerspreche. Bedenklicher sind die Werthe, die für die Geschwindigkeit des Aethers folgen.

Behufs weiterer Versinnlichung unserer mechanischen Analogie betrachten wir dasselbe Dielectricum (Luft) wie im vorigen. Es sollen jedoch darinnen sich verschiedene Körper befinden, in welchen $k$ und $C$ andere Werthe haben. In der Luft und in allen Körpern, worin $C$ klein von derselben Grössenordnung ist, werden $\varphi$, $\chi$, $\psi$ sehr lange endlich bleiben, dagegen werden, weil alles fast stationär wird, deren Differentialquotienten nach der Zeit, sowie $p$, $q$, $r$ und $u$, $v$, $w$ bald sehr klein werden. Daher wird gemäss der Gleichung 12):

$$\frac{a}{\mu}\,dx + \frac{b}{\mu}\,dy + \frac{c}{\mu}\,dz$$

ein vollständiges Differential $dW$, d. h. die magnetischen Kräfte haben ein Potential. Aus Gleichung 2) folgt ferner:

$$\frac{d}{dx}\left(\mu\frac{dW}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mu\frac{dW}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\mu\frac{dW}{dz}\right) = 0.$$

Da $W$ und $\mu$ überall stetig und die erstere Grösse im Unendlichen gleich Null ist, so folgt hieraus:

$$W = a = b = c = 0.$$

Obige Gleichung ist nämlich die Bedingung dafür, dass:

$$\iiint \mu\, dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{dW}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dW}{dz}\right)^2\right]$$

ein Minimum ist, was nur für $W = 0$ zutrifft.

Man sieht daher durch diese Darstellung den Grund ein, weshalb die Magnetisirung so geschieht, dass die magnetische Energie, d. h. die Summe der mit $\mu$ multiplicirten Quadrate der magnetischen Momente der Volumenelemente ein Minimum wird, sowie anderer ähnlicher Minimumsätze. (Vgl. Stefan, Wien. Sitzungsber. Bd. 99 p. 319, 1890.)

Wären in einzelnen Körpern Ampère'sche Molecularströme so würde in diesen und an ihrer Oberfläche $u$, $v$, $w$, *nicht* gleich Null. Man würde daher ein von Null verschiedenes magnetisches Potential bekommen. Sehr rasche Veränderungen desselben mit der Zeit (magnetische Ströme) würden electrische Kräfte erregen, wie sie freilich noch nicht beobachtet wurden. Wir wollen jedoch hier solche Fälle ausschliessen und überall $a = b = c = 0$ setzen. Dann folgt aus den Gleichungen 2), dass:

$$\varphi\, dx + \chi\, dy + \psi\, dz$$

ebenfalls ein vollständiges Differential $dV$ ist, dass daher auch die electrischen Kräfte ein Potential haben. Die Trennungsfläche zweier Körper denken wir uns als eine sehr dünne, aber continuirliche Uebergangsschicht, in welcher dieselben Bedingungen erfüllt sind, die wir überall annehmen. Da die Gleichungen 2) auch im Innern dieser Uebergangsschicht erfüllt sein müssen, so findet man in bekannter Weise, indem man sie nach $t$ differentiirt und die Normale zur Uebergangsschicht der Abscissenaxe wählt, dass der Differentialquotient von $V$ nach einer Richtung tangential zur Uebergangsschicht zu beiden Seiten derselben den gleichen Werth haben muss. Die durch die Flächeneinheit $dv$ der Uebergangsschicht hindurchgehende Aethermasse ist:

$$\frac{k}{4\pi} \cdot \frac{Vd}{dn},$$

wenn die Richtung $n$ normal zur Uebergangsschicht ist. Da dieselbe Aethermasse auf der anderen Seite austreten muss, so muss dieser Ausdruck zu beiden Seiten denselben Werth haben. Dies sind die alten bekannten Bedingungsgleichungen an der Trennungsfläche zweier Dielectrica:

Hat in einem Körper $C$ einen grösseren Werth, so nimmt daselbst (vgl. Gleichung 14) $V$ rascher ab (die electrische Nachwirkung, electrische Absorption). Hat $C$ einen sehr grossen Werth, d. h. ist der Körper ein Leiter, so muss $V$ bald constant werden. Die Aetherströmung umgibt dann den betreffenden Körper wie Wasser einen eingetauchten festen Körper. Die dadurch entstandene Modification des Werthes von $V$ nennt man die Electrisirung des eingetauchten Körpers durch Influenz. Man kann diese Modification auch dadurch entstanden denken, dass sich zur Aetherbewegung, welche ohne Anwesenheit des Leiters stattfinden würde, noch ein Ausströmen von Aether von der positiv influenzirten Seite des Körpers, ein Einströmen von der negativen superponirt, von der Beschaffenheit, dass dadurch die Aetherbewegung überall tangential zur Oberfläche des Körpers gemacht wird. Im Körper selbst ist nur ein ganz schwacher Strom, welcher die langsame Abnahme der electrischen Influenz bewirkt, die durch die allmähliche Zerstreuung der Electricität an den ursprünglich geladenen Körpern bedingt ist. Dies wäre in allgemeinen Zügen das Bild der sogenannten Electrostatik.

Um uns ein Bild von der Aetherbewegung beim stationären electrischen Strome zu verschaffen, wollen wir einen unendlich langen geraden Kreiscylinder vom Radius $\varrho$ betrachten, dessen Axe die Abscissenaxe ist und der in Richtung der positiven Abscissen vom positiven electrischen Strome durchflossen wird. Das electrostatische Potential, welches nöthig ist, um einen solchen Strom zu treiben, wird in unendlicher Entfernung von der Abscissenaxe unendlich. In der alten Fernwirkungstheorie schadet dies wenig, da man die electrostatischen und electrodynamischen Erscheinungen daselbst völlig getrennt betrachtet. Es muss eher als ein Vorzug der neuen Theorie betrachtet werden, dass dabei eine solche Trennung überhaupt nicht angeht.

Um das electrostatische Potential endlich zu erhalten, können wir den Cylinder von einem coaxialen Hohlcylinder von sehr grossem Radius $R$ umgeben denken, der zur Erde abgeleitet und ohne electromotorische Kräfte ist. Sei $A/C$ die Stromdichte im massiven Cylinder, so muss daselbst $F$ das Glied $-At$ enthalten. Da wir es mit einem Leiter zu thun haben, setzen wir $k = 0$ und es folgt aus der Gleichung (80)

meiner „Vorlesungen über **Maxwell's** Theorie", welche ja auch leicht aus den hier entwickelten Gleichungen gewonnen werden kann:

$$F = -At - \pi\mu A C r^2, \quad G = H = 0$$

wobei $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ die Distanz des betrachteten Punktes von der Axe des Cylinders vorstellt. Hieraus folgt im Innern des massiven Cylinders:

$$a = 0; \quad b = -2\pi\mu A C z; \quad c = \pi\mu A C y.$$

Zwischen dem massiven und dem Hohlcylinder ist ein Dielectricum (Luft). Daselbst sollen $\mu$, $C$, $k$ die Werthe $\mu'$, $C'$, $k'$ haben, wovon $C'$ sehr klein ist. An der Trennungsfläche muss:

$$a = a' \quad \mu b = \mu' b' \quad \mu C = \mu' C' \quad F = F'$$

$$C \frac{dG}{dt} = \frac{k'}{4\pi} \frac{dG'}{dt} \qquad C = \frac{dH'}{dt} = \frac{k'}{4\pi} \frac{dH}{dt}$$

sein. Die soeben citirte Gleichung (80) liefert hier:

$$\Delta F = \Delta G = \Delta H = 0.$$

Daher muss zunächst:

$$F = -A\left(\frac{t}{l\frac{\varrho}{R}} + 2\pi\mu' C\varrho^2\right) l\frac{r}{R} + \pi A C \varrho^2 \left(2\mu' l\frac{\varrho}{R} - \mu\right)$$

sein, wobei $l$ den natürlichen Logarithmus bezeichnet. Da ferner $a$, $b$, $c$ nicht ins Unendliche wachsen dürfen, weil dadurch unendliche Kräfte geweckt würden, so muss im Dielectricum der $t$ enthaltende Theil von:

$$F dx + G dy + H dz$$

ein vollständiges Differential sein, woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} G &= -\frac{A t x y}{r^2 l \frac{\varrho}{R}} \\ H &= = \frac{A t x z}{r^2 l \frac{\varrho}{R}} \end{aligned}\right\}$$

Die Grösse:

$$\frac{gy + hz}{r - \varrho} = -\frac{k}{4\pi\varrho}\left(y \frac{dG}{dt} + \frac{dH}{dt}\right) = \frac{Ax}{l\frac{\varrho}{R}}$$

ist das, was man die Flächendichte der freien Electricität auf der Oberfläche des massiven Cylinders,

$$\int\left(\frac{dF}{dt}dx + \frac{dG}{dt}dy + \frac{dH}{dt}dz\right) = -\frac{Ax}{l\frac{\varrho}{R}}\, l\frac{r}{R}$$

das, was man deren Potentialfunction nennt.

Für electrostatisches Maass ist im Standardmedium $k = 1$. Von $R$ würde man unabhängig, wenn zwei gleichbeschaffene, in entgegengesetzter Richtung durchströmte Cylinder, für deren Axen $y = 0$, $z = p$ und $z = -p$ ist, vorhanden wären, welche für $x = 0$ das electrostatische Potential Null haben. Sind dann:

$$r = \sqrt{y^2 + (z-p)^2} \text{ und } s = \sqrt{y^2 + (z+p)^2}$$

die Entfernungen eines Punktes von der ersten resp. zweiten Axe, und ist der Radius $\varrho$ beider Cylinder klein gegen $p$, so ist im ersten Cylinder:

$$F = -At - \pi\mu A C r^2; \quad G = H = 0;$$

$$a = 0; \quad b = -2\pi\mu A C(z-p); \quad c = 2\pi\mu A C y;$$

im zweiten Cylinder:

$$F = At + \pi\mu A C s^2 \quad G = H = 0;$$

$$a = 0; \quad b = -2\pi\mu A C(z+p) \quad c = 2\pi\mu A C y$$

und im umgebenden Dielectricum:

$$F = \left(-\frac{t}{l^2\frac{p}{\varrho}} + 2\pi\mu' C\varrho^2\right) A\, l\frac{s}{r} - \pi A C\varrho^2\left(2\mu'\, l^2\frac{p}{\varrho} + u\right);$$

$$G = \frac{Atxy}{l^2\frac{p}{\varrho}}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{s^2}\right); \quad H = \frac{Atx}{l^2\frac{p}{\varrho}}\left(\frac{z-p}{r^2} - \frac{z+p}{s^2}\right);$$

$$a = 0; \quad b = -2\pi\mu' C\varrho^2\left(\frac{z-p}{r^2} - \frac{z+p}{s^2}\right);$$

$$c = 2\pi\mu C\varrho^2 y\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{s^2}\right).$$

## Nachtrag.

Es sei mir gestattet, wenn auch zusammenhanglos noch folgende Bemerkungen beizufügen.

1. Hr. A. Sommerfeld hat[1]) versucht umgekehrt die electrischen Kräfte den Verdrehungen $U$, $V$, $W$ die magnetischen dagegen den Geschwindigkeitscomponenten $u$, $v$, $w$ eines Aethertheilchen proportional zu setzen. Sind $\xi$, $\eta$, $\zeta$ dessen Verschiebungen zur Zeit $t$, so ist also $u = d\xi : dt$, $2U = (d\zeta : dy - d\eta : dz)$

1) Sommerfeld, Wied. Ann. 46. p. 139. 1892.

Dass man in dieser Weise ebenfalls im allgemeinen auskommt, bietet eine interessante Illustration zur Reciprocität zwischen Electricität und Magnetismus[1]) sowie zur Thatsache, dass alle mechanischen Vorstellungen, wenn sie nur gewissen allgemeinen Bedingungen genügen, zu den Gleichungen des Electromagnetismus führen müssen.[2]) Doch können im speciellen Schwierigkeiten eintreten. So scheint mir bei Hrn. Sommerfeld's Anschauung eine gleichförmig electrisirte Kugel unmöglich. Ziehen wir auf der Kugel einen beliebig kleinen Kreis, so müsste

$$\int (\xi\, d x + \eta\, d y + \zeta\, d z) = \int d v \left[\left(\frac{d \zeta}{d y} - \frac{d \eta}{d z}\right) \cos (n x)\right.$$

$$\left.\left(\frac{d \xi}{d z} - \frac{d \zeta}{d x}\right) \cos (n x) + \left(\frac{d \eta}{d x} - \frac{d \xi}{d y}\right) \cos (n z)\right]$$

sein. Dabei ist das erste Integral über den Umfang des kleinen Kreises, das zweite über die ganze Kugelfläche mit Ausnahme der vom Kreis umschlossenen Fläche zu erstrecken. Nach Hrn. Sommerfeld müsste für eine gleichförmig electrisirte Kugel der eckigeingeklammerte Ausdruck im Innern der Kugel Null, ausserhalb aber an deren Oberfläche gleich einer endlichen Constanten sein. Daher müsste auch das links vom Gleichheitszeichen stehende Integral, wenn der kleine Kreis sehr nahe der Kugel, aber ausserhalb gezeichnet wird, endlich; also die Verschiebungen unendlich sein. Es müsste also von der Kugel weg nach aussen mindestens eine, wenn auch unendlich enge Röhre führen, innerhalb welcher ganz andere Verhältnisse herrschen. Da dies bei Magnet- und Solenoidpolen, nicht aber bei geladenen Kugeln zutrifft, scheint mir die Sommerfeld'sche Auffassung die unwahrscheinlichere zu sein.

Ausserdem verzichtet Hr. Sommerfeld von vornherein auf die Vortheile, welche die Betrachtung von Discontinuitätsschichten als sehr rasche, aber nicht unendlich rasche Uebergänge bietet, indem er annimmt, dass daselbst seine Gleichung (2 c), welche eine Folge seiner Definition von $U$, $V$, $W$ ist, nicht

---

1) Vgl. ausser Maxwell u. a. Rowland, amer. journ. of math. II. 354. 1879. III. 89. 1880.

2) Vgl. meine Vorles. üb. Maxwell'sche El.-Theorie. Barth 1891.

gilt und nicht sagt, was diese Grössen bedeuten, wenn die zu ihrer Definition verwendeten Differentiationen unerlaubt würden.

2. Wenn man nach Hrn. Hertz's Vorgange[1]) sich die Aufgabe stellt, ohne mechanische Begründung bloss die Gleichungen für den Electromagnetismus in der einfachsten Form aufzustellen, so kann man die Anzahl der Hülfsvorstellungen auf die Hälfte reduciren, indem man nur die drei electrischen Kräfte $F$, $G$, $H$ und die sie bestimmende Gleichung, als erfahrungsmässig gegeben betrachtet. Letztere lautet für homogene Körper

$$k\frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi l\frac{dF}{dt} = \nu\left[\varDelta F - \frac{d}{dx}\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right)\right]$$

für inhomogene isotrope aber kommt dazu noch das Glied

$$\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right)\frac{d\nu}{dz} + \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)\frac{d\nu}{dy}$$

Die in diesen vier Zeilen ausgesprochenen Voraussetzungen genügen zur Erklärung der electromagnetischen Erscheinungen in isotropen ruhenden Körpern. Trennungsschichten werden immer als continuirliche, wenn auch beliebig rasche Uebergänge betrachtet, Magnete als Solenoide, Eisen und Stahl als Aggregate drehbarer, resp. fixer kleiner Ströme[2]), welche alle durch die Variabelen $F$, $G$, $H$ und deren Differentialquotienten bestimmbar sind, während die Bezeichnung von $dH:dy - dG:dz$ etc. durch einzelne Buchstaben nur zur Vereinfachung der Formeln dient.

3. Die Bemerkung auf p. 86 ladet ein, als Analogon des Aethers einen Körper zu betrachten, für welchen die Gleichungen gelten, die ich in zwei Aufsätzen über Theorie der elastischen Nachwirkung aufstellte[3]) worüber ich hier, meine dort angewendeten Buchstaben in gleicher Bedeutung beibehaltend, nur Folgendes anführe. Meine Formeln, welche übrigens die Maxwell'sche Transformation[4]) nur dann zulassen, wenn Maxwell's Reihen convergiren, was z. B. niemals ein-

1) Gött. Nachr. 19. März 1890. Wied. Ann. **40.** 577. Ausbreit. d. el Kraft. Barth 1892. p. 208.

2) Ueber die Einführung solcher dehnbarer und fixer kleiner Ströme in die Maxwell'sche Theorie vgl. Verhandl. d. Gesellsch. der Naturforscher v. 1891. p. 30.

3) Wien. Sitzungsber. 70. 8. Oct. 1874, 76, 6. Dec. 1877.

4) Maxwell, scient. pap. II. p. 623.

tritt, wenn die Deformation früher von Null verschieden, dann aber während einer endlichen Zeit Null war, können auch so interpretirt werden.

Wir tragen die Zeit von $-\infty$ bis zur fraglichen Zeit $t$ auf der Abscissenaxe $OT$ Fig. 1 auf und theilen sie in unendlich viele Differentiale. Ueber jedem tragen wir den zu dieser Zeit stattfindenden Werth von $p = dv:dz - dw:dy$ auf, multipliciren ihn mit dem betreffenden Zeitdifferentiale und noch einem ebenfalls darüber aufgetragenen Faktor. Die Summe (Integral) dieser Produkte ist dann der Werth von $T_1$ zur fraglichen Zeit. Die Endpunkte aller Faktoren bilden dann die Linie der Fig. 1, wobei $\varepsilon$ sehr klein ist. Mit wachsender Zeit rückt diese Linie ohne Gestaltänderung in

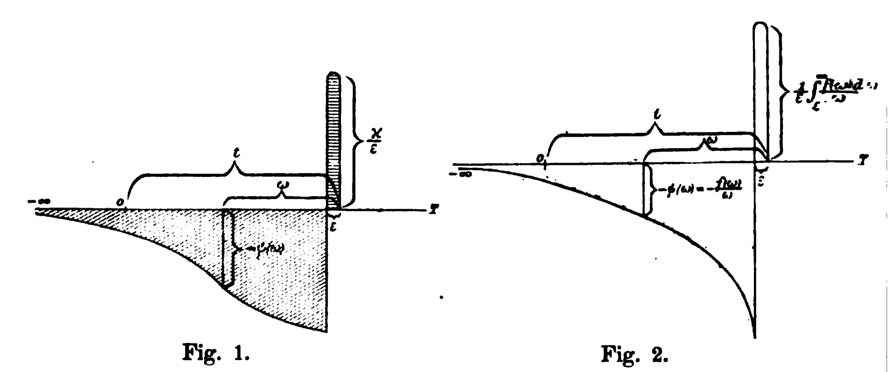


Fig. 1. Fig. 2.

Abscissenrichtung fort. Für den von mir als den wahrscheinlichsten bezeichneten Fall hat sie die specielle Form der Fig. 2. Ist die horizontal schraffirte Fläche gleich der schief schraffirten, so nähern sich die Gleichungen in zwei Fällen denen für eine reibende Flüssigkeit, 1. wenn die ganze schraffirte Fläche verschwindet bis auf die Theile, welche zu sehr kleinen Werthen von $\omega$ gehören, zweitens wenn die Bewegung sehr langsam geschieht. Sind die besprochenen Flächen nicht gleich, so nähern sich die Gleichungen in diesen Fällen, den Neumann-O. E. Meyer'schen für die innere Reibung fester Körper.

In dem speciellen Falle, dass

$$N_1 = \lambda\,\theta + 2\mu\frac{du}{dx} - \alpha\lambda\int_0^\infty d\omega\, e^{-b\omega}\theta(t-\omega) - a\,\mu\int_0^\infty d\omega\, e^{-b\omega}\frac{du(t-\omega)}{dx}$$

$$T_1 = \mu p - a\mu \int_0^\infty d\omega\, e^{-b\omega} p(t-\omega)$$

ist, findet man

$$b N_1 + \frac{d N_1}{d t} = \lambda_1 \theta + \mu_1 \frac{d u}{d x} + \lambda \frac{d\theta}{d t} + 2\mu \frac{d^2 u}{dx\, dt}$$

$$b T_1 + \frac{d T_1}{d t} = \mu_1 p + \mu \frac{d p}{d t}$$

wobei $\lambda_1 = \lambda(b-\alpha)$, $\mu_1 = \mu(b-a)$ daher

$$\varrho\left(b\frac{d^2 u}{d t^2} + \frac{d^3 u}{d t}\right) = (\lambda_1 + \mu_1)\frac{d\theta}{d x} + \gamma_1 \varDelta u + (\lambda+\mu)\frac{d^2\theta}{dx\, dt} + \mu\frac{d\varDelta u}{d t}.$$

Falls $\gamma_1 = 0$ ist, sind die beiden früher schraffirten Flächen gleich. In dem Falle, dass auch $\lambda_1 = 0$ ist, wo freilich auch cubische Zusammenpressung nach genügend langer Zeit keinen Widerstand finden würde, aber auch in allen Fällen, wo $\theta = 0$ ist, lässt sich diese Gleichung nach $t$ integriren und gibt

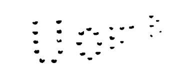
$$\varrho b \frac{d u}{d t} + \varrho \frac{d^2 u}{d t^2} = (\lambda + \mu)\theta + \mu \varDelta u$$

also für $\lambda + \mu = 0$ (Quasilabilität) aber auch in allen Fällen, wo $\theta = 0$ ist, die Gleichung der electromagnetischen Lichttheorie für Halbleiter. Man erhält also hier das Glied $\varrho\, b\, du/dt$ welches gewöhnlich als ein der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand gedeutet wird in ganz anderer Weise.

München, October 1892.

---



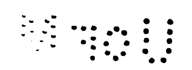


## VI. *Ueber einige die Maxwell'sche Electricitätstheorie betreffende Fragen; von Ludwig Boltzmann.*

---

a) In des Verfassers Buche über diesen Gegenstand wurde der Satz, dass die Arbeit, welche ein Solenoidpol bei der Bewegung in einer geschlossenen Curve, welche eine Strombahn einmal umfasst, leistet, gleich dem Producte der Intensität $m$ des Solenoidpols und der Gesammtintensität $i$ des electrischen Stromes in eine Constante ist, durch Zuziehung des Biot-Savart'schen Gesetzes begründet. Wenngleich die in diesem Gesetze vorausgesetzte Fernwirkung von vornherein als scheinbare aufgefasst wurde, so bleibt trotzdem die Nothwendigkeit der Zuziehung eines Fernwirkungsgesetzes störend. Dieselbe kann nun ganz vermieden und dadurch die Anzahl der Annahmen, welche zur Begründung der Maxwell'schen Theorie erforderlich sind, um eine vermindert werden, indem man an die schon gemachte Annahme anknüpft, dass der Ausdruck, welcher bei Bewegung eines Solenoidpols die Arbeit angibt, das vollständige Differential einer Function ist, welche nur bei Umkreisung eines fremden electrischen Stromes mehrdeutig wird. Daraus folgt sofort, dass sich die Arbeit nicht ändern kann, wenn die Umkreisungscurve in eine beliebige andere, dieselben fremden Ströme gleich oft und in gleichem Sinne umkreisende, übergeht. Im Falle eines einzigen fremden Stromes kann also die Arbeit nur von $m$ und $i$ abhängen. Dass sie diesen beiden Grössen proportional sein muss, folgt schon aus den mechanischen Ausgangspunkten der Theorie.

b) Aus den Gleichungen Maxwell's folgt bekanntlich, dass wahrer Magnetismus unmöglich ist. Nun kann man sich zwar dadurch helfen, dass man sagt, in Stahlmagneten gelten diese Gleichungen nicht. Da man aber bisher Gleichungen, welche für Eisen und Stahl gelten, nicht aufstellen konnte, so scheint es doch wünschenswerth, auch aus den Maxwell'schen Gleichungen die Möglichkeit von Körpern herzuleiten, welche sich wie Magnete verhalten. Es sind selbstverständlich die



Solenoide. Man sagt also etwa: das Auftreten von Magnetismus ohne electrische Ströme ist nicht möglich. Sind diese durchaus solenoidartig angeordnet, so bezeichnet man die dadurch erzeugten Erscheinungen als rein magnetische. Stahlmagnete verdanken ihre Wirkung solenoidartig angeordneten Molecularströmen. Allein dabei bleibt eine Schwierigkeit. Wenn $\mu$ die Maxwell'sche Magnetisirungszahl ist, so sind die Kräfte, welche electrische Ströme (daher auch Solenoide) bei unveränderter Lage in verschiedenen Medien aufeinander ausüben, $\mu$ direct proportional (vgl. Art. 109 des oben citirten Buches). Die Kräfte, welche Stahlmagnete bei unveränderter Lage in verschiedenen Medien aufeinander ausüben, sind aber dem $\mu$ verkehrt proportional. Dies erklärt sich daraus, dass ersteres Gesetz immer gilt, wenn vorausgesetzt wird, dass sowohl vor als auch nach der Vertauschung des Mediums ausserhalb und innerhalb der aus unendlich dünnem Drahte hergestellten Solenoidwindungen dasselbe Medium vorhanden ist. Bei Stahlmagneten ist aber diese Bedingung offenbar nicht erfüllt; doch nicht so ganz einfach ist die Frage, unter welchen Bedingungen das Gesetz der verkehrten Proportionalität mit $\mu$ gilt.

Um der Lösung dieser Aufgabe näher zu treten, denken wir uns zunächst einen geschlossenen geometrischen Rotationskörper gleichförmig mit electrisch durchströmtem Draht umwickelt, d. h. er sei senkrecht zur Umdrehungsaxe, welche wir zur Abscissenaxe wählen, durch sehr viele parallele Ebenen ($n$ auf die Längeneinheit) in sehr viele, gleich dicke Scheiben zerlegt und jede Scheibe von einem Strome von der Intensität $i$ umflossen. Dieses Stromsystem wirkt nach aussen geradeso, wie zwei mit Magnetismus erfüllte Körper zusammen (vgl. Stefan, Wien. Ber. Bd. 69. 12. Febr. 1874). Der eine Körper ist mit dem umwickelten identisch und mit Nordmagnetismus von der Dichte $\varrho$ gleichförmig erfüllt; der andere ist congruent und in gleicher Weise mit gleichviel Südmagnetismus erfüllt, aber um die sehr kleine Strecke $\delta$ in der Richtung der negativen Abscissenaxe verschoben. Die Ströme fliessen dem Uhrzeiger entgegen, wenn sich das beobachtende Auge dort befindet, wo der nordmagnetische Körper liegt, also wohin die positive Abscissenaxe zeigt. $\varrho\delta$, das magnetische Moment der Volumeneinheit beider sich durchdringenden Magnetkörper, ist gleich

$4\pi ni$. Sei $V$ die Function, deren negative Ableitungen die magnetische Kraft des Stromsystems liefern, $\Omega$ dieselbe Function für das System beider Magnetkörper, der Index $a$ bezeichne Werthe ausserhalb, der Index $i$ innerhalb des umwickelten Körpers. Dann ist

$$(1) \qquad V_a = \Omega_a, \quad V_i = \Omega_i - 4\pi nix$$

Vgl. die citirte Abhandlung Stefan's; man findet dies auch, wenn man auf jede Drahtwindung den Stokes'schen Satz anwendet. Bezeichnet man ferner mit $d/dn_i$ und $d/dn_a$ Differentiationen nach der nach innen oder aussen zum umwickelten Körper gezogenen Normale, mit $d/dS$ eine Differentiation tangential zum Parallelkreise in der Richtung, wie die Ströme fliessen, endlich mit $d/dT$ eine Differentiation tangential zu diesem Körper und in dessen Meridianebene, und zwar so gerichtet, dass, von dort gesehen, wohin $n_a$ zeigt, die positive $S$-Richtung dem Uhrzeiger entgegen sich auf kürzestem Wege in die positive $T$-Richtung drehen lässt, so ist, weil das Potential $V$ bloss dem Vorhandensein electrischer Ströme, aber keinem freien Magnetismus entspricht:

$$(2) \qquad \frac{dV_a}{dn_a} + \frac{dV_i}{dn_i} = 0$$

Um $dV:dT$ zu finden, wählt man in der Maxwell'schen Gleichung

$$(3) \qquad 4\pi w = \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}$$

die Richtungen $T$, $n_a$, $S$ als $OX$, $OY$, $OZ$, was Winklecoordinaten liefert. Man integrirt bezüglich $y$ von der Innen- bis zur Aussenfläche und erhält, da natürlich $d\beta:d\chi$ nur Verschwindendes liefert,

$$(4) \qquad 4\pi w\delta = \alpha_0 - \alpha_1 = \frac{dV_i}{dT} - \frac{dV_a}{dT}$$

Hierbei ist $\delta$ die Dichte der Oberflächenschicht, welche zur Vermittelung der Continuität fingirt wurde, $w\delta$ ist daher die Electricität, die durch die auf der Fläche senkrecht zur Strömungsrichtung gezogene Längeneinheit fliesst, $w\delta dT$ ist also gleich $nidx$, wenn $dx$ die Projection von $dT$ auf die Abscissenaxe ist. $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind die magnetischen Kräfte im Sinne Max-

well's, in des Vortragenden Buch über Maxwell's Theorie mit $4\pi\alpha$, $4\pi\beta$, $4\pi\gamma$ bezeichnet. Wir erhalten somit

$$(4)\qquad 4\pi n i \frac{dx}{dT} = \frac{dV_i}{dT} - \frac{dV_a}{dT}$$

Ebenso erhält man aus $4\pi u = d\gamma / dy - d\beta / dz$ bei gleicher Lage der Coordinatenaxen

$$(5)\qquad \frac{dV_i}{dS} = \frac{dV_a}{dS}$$

Da das Potential $\Omega$ bloss freiem Magnetismus, keinen electrischen Strömen entspricht, so muss

$$(6)\qquad \frac{d\Omega_i}{dT} = \frac{d\Omega_a}{dT}, \quad \frac{d\Omega_i}{dS} = \frac{d\Omega_a}{dS}$$

sein. $d\Omega_i / dn_i + d\Omega_a / dn_a$ aber ist die $-4\pi$fache Flächendichte $\varrho$ des freien Magnetismus, welcher die Wirkung des Stromsystems nach aussen ersetzt. Also

$$\frac{d\Omega_i}{dn_i} + \frac{d\Omega_a}{dn_a} = -4\pi\varrho.$$

Betrachten wir zunächst einen speciellen Fall. Sei der umwickelte Körper ein Rotationsellipsoid. Dann ist

$$(7)\qquad \Omega_i = 4\pi n i h x, \quad \Omega_a = 4\pi n i f,$$

wobei $h$ eine Constante, $f$ aber das Potential des um $\delta$ verschobenen und von Masse mit der Dichte $1:\delta$ erfüllten Rotationsellipsoides ist.

Für eine Kugel vom Radius $R$ wird

$$(10)\qquad h = {}^1/_3, \; f = \frac{R^3 x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3}$$

Die Gleichungen 1; 5 liefern

$$(11)\qquad V_i = 4\pi n i (h-1) x, \quad V_a = 4\pi n i f,$$

$$(12)\qquad \frac{df}{dx_i} = \frac{dx}{dn_i}(1-h), \quad \frac{df}{dT} = h\frac{dx}{dT}, \quad \frac{df}{dS} = h\frac{dx}{dS}$$

Wir denken uns nun das Innere des Ellipsoides mit einem Medium erfüllt (dem Innenmedium), für welches die Maxwell'sche Magnetisirungsconstante $\mu$ den Werth $\mu$ hat, während sie im Aussenmedium den Werth $\nu$ haben soll. Dann sollen

$\alpha = d\varphi/dx$, $\beta = d\varphi/dy$, $\gamma = d\varphi/dz$ die magnetischen Kräfte sein. Das magnetische Potential $\varphi$ ist bestimmt durch die Gleichungen

$$(13)\quad \mu\frac{d\varphi_i}{dn_i} + \nu\frac{d\varphi_a}{dn_a} = 0,\quad \frac{d\varphi_i}{dT} = \frac{d\varphi_a}{dT} + 4\pi n i\frac{dx}{dT},\quad \frac{d\varphi_i}{dS} = \frac{d\varphi_a}{dS},$$

deren zweites aus der Gleichung 3 gerade so folgt, wie die Gleichung 4 daraus abgeleitet wurde. Nach der Fernwirkungstheorie würde sie daraus folgen, dass $\varphi + V$ das Potential des durch die Fernwirkung des Stromsystems in beiden Medien inducierten Magnetismus, also kein Potential electrischer Ströme, sondern bloss magnetischer Massen ist und man daher hat

$$\frac{d(\varphi_i + V_i)}{dT} = \frac{d(\varphi_a + V_a)}{dT},$$

worauf dann Gleichung 4 anzuwenden ist.

Bezeichnen wir nun mit $s$ und $t$ zwei zu bestimmende Constanten, so werden diese Gleichungen erfüllt durch

$$\varphi_i - s x,\quad \varphi_a = t f.$$

Zur Bestimmung von $s$ und $t$ erhält man aus 12 und 13

$$\lambda s + \mu t(1 - h) = 0,\quad s = h t + \pi n i,$$

woraus folgt

$$s = \frac{4\pi n i \mu(1-h)}{\lambda h + \mu(1-h)},\quad t = -\frac{4\pi n i \lambda}{\lambda h + \mu(1-h)}.$$

Die magnetischen Kräfte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ im Aussenmedium haben also das Potential

$$(15)\qquad -\varphi_a = \frac{4\pi n i \lambda f}{\lambda h + \mu(1-h)}$$

Die ponderomotorischen Kräfte auf einen und denselben electrischen Strom sind nach Maxwell proportional den Grössen $a = \mu\alpha$, $b = \mu\beta$, $c = \mu\gamma$. Dasselbe gilt von dem Pole eines Solenoids, dessen Inneres stets von demselben Medium wie die Aussenumgebung erfüllt ist. Vgl. das oben citirte Buch Art. 79, wo $m$ eine dem Solenoide eigenthümliche Constante, also $X$ proportional $a = \mu\alpha$ ist. Es bleibe nun das Medium im Inneren des Ellipsoids, daher auch $\lambda$ unverändert, dagegen trete $\mu'$ an Stelle von $\mu$, $\varphi'$ an Stelle von $\varphi$ und $a'$, $b'$, $c'$ an Stelle von $a$, $b$, $c$. Dann wird

(16) $$\varphi_a' = \frac{4\pi n i \lambda f}{\lambda h + \mu'(1-h)},$$

daher

(17) $$a' : a = b' : b = c' : c = \frac{\mu'}{\lambda h + \mu'(1-h)} : \frac{\mu}{\lambda h + \mu(1-h)}.$$

In diesem Verhältnisse ändern sich daher auch die auf einen Strom wirkenden Kräfte. Ist das Ellipsoid sehr langgestreckt, also $h$ verschwindend, so sind diese von der Natur des Zwischenmediums unabhängig gerade so wie die Kräfte, welche ein unveränderlicher Stahlmagnet auf electrische Ströme ausübt.

Es lässt sich übrigens zeigen, dass dasselbe von jedem beliebigen, sehr langgestreckten Körper, speciell also auch von einem sehr langen, beiderseits senkrecht abgeschnittenen, gleichmässig umwickelten Cylinder gilt. Es sei wieder $V$ das Potential der umwickelten Ströme allein, und

$$V_i = 4\pi n i x(h-1), \quad V_a = 4\pi n i f,$$

so gelten dieselben Gleichungen wie früher; nur wird $h$ jetzt Function von $x, y, z$, sein können. Doch setzen wir voraus, dass es eine sehr kleine Grösse ist, da der Körper sehr langgestreckt ist. Man hat wie früher

(18) $$\frac{df}{dn_a} = \frac{dx}{dn_i} - \frac{d(hx)}{dn_i}, \quad \frac{df}{dS} = \frac{d(hx)}{dS}, \quad \frac{df}{dT} = \frac{d(hx)}{dT}$$

Es sei nun wieder das Innere des Köpers mit einem anderen Medium erfüllt, als die Umgebung; die Magnetisirungsconstante sei innen $\lambda$, aussen $\mu$, und $\varphi$ die Function, deren positive Ableitungen gleich den magnetischen Kräften sind. Dann setzen wir

(19) $$\varphi_i = sx + \sigma, \quad \varphi_a = tf + \tau,$$

wobei $s$ und $t$ Constante, $\sigma$ und $\tau$ aber sehr kleine Functionen von $x, y, z$ sein sollen.

Die erste der Gleichung 13 liefert jetzt

$$\lambda s \frac{dx}{dn_i} + \lambda \frac{d\sigma}{dn_i} + \mu t \frac{df}{dn_a} + \mu \frac{d\tau}{dn_a} = 0.$$

Setzen wir also

(20) $$\lambda s + \mu t = 0,$$

so bleibt gegen Gleichung 18

(21) $$\lambda \frac{d\sigma}{dn_i} + \mu \frac{d\tau}{dn_a} = \frac{d(hx)}{dn_i} \mu t$$

Die 2. der Gleichungen 13 liefert

$$s\frac{dx}{dT}+\frac{d\sigma}{dT}=t\frac{df}{dT}+\frac{d}{dT}+4\pi ni\frac{dx}{dT}.$$

Setzt man daher

$$s=4\pi ni, \tag{22}$$

so bleibt wegen der 2. der Gleichungen 18

$$\frac{d\sigma}{dT}=t\frac{d(hx)}{dT}+\frac{d\tau}{dT} \tag{23}$$

Nehmen wir noch der Einfachheit halber an, dass der langgestreckte Körper ein Rotationskörper ist, so sind selbstverständlich alle Differentialquotienten nach $S$ gleich Null. Setzen wir noch $\sigma - thx = \psi_i$, $\tau = \psi_a$, so liefern die Gleichungen 21 und 23

$$\lambda\frac{d\psi_i}{dn_i}+\mu\frac{d\psi_a}{dn_a}=(\mu-\lambda)\frac{d(hx)}{dn_i},$$

$$\frac{d\psi_i}{dT}=\frac{d\psi_i}{dT},\ \frac{d\psi_i}{dS}=\frac{d\psi_a}{dS}.$$

Es ist also $\psi$ das Potential einer magnetischen Masse, welche mit der unendlich kleinen Obenflächendichte $\lambda-\mu/4\pi\ d(hx)/dn_i$ den Körper bedeckt, während aussen und innen die Magnetisirungsconstanten $\mu$ und $\lambda$ herrschten. Daher ist $\psi$ und folglich auch $\sigma$ und $\tau$ überall sehr klein und für unendlich langgestreckte Körper nach 19,20 und 22

$$\varphi_a=tf=-\frac{4\pi ni\lambda}{\mu}f.$$

Es is also wieder $\varphi_a$ dem $\mu$ verkehrt proportional, woraus sich dieselben Consequenzen wie früher ergeben.

c) Maxwell findet in seiner ersten, in den Jahren 1861 und 1862 im Phil. Mag. publicirten Electricitätstheorie, wenn man ganz seine dortigen Bezeichnungen beibehält, im Ausdrucke für die Kraft, welche scheinbar in einem Punkte in der Abscissenrichtung auf die Volumeneinheit wirkt, das Glied $\alpha m$, worin er $\alpha$ als magnetische Kraft, $m$ als Menge des freien Magnetismus bezeichnet. Ein anderes Glied $\mu/8\pi\ d(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)/dx$ wird hierbei einfach mit $dp_1/dx$ vereinigt und nur in den Fällen, wo $\mu$ variabel ist, besprochen. Es hat jedoch dieses Glied noch eine andere Bedeutung, indem es in einem speciellen

Falle gerade nochmals $\alpha m$ liefert, sodass die Gesammtkraft doppelt so gross ist, als sie von Maxwell angegeben wird. Da Maxwell die lebendige Kraft des Mediums bloss aus der Arbeit dieser und der analogen in den beiden anderen Coordinatenrichtungen wirkenden Kräfte berechnet, so findet er auch diese halb so gross, und man kann sich durch directe Berechnung der lebendigen Kraft aus den im Medium herrschenden Geschwindigkeiten der Wirbelbewegung überzeugen, dass die lebendige Kraft thatsächlich doppelt so gross ist, als sie von Maxwell gefunden wird.

## VII. *Der Brechungsindex electrischer Strahlen in Alkohol; von H. O. G. Ellinger.*

In einer früheren Mittheilung[1]) habe ich erwähnt, dass es mir gelungen sei, den Brechungsindex electrischer Strahlen in Wasser zu bestimmen und dabei einen der Theorie entsprechenden Werth gefunden habe. Auf ganz dieselbe Weise habe ich nun auch den Brechungsindex für Alkohol (96 Proc.) bestimmt. Zuerst überzeugte ich mich davon, dass die Strahlen sich durch den Alkohol fortpflanzen konnten, indem ich zwischen den Hertz'schen Spiegeln mit gemeinsamer Axenebene ein Gefäss aufstellte, das 1 m hoch, 1 m lang und ca. 8 cm breit war, und dessen Mitte 1 m über dem Fussboden lag; dieses Gefäss wurde ganz mit ca. 80 l Alkohol gefüllt und auf allen Seiten mit Metallplatten umgeben. Danach schloss ich den Alkohol in ein Holzgefäss ein, das die Gestalt eines Prismas hatte; es war 1 m hoch, 1.15 m lang, hatte einen Winkel von $8^0\,16'$; und hielt so ca. 90 l. Im secundären Spiegel entstanden Funken, wenn die Spiegel einen Winkel von ca. $33^0$ mit einander bildeten, während das Prisma in seiner Hauptstellung stand. Das gibt einen Brechungsindex für den Alkohol, der sehr nahe an 4,9 liegt, einen Werth, der sehr gut der Theorie entspricht, indem die Dielectricitätsconstante, wie dieselbe aus verschiedenen Versuchsreihen vorliegt, nur wenig von $4{,}9^2$ abweicht.

---

Von sonst bemerkungswerthen Beobachtungen erwähne ich noch die Folgenden. Ich nahm den secundären Leiter vom Spiegel fort und hielt ihn senkrecht vor den primären Spiegel, indem die Strahlen sich nur durch die Luft fortpflanzten. Sehr leicht traten dann Funken in dem mit dem secundären Leiter verbundenen Funkenmikrometer auf, besonders wenn der Leiter sich in der Nähe der Axenebene befand. Aber auch wenn ich den Leiter entfernte, sodass nur das

1) H. O. G. Ellinger, Wied. Ann. **46.** p. 513. 1892.

Mikrometer den Strahlen ausgesetzt war, traten Funken deutlich hervor, wobei ich bemerke, dass die zwei senkrechten Metallstäbe des Mikrometers, zwischen den die Funken entstanden, nur die Längen von 7,3 und 4,7 cm hatten. Das Mikrometer befand sich in der Höhe des primären Funkens. Der Inductor wurde von vier Bunsen'schen Elementen getrieben.

Kopenhagen, November 1892.

## VIII. *Ueber die Electrisirung der Luft bei Glimm- und Büschelentladung; von Ad. Heydweiller.*

Faraday hat einmal die Ansicht ausgesprochen, dass die Büschelentladung der Electricität im Allgemeinen zwischen einem Leiter und der Luft stattfinde, und dass die letztere dabei in allmählich fortschreitender Weise electrisch geladen werde.[1] Diese Anschauung hängt eng zusammen mit der anderen, dass die Entladung beginne, sobald nur an einem Punkte des Dielectricums eine gewisse Maximalspannung erreicht sei.[2] Nun habe ich früher gezeigt[3], dass diese letztere Annahme nicht zutreffend ist, dass vielmehr bei der Entladung zwischen einer isolirten und einer abgeleiteten Electrode das Entladungsgefälle an der ersteren um so grösser wird, je mehr es an der letzteren sinkt, während das arithmetische Mittel aus beiden vom Abstand der Electroden nahe unabhängig ist. Dieser Satz der zunächst nur für Funkenentladungen nachgewiesen war, hat, wie ich noch begründen werde, eine allgemeinere, von der Form der Entladung unabhängige Gültigkeit.

Die Annahme einer Electrisirung der Luft bei Büschel- und Glimmentladung und zwar einer positiven Electrisirung ist neuerdings von verschiedenen Physikern[4] aufgenommen und zur Erklärung gewisser Entladungserscheinungen, namentlich des scheinbaren Kathodengefälles und eines polaren Gegensatzes herangezogen worden, und Hr. Warburg hat Versuche veröffentlicht, welche zum Beweise dieser Annahme dienen sollen.

Dieser Nachweis ist aber nicht einwurfsfrei. Hr. Warburg bestimmte mittelst einer Wage die Anziehung zwischen zwei horizontalen Platten, von denen die eine zur Erde abgeleitet war, und die als Electroden für die Glimmentladung in ver-

1) Faraday, Exp. Res. in Electr. Art. 1434.

2) Faraday, l. c. Art. 1370.

3) Heydweiller, Wied. Ann. **40.** p. 464. 1890.

4) O. Lehmann, Wied. Ann. **22.** p. 305. 1884; Schuster, Proc. R. Soc. Lond. **47.** p. 541. 1890; Warburg, Wied. Ann. **45.** p. 1. 1892.

dünnter Luft dienten. Er fand diese Anziehung erheblich verschieden, je nachdem die isolirte Electrode die Kathode oder die Anode war, und zwar grösser im ersten Falle. Ausserdem versuchte er nach einer öfter angewandten Methode, mittels einer eingeführten Metallsonde nämlich, das Kathodengefälle direct zu messen, das sich hiernach bedeutend grösser als das Anodengefälle ergibt.

Nun liesse sich vielleicht die verschiedene Anziehung darauf zurückführen, dass in einem Falle die obere, in einen Schutzkasten eingeschlossene, im zweiten die untere Platte als Kathode bedeutend stärker erwärmt wird, als die andere, und was die Messung des Kathodengefälles mit der Sonde betrifft, so setzt dieselbe, wie Hr. Warburg richtig bemerkt[1]), voraus, dass das von der Glimmentladung durchflossene Gas wie ein Metall oder Elektrolyt leite; alle genaueren Messungen stimmen aber darin überein, dass auf den Durchgang der Electricität durch Gase das Ohm'sche Gesetz nicht anwendbar ist. Ausserdem hat Hr. Hallwachs gezeigt[2]), dass das Potential eines mit ultraviolettem Licht bestrahlten und dabei angeblasenen Leiters bis zu 100 Volt steigen kann; beide Bedingungen sind aber für die der Glimmentladung ausgesetzte Sonde erfüllt.

Ich habe daher fernere Versuche zur Entscheidung der Frage, ob bei der Glimmentladung in Luft eine Electrisirung derselben stattfindet, angestellt; dieselben beziehen sich allerdings nicht auf verdünnte, sondern nur auf Luft von normalem Druck.

Zu diesen Versuchen diente ein Spiegelelectrometer für hohe Spannungen, das Hr. Universitätsmechaniker Siedentopf hier nach meinen Angaben angefertigt, und das ich an anderer Stelle schon beschrieben habe.[3])

Das Instrument (Fig. 1 und 2) ist im Wesentlichen eine Drehwage. In eine an harten Messingdrähten von 0,01 cm Dicke und 9—10 cm Länge bifilar aufgehängte Kugel $A$ von 3,5 cm Durchmesser sind seitlich zwei horizontale passend gebogene Arme $a$ eingeschraubt, die in Kugeln $b$ von 2 cm

1) Warburg, Wied. Ann. **31.** p. 553. 1887.
2) Hallwachs, Wied. Ann. **40.** p. 343. 1890.
3) Heydweiller, Ztschr. f. Instrumentenkunde. **12.** p. 377. 1892.

Durchmesser enden. Die Bifilaraufhängung ist zum Schutz gegen Glimmentladungen in eine Röhre *B* von 3,5 cm äusserem Durchmesser eingeschlossen und kann innerhalb derselben vertikal verschoben werden. An diese Röhre sind seitlich zwei Ringe *R* von 10 cm Durchmesser aus 0,5 cm dickem Draht so befestigt, dass die beiden Kugeln *b* auf ihren horizontalen Axen liegen und die von den Ringen auf sie ausgeübten Drehungsmomente sich addiren. Oben in die Röhre wird der mit einer Klemmschraube für die Zuleitung versehene Kopf *k* eingeschoben, der die Bifilaraufhängung trägt; diese letztere kann leicht gegen eine von anderem Fadenabstande ausgewechselt, und dadurch die Richtkraft im Verhältniss von ungefähr 1 : 4 : 16 geändert werden. Alle diese Theile bestehen

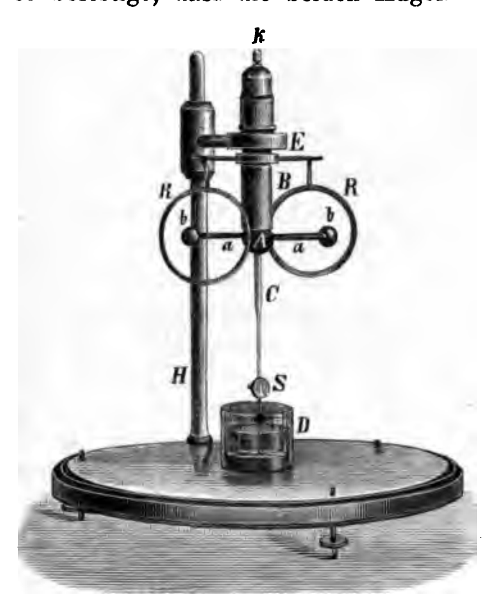



Fig. 1 ($^1/_8$ nat. Grösse).

aus Messing. In die mittlere Kugel *A* ist ein unten dünn ausgezogener vertikaler Glassstab *C* eingekittet, der den Spiegel *S* und einen Dämpferflügel *D* trägt. Die Dämpfung wird bei den grösseren Richtkräften in ausgezeichneter Weise durch ein Pflanzenöl (Mohnöl)

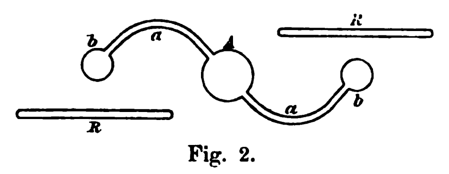



Fig. 2.

besorgt; bei der kleinsten Richtkraft ist ein leichtflüssigeres Oel (Vaselinoel) rathsam. Das Gewicht des Bifilarkörpers beträgt etwa 370 gr. Die Röhre *B* wird von einem längs eines Holzstabes *H* vertikal verschiebbaren Ebonitring *E* getragen und das Ganze zum Schutz gegen äussere Influenz, um die

Constanz des Reductionsfactors zu sichern, von einem 44 cm weiten und 50 cm hohen Zinkcylinder umgeben, der zur Erde abzuleiten ist; in der Ansicht, (Fig. 1), ist derselbe fortgelassen. Aus (Fig. 2) ist die gegenseitige Stellung der Ringe *R* uud Kugeln *b* zu ersehen. Dieselbe ist so gewählt, dass die Kugeln sich in einem nahezu gleichförmigen Felde bewegen, indem die Kraft, welche die mit den Kugeln auf gleiches Potential geladenen Ringe auf die ersteren ausüben, in Bezug auf axiale Verschiebungen der Kugeln nahezu ein Maximum, in Bezug auf radialle Verschiebungen ein Minimum ist. Daher sind einerseits die Potentiale, auf die das Instrument geladen wird, sehr nahe den Quadratwurzeln aus den Ausschlägen proportional, andererseits ist der Reductionsfactor von kleinen Aenderungen der Einstellung unabhängig. Die grösste Abweichung von der Proportionalität zwischen Spannung und Quadratwurzel aus den Winkelausschlägen beträgt bei Auschlägen zwischen 0,025 und 0,2 nur 0,45$^0/_0$. Durch Vergrösserung des Abstandes zwischen Ringen und Kugeln um etwa $^1/_2$ cm erreicht man es, dass die Spannung der Quadratwurzel aus den nicht auf Bogen reducirten Scalenablesungen bis zu Auschlägen von 400 p. bei 1000 p. Scalenabstand auf 1$^0/_0$ genau proportional sind. Mit den drei verschiedenen Bifilaraufhängungen eignet sich das Instrument zur Messung von Spannungen zwischen etwa 2000 und 50 000 Volt (7 und 170 e. s. E.) und hat sich bei vielen Hunderten von Potentialmessungen, die ich damit angestellt habe, bereits auf das Beste bewährt.

Der Isolationswiderstand beträgt bei einer Spannung von 30 000 Volt auch bei feuchtem Wetter noch über 10 000 Megohm, wenn die Oberflächen der Ebonitringes *E* und des Glasstabes *C* gut gereinigt sind. Bei etwa 50000 Volt beginnt Glimmentladung zwischen den Ringen *R* und dem Schutzcylinder.

Die Aichung und Graduirung des Instrumentes geschah durch Vergleichung mit einer absoluten Kirchhoff-Thomson'schen Electrometerwage mit Schutzringkondensator[1]) in ähnlicher

1) Derselbe ist in sehr schöner, genauer Ausführung von Hrn. Universitätsmechaniker Siedentopf für das hiesige physikalische Institut angefertigt, und von Hrn. Prof. Röntgen mir freundlichst zur Verfügung gestellt worden.

Weise, wie es von Hrn. Czermak[1]) und Hrn. Paschen[2]) für das Righi'sche Reflexionselectrometer eingehend beschrieben worden ist. Die bewegliche Platte des Schutzringkondensators hat einen Durchmesser $2r = 12{,}087$ cm bei 18°, der Schutzring einen inneren Durchmesser $2r' = 12{,}338$ cm, einen äusseren von etwa 24 cm, die feste Platte einen solchen von etwa 20 cm. Die Breite des Zwischenraums zwischen beweglicher Platte und Schutzring ist mithin $b = 0{,}126$ cm; die Dicke derselben beträgt 0,5 cm. Der Condensator wurde bei drei verschiedenen, durch Verschieben der festen Platte gemessenen Plattenabständen $a = 1{,}627$; 1,221; 0,823 cm benutzt, für welche sich seine Capacität nach der Kirchhoff'schen Formel:

$$c = \frac{(r + r')^2}{16\,a}\left\{1 - \frac{b^2}{\pi\,a\,(r + r')}\left(1 - \frac{b^2}{24\,a^2} + \frac{b^4}{240\,a^4}\right)\right\}^{3)}$$

berechnet zu: 5,727; 7,630; 11,318 E. S. E.

Entspricht einem bestimmten Potential die Anziehung $m$ gr des absoluten Electrometers, der auf Bogen reducirte Ausschlag $n$ des Spiegelelectrometers bei 1000 p. Scalenabstand, und ist $g$ die Beschleunigung der Schwere, so ist der Reductionsfaktor des letzteren Instrumentes mit dem die Quadratwurzeln aus den reducirten Ausschlägen zu multipliciren sind, um die Potentiale in c. g. s. Einheiten (electrostatisches Maass) zu erhalten:

$$R = \sqrt{\frac{2\,g\,a}{c}\,\frac{m}{n}}$$

Für die beiden grössten Richtkräfte meines Instrumentes ergab sich $R_1 = 9{,}215$ und $R_2 = 4{,}550$.

Die nachstehende Tabelle enthält ferner das Ergebniss einer ebenfalls durch Vergleich mit der absoluten Electrometerwage vorgenommenen Graduirung; dieselbe geschah bei

1) Czermak, Wien. Ber. (2) **97.** p. 307. 1888; Exn. Rep. **24.** p. 707. 1888.

2) Paschen, Wied. Ann. **37.** p. 69. 1889.

3) Kirchoff giebt, Ges. Abh. p. 117, die Formel:

$$c = \frac{(r + r')^2}{16\,a}\left\{1 - \frac{8\,a}{\pi\,(r + r')}\left(\frac{b}{2a}\,\mathrm{tg}\,\frac{b}{2\,a} + \log\cos\frac{b}{2\,a}\right)\right\};$$

durch Entwicklung von tg $b/2a$ und log cos $b/2a$ in Reihen erhält man die obige, für die Berechnung weit bequemere Form.

mittlerer Richtkraft des Spiegelelectrometers, hat aber natürlich auch für die anderen Richtkräfte Gültigkeit, worin ein besonderer Vorzug des Electrometers liegt.

Die erste Spalte der Tabelle enthält die Scalenablesungen $n$ bei 1000 p. Scalenabstand, die zweite die Correctionen $\nu$ in Scalentheilen, welche die auf Bogen reducirten Scalenablesungen den Quadraten der Potentiale proportional machen.

In Zukunft werde ich das Electrometer so einrichten, dass die Reduction auf Bogen fortfällt und auch die kleinsten Ausschläge auf 1 % dem Quadrate der Spannung proportional sind.

| $n$ | $\nu$ | $n$ | $\nu$ | $n$ | $\nu$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | + 0,2 | 120 | + 0,2 | 240 | − 1,4 |
| 20 | + 0,4 | 140 | 0,0 | 260 | − 1,3 |
| 40 | + 0,5 | 160 | − 0,3 | 280 | − 0,8 |
| 60 | + 0.5 | 180 | − 0,7 | 300 | 0,0 |
| 80 | + 0,5 | 200 | − 1,0 | 320 | + 0,9 |
| 100 | + 0,4 | 220 | − 1,3 | 340 | + 1,4 |

Mit diesem Electrometer wurden nun, immer unter Verwendung der grössten Richtkraft, folgende Versuche angestellt.

Zunächst wurde die zur Glimmentladung an einer Messingkugel von 0,5 cm Durchmesser in normaler Luft erforderliche Spannung für positive, wie für negative Ladung gemessen, um einen etwaigen polaren Unterschied festzustellen. Zu diesem Zwecke war das Electrometer mit dem einen Pol einer kleinen Holtz'schen Influenzmaschine (Scheibendurchmesser 40 cm) und einer Leydener Flasche von 0,0075 Mikrofarad Capacität verbunden, während die äussere Belegung der letzteren und der zweite Pol der Influenzmaschine zur Erde abgeleitet waren. Mit dem Knopf der Leydener Flasche war durch einen etwa meterlangen, 0,2 cm dicken Draht die 0,5-cm-Messingkugel verbunden; die Aufstellung erfolgte so, dass die Entladungsstelle der Electrode nicht von dem Glimmlicht der Influenzmaschine bestrahlt wurde, sowie dass die letztere keine merkliche Influenz auf die Electrode ausübte; der letztere Einfluss wurde dadurch geprüft, dass die Maschine abwechselnd auf der einen und der anderen Seite negativ erregt wurde; die Entladung zeigte sich davon unabhängig, wobei die Electrode sich nahe in der Scheibenebene befand.

Der Beginn der Entladung wurde entweder durch das Gehör oder durch die Lichterscheinung im Dunkeln, aber meist galvanometrisch festgestellt, indem der Electrode eine zweite in solchem Abstande, dass eine merkliche Influenzwirkung nicht mehr stattfand (20 cm)., gegenübergestellt und diese durch ein empfindliches Galvanometer (Reductionsfactor etwa $10^{-5}$ Amp./absolutes Bogenmaass) zur Erde abgeleitet ward. Das Galvanometer konnte von der gleichen Stelle aus wie das Spiegelelectrometer beobachtet werden. Es zeigte vor Beginn der Entladung schon einen kleinen von Leitungs- oder Convectionsströmen (Staub) herrührenden Ausschlag; der Beginn der Glimmentladung war aber durch einen stärkeren Impulsivausschlag deutlich markirt.

Auch das Electrometer selbst lässt das Einsetzen der Entladung erkennen. Bei gleichmässigem Drehen der Maschine steigt der Ausschlag bei der vorzüglichen Dämpfung ganz gleichförmig ohne Schwingungen; im Augenblicke der Entladung zeigt sich dagegen eine kleine Schwankung und danach nur geringe Vergrösserung des Ausschlages, der erst bei vermehrter Entladungsintensität infolge stärkeren Drehens erheblicher wächst.

Die Einzelbeobachtungen stimmen denn auch gut miteinander überein; so ergab sich bei einer abgeleiteten Electrode von 0,5 cm Durchmesser:

für – Entladung, Ausschlag: 99,2; 99,0; 100,2; Potential: 91,9 e. s. E.
„ + „ „ 100,0; 100,5; 100,7; „ 92,8 e. s. E.;

an einem anderen Tage mit abgeleiteter Electrode von 2 cm Durchmesser:

für – Entladung, Ausschlag: 96,5; 96,0; 95,8; Potential: 90,6 e. s. E.
„ + „ „ 97,5; 96,5; 98,0; „ 90,9 e. s. E.

Die Unterschiede zwischen + und – Entladungspotential bei diesen und anderen Versuchen mit ähnlicher Anordnung sind sehr klein und liegen völlig innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler. Auch die Steigerung des Potentials bei wachsender Entladungsintensität lässt keinen Unterschied zwischen + und – Entladung erkennen.

Dagegen treten nicht nur erhebliche Aenderungen im Entladungspotential, sondern auch polare Gegensätze auf, sobald influirende Körper, namentlich Nichtleiter, wie lackirte Holz-

gestelle und Tische, Glasstützen u. dgl. der Entladungselectrode genähert werden. So wurde in einem Falle bei Anwendung eines Funkenmikrometers mit Glasstützen das + Entladungspotential auf 95,0, das — auf 100,1 e. s. E., in einem anderen das + auf 100,0, das — auf 103,9 gesteigert.

Ich vermuthe daher, dass auch in anderen Fällen, wo solche polare Unterschiede beobachtet wurden, dieselben auf ähnliche Ursachen zurückzuführen sind.

Zur weiteren Untersuchung der vorliegenden Frage ersetzte ich nun die Kugeln *b* des Electrometers durch kleinere Kugeln von 0,5 cm Durchmesser mit Zuleitungsdrähten von 0,2 cm Dicke; die Kugeln wurden wieder in die Lage der Maximalwirkung (hier 2,25 cm Abstand vom Mittelpunkte der Ringe) gebracht und das Potential gesteigert, bis Büschel- oder Glimmentladung an denselben eintrat. Infolge der Influenzwirkung der Ringe war die hierzu erforderliche Spannung bedeutend höher, als bei der gleichgrossen frei in Luft befindlichen Kugel. Der Reductionsfactor des Electrometers war in diesem Falle $R = 11,27$ und wurde ebenso, wie auch die Graduirung, wie oben angegeben, ermittelt.

Die Entladung der Kugeln gegen die äussere Schutzhülle erfolgte in radialer Richtung, sodass der electrische Wind dem Electrometer kein merkliches Drehungsmoment ertheilte.

Aus wiederholten Messungen ergab sich

für — Entladung, Ausschlag: 180,0; Potential: 150,4 e. s. E.
„ + „ „ 177,0; „ 149,2 e. s. E.;

Auch hier ist also ein nennenswerther polarer Unterschied nicht vorhanden. Ferner zeigte sich genau derselbe Gang des Ausschlages, wie bei den vorigen Versuchen, ganz allmähliche Steigerung und nach Beginn der Entladung Schwanken um einen constanten Werth bei gleichmässigem Drehen der Influenzmaschine; bei stärkerer Electricitätszufuhr liess sich der Ausschlag bei +, wie bei — Entladung höchstens um 8,5 Theilstriche, das Potential um 3,6 e. s. E. steigern, ohne dass ein Unterschied zwischen beiden Entladungen zu erkennen gewesen wäre.

Dieses Verhalten entspricht nicht demjenigen, welches beeiner Electrisirung der Luft, namentlich einer unipolaren, bei der Glimmentladung zu erwarten wäre. Wäre beispielsweise

die Luft in dem Electrometer durch die negative Entladung positiv electrisirt worden, so hätte diese positive Electrisirung durch Influenzwirkung auf die Electrometertheile eine Vergrösserung des Ausschlages ohne Potentialsteigerung bewirken müssen. Dass eine solche Vergrösserung nicht eintrat, ergibt sich auch daraus, dass bei dem Ausschlag 183,4 (berechnetes Potential 152,2 e. s. E.), also nach Beginn der Glimmentladung, eine Entladung zwischen zwei Kugeln von 2 cm Durchmesser bei 2 cm Schlagweite in normaler Luft eintrat, wozu bei drei verschiedenen Messungen mit den grossen Kugeln im Electrometer die Potentiale 152,2; 151,1; 151,4 e. s. E. erforderlich waren.

Die Lichterscheinungen bei der Entladung an den kleinen Kugeln waren die bekannten; bei negativer Entladung der kleine Lichtpinsel, bei positiver das Glimmlicht abwechselnd mit dem positiven Büschel; es schien von Zufälligkeiten abzuhängen, ob das eine oder der andere auftrat, ein Unterschied im Potential war damit nicht verbunden.

Ich schliesse aus diesen Versuchen: *dass bei der Glimm- oder Büschelentladung in normaler Luft 1. kein polarer Unterschied in Bezug auf das Entladungspotential und 2. keine Electrisirung der Luft stattfindet.*

Den ersten Theil dieses Satzes werde ich später noch an der Hand zahlreicher Versuche eingehender begründen und nachweisen, dass scheinbare Abweichungen davon auf Influenzwirkung benachbarter fester Körper, namentlich dielectrischer, zurückzuführen sind.

Ob es wahrscheinlich ist, dass verdünnte Luft sich anders verhält, als normale, lasse ich dahingestellt, mache aber darauf aufmerksam, dass gerade bei den Versuchen in Vacuumgefässen die Wandungen derselben einen wesentlichen Einfluss auf die Entladungserscheinungen ausüben müssen.

Würzburg, November 1892.

---

## IX. *Nachtrag zu dem Aufsatze: „Bemerkungen zu der Arbeit des Hrn. O. Wiener: Stehende Lichtwellen und die Schwingungsrichtung polarisirten Lichtes"; von P. Drude.*

In dem in der Ueberschrift genannten Aufsatze [1]) habe ich zu zeigen versucht, dass die bekannten Wiener'schen Versuche nicht zwischen der Fresnel'schen oder Neumann'schen Lichttheorie entscheiden könnten. Wie ich durch mündliche und schriftliche Mittheilung von Hrn. Wiener erfahren habe, ist dies auch seine eigene Ansicht. Meine Publication war dadurch veranlasst, dass ich das Wort: „chemisch wirksame Schwingung" [2]) nicht in dem Sinne verstanden habe, welchen Hr. Wiener, wie er mir mittheilt, dem Worte gab. — Es mag dies meine Schuld sein, aber ich will als Entschuldigung für mich nur anführen, dass von mehreren Seiten die Wiener'schen Versuche als entscheidend zwischen der Fresnel'schen und Neumann'schen Theorie angesehen sind [3]), und dass dies wohl darin begründet ist, dass Wiener erstere für weit plausibeler als letztere hinstellt. — Um derartigen zu weit gehenden Schlüssen entgegenzutreten habe ich jene Publication für wünschenswerth erachtet.

In einem Punkte möchte ich ferner die von mir damals geschriebenen Ausführungen corrigiren. Ich habe (l. c. p. 160) gesagt, dass man aus den Wiener'schen Versuchen nicht das Resultat gewinnen könne, „dass die chemische Wirkung der Lichtwelle an das Vorhandensein der Schwingungen der electrischen und nicht der magnetischen Kräfte geknüpft ist. Ich hatte bei dieser Behauptung die Anschauung, dass man die Existenz magnetischer Kräfte auch im Schwingungsknoten ihres Vectors „erster Art" nicht leugnen darf, wenn es denn

1) Drude, Wied. Ann. **41.** p. 154, 1890.

2) O. Wiener, Wied. Ann. **40.** p. 236, 1890.

3) Man vgl. z. B. A. Cornu, Compt. rend. **112.** p. 365. 1891. — A. Potier, Compt. rend. **112.** p. 383. 1891. — Ausserdem findet sich diese Ansicht mehrfach in populären Darstellungen vertreten.

auch magnetische Kräfte anderer Art als die im üblichen Sinne so genannten sind, wie man z. B. bei einer in stehender Wellenbewegung schwingenden Saite, sowohl am Schwingungsbauch, wie am Schwingungsknoten die Existenz elastischer Kräfte annehmen muss. — Diese Auffassung des Wortes „magnetische Kraft" ist aber von der üblichen abweichend. Ich halte daher jene Behauptung nicht mehr aufrecht und stimme in dieser Hinsicht dem Wiener'schem Schlusse bei.

Da ich kürzlich bei einer Uebersicht [1]) über die verschiedenen Lichttheorien zu einer besseren Darlegung der alten Streitfrage über die Schwingungsrichtung polarisirten Lichtes geführt wurde, als wie ich sie in den oben citirten Aufsatze gab, weil ich auf die physikalische Bedeutung der dort erwähnten beiden verschiedenartigen Schwingungszustände einging, so möchte ich diese Darlegung hier noch kurz folgen lassen:

Bei jeder Lichtbewegung befolgen zwei periodisch sich ändernde Vectoren [2]) verschiedene Gesetze. Falls die Lichtbewegung in ebenen Wellen besteht, liegen in isotropen durchsichtigen Medien diese Vectoren in resp. senkrecht zur Polarisationsebene. Dem Quadrat des einen Vectors ist die potentielle Energie, dem Quadrat des anderen die kinetische proportional (d. h. in isotropen Medien). Die verschiedenen Lichttheorien unterscheiden sich nur darin, dass diese Bedeutung der beiden Vectoren zum Theil gegenseitig vertauscht erscheint.

Wiener hat zuerst eine Versuchsanordnung getroffen, welche es ermöglicht, jene beiden Vectoren einzeln auf ihre physikalische oder chemische Wirkungsweise untersuchen zu können. Bei stehender Wellenbewegung liegen nämlich die Schwingungsbäuche beider Vectoren an verschiedenen Stellen

1) P. Drude, Gött. Nachr. **10.** p. 366; **11.** p. 392. 1892.

2) In dem oben citirten Aufsatze habe ich diese den Schwingungszustand erster und zweiter Art genannt. Hinsichtlich des letzteren machte ich damals die allgemeinere Annahme, dass derselbe keine Vectorgrösse zu sein brauche. Wenn diese auch vielleicht unnöthig allgemein ist, so verlieren darum die Entwickelungen jenes Aufsatzes nicht ihre Gültigkeit; ich habe sie in der That auch in einem späteren Aufsatze (Wied. Ann. **43.** p. 178. 1891) für den Fall als richtig hingestellt, dass der Zustand zweiter Art eine Vectorgrösse sei.

des Kammes. Photographische — Fluorescenz[1]) (und wahrscheinlich Wärme-)Wirkung findet im Schwingungsbauche desjenigen Vectors statt, welcher die Fresnel'schen Gesetze befolgt.

Sollte es sich herausstellen, dass überhaupt nur dieser Vector objectiv wahrnehmbare Wirkungen erzeugt, so wird man, wenn man optische Formeln für nur eine der beiden bei Lichtbewegung periodisch sich ändernden Vectorgrössen geben will, die Fresnel'schen den Neumann'schen vorziehen. Damit ist dann aber noch immer nicht entschieden, dass dieser Vector, welcher senkrecht zur Polarisationsebene liegt, mit den Lichtschwingungen der mechanischen Theorien, d. h. dem kinetischen Vector, zu identificiren sei. Denn ob jener Vector kinetischer oder potentieller Natur sei, ändert sich je nach der zu Grunde gelegten Theorie — er ist z. B. nach Maxwell's Auffassung potentieller Natur, d. h. dasjenige, was man in der mechanischen Auffassung als Lichtschwingung bezeichnet, würde nach Maxwell in der Polarisationsebene liegen. — Die Discussion dieser Fragen hat aber vorläufig nur ein theoretisches Interesse, sie ist gegenstandslos für die praktische Physik, d. h. für die richtige Beschreibung der Erscheinungen.

Göttingen, März 1892.

1) Vgl. P. Drude u. W. Nernst, Wied. Ann. 45. p. 460. 1892.

## X. *Ueber die Berechnung magnetooptischer Erscheinungen; von P. Drude.*

---

Für die Berechnung magnetooptischer Erscheinungen sind kürzlich von Hrn. Goldhammer[1]) und mir[2]) Formelsysteme aufgestellt. Beim Vergleich meiner Formeln mit denen Goldhammer's habe ich behauptet, dass die Differentialgleichungen in beiden Systemen formell identisch seien, nur dass an die Stelle einer einzigen reellen magnetooptischen Constanten meines Systems eine complexe Constante, d. h. zwei magnetooptische Constanten bei Goldhammer treten, während nur die Grenzbedingungen Goldhammer's nicht in die meinigen überzuführen möglich schien. Neuerdings[3]) sucht nun Hr. Goldhammer zu beweisen, dass auch seine Grenzbedingungen formell identisch mit den von mir angewendeten seien. Diese Identität wird daraus gefolgert, dass, wie Goldhammer behauptet, die der Grenze parallelen Componenten $Q$, $\mathfrak{R}$ der electromotorischen Kraft stetig seien beim Durchgang durch die Grenze.

Dieser Behauptung kann ich nicht zustimmen. Nach Goldhammer ist gemäss seiner Formeln (1), (9), (17), (18) der ersten Abhandlung:

$$\mathfrak{Q} = -\frac{\partial f''}{\partial y} - \frac{1}{\mathfrak{V}_0^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial t}$$

und gemäss der letzten der Formeln (23):

$$\mathfrak{V}_0^2 f'' = \mu_1\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) + \mu_2\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) + \mu_3\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Da nun nach Goldhammer $U$, $V$, $W$ nebst ihren ersten Differentialquotienten nach $x$, $y$, $z$ stetig beim Durchgang durch die Grenze ($yz$-Ebene) sind, so ist es $f''$ und daher $\mathfrak{Q}$ nicht.

In der That ergeben auch die Formeln (30), deren Entstehung aus den Grenzbedingungen mir übrigens bisher immer

---

1) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. **46.** p. 71. 1892.

2) P. Drude, Wied. Ann. **46.** p. 353. 1892.

3) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. **47.** p. 345. 1892.

noch dunkel geblieben ist[1]), für die Amplituden des reflektirten Lichtes im allgemeinsten Fall andere Resultate, als meine Formeln (68). Die letztere derselben unterscheidet sich nämlich durch das Vorzeichen des mit $b_2$ proportionalen Gliedes von den entsprechenden Formeln, welche ich aus dem Goldhammer'schen Formelsystem (30) berechnet habe.[2]) — Da jenes Glied aber keinen merklichen Einfluss auf die Beobachtungen hat, wie ich l. c. p. 389 hervorhob, so müssen sich allerdings bei der Anwendung auf das Kerr'sche Phänomen meine Schlussresultate von denen Goldhammer's nur durch die oben erwähnte Beziehung der magnetooptischen Constanten unterscheiden.

Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, ob man mit Goldhammer zwei magnetooptische Constanten einführen muss, um in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen zu kommen, oder mit mir nur eine.

Im Anfang der zweiten der citirten Arbeiten sagt Hr. Goldhammer, dass er zugebe, dass meine Formeln sich in allen Einzelheiten den Beobachtungen gut anschlössen, dagegen ist am Schlusse seiner Arbeit zu lesen: „*alle* Erklärungssysteme, welche, wie das von Drude, nur eine einzige Constante einführen, stehen daher mit der Erfahrung nicht im Einklang.“

Diese beiden verschiedenen Meinungen Goldhammer's sind nur dann miteinander vereinbar, wenn die Beobachtungen, aus denen Goldhammer seine Schlüsse zieht, (es waren dies Beobachtungen von Sissingh) abweichen von den von mir benutzten (den Righi'schen). Ich habe damals die Sissingh'schen Beobachtungen nicht berechnet, weil ich sagte, dass sie mit den Righi'schen übereinstimmten. Ich stelle zum Beweise des Letzteren beide Beobachtungsreihen hier zusammen: Die Righi'schen Beobachtungen habe ich auf gleiche Einfallswinkel

---

1) Die Darstellung Goldhammer's scheint mir mehrfach schwer verständlich. Es sind z. B. seine Grenzbedingungen nicht vereinbar mit seinen Differentialgleichungen (19), wie Goldhammer selbst kürzlich bei Besprechung der electrischen Lichttheorie gewöhnlich brechender Körper constatirt hat. (Wied. Ann. 47. p. 265. 1892.)

2) Einen Rechenfehler meinerseits halte ich für ausgeschlossen, da ich die Rechnung zweimal unabhängig von einander gemacht habe.

interpolirt, wie die von Sissingh benutzten, und die in Minuten beobachteten Winkelwerthe sämmtlich mit dem constanten Faktor 0,72 multiplicirt, um den Vergleich zu erleichtern. $\varphi$ bedeutet den Einfallswinkel, $s_r$, $p_r$, $\alpha_0$, $\alpha$ haben die Bedeutung, wie ich sie in meiner früheren Arbeit angewandt habe, *S* bezieht sich auf die Sissingh'schen, *R* auf die Righi'schen Beobachtungen.

| $\varphi$ | $s\,2_r$ | | $2\,p_r$ | | $2\,\alpha_0$ | | $2\,\alpha$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *S* | *R* | *S* | *R* | *S* | *R* | *S* | *R* |
| 6° | −1,0 | | 1,0 | | | | | |
| 12 | −1,9 | −2,0 | 2,0 | 1,9 | | | | |
| 24° 16′ | −3,8 | −4,2 | 3,9 | 3,8 | | | | |
| 36 10 | −5,7 | −5,3 | 6,2 | 5,6 | 8,1 | | −3,5 | |
| 51 22 | −6,2 | −6,2 | 8,0 | 7,3 | 6,8 | 8,8 | −0,5 | −3,9 |
| 61 30 | | | | | 6,1 | 6,3 | −0,3 | −0,7 |
| 71 25 | | | | | 5,6 | 5,5 | +2,2 | +1,4 |
| 76 30 | | | | | 5,0 | 4,4 | +2,7 | +2,7 |
| 82 30 | | | | | 4,9 | 3,9 | +3,9 | +3,0 |
| 86 | −1,7 | −2,0 | −1,8 | −2,2 | | | | |

Der Beobachtungsfehler von Sissingh kann bis 0,25 bei $2\,s_r$ und $2\,p_r$, bis 0,7 bei $2\,\alpha_0$ und $2\,\alpha$ betragen. Legen wir den Righi'schen Beobachtungen ebenso grosse Fehler bei, so ist wohl durch die Tabelle genügend nachgewiesen, dass meine Formeln auch die Sissingh'schen Beobachtungen im allgemeinen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler darstellen, da sie sich den Righi'schen Beobachtungen gut anschliessen. Der Mühe einer wirklichen Berechnung brauche ich mich daher wohl nicht zu unterziehen.[1])

Goldhammer zieht seinen Schluss, dass meine Formeln nicht mit der Erfahrung übereinstimmen, aus der Bemerkung, dass ein von ihm benutzter Hülfswinkel $\delta$ nach Beobachtungen von Sissingh zu $-$ 84° 25′, 3 berechnet wird, während er nach meinen Formeln zu $-$ 76° 16′ folge.[1]) Dies ist nach Goldhammer „ein vollkommener Widerspruch.“ Zu dieser Behauptung, sollte ich meinen, ist man erst berechtigt, wenn

1) Ein genauer Vergleich ist deshalb erschwert, weil die Sissingh'schen Beobachtungen an zwei verschiedenen Spiegeln angestellt sind.

2) Für Ni und Co würde nach meiner Theorie $\delta$ zu $-$ 60° folgen. nicht zu 80°, wie Goldhammer angibt.

man untersucht, inwieweit die mit dem falschen $\delta$ berechneten Werthe von den direkt gemachten Beobachtungen abweichen. Ich habe schon früher hervorgehoben, dass die magnetooptische Constante aus Beobachtungen an polarmagnetisirten Spiegeln weit genauer zu berechnen ist, als aus Beobachtungen an aequatorealmagnetisirten (wie die hier erwähnten Sissingh'schen sind). Ich finde darin eine besonders gute Bestätigung meiner Formeln, dass ich die Beobachtungen an letzteren Spiegeln quantitativ aus Beobachtungen an ersteren berechnen konnte, ja dass sich auch diejenigen Einfallswinkel, bei welchen ein Wechsel im Vorzeichen der beobachteten Drehungen eintritt, unabhängig von jeder magnetooptischen Constanten überhaupt berechnen lassen. Dies ist natürlich nach der Goldhammer'schen Theorie nicht der Fall, und schon aus diesem Grunde, abgesehen von anderen, muss ich mich dagegen verwahren, dass Hr. Goldhammer meine Theorie „als einen speciellen Fall der seinigen mit einer willkürlichen Beziehung zwischen zwei Constanten" hinstellt.

Ich halte daher an der Behauptung fest, dass man die bisher vorliegenden Beobachtungen durchaus mit Hülfe einer einzigen magnetooptischen Constanten berechnen kann. Es wäre mir lieb, wenn aus einem der physikalischen Institute Europa's neues Material zur Prüfung jener Behauptung hervorginge, welche dann besonders gut anzustellen ist, wenn an denselben Metallen die gewöhnlichen Reflexionsconstanten unter möglichster Vermeidung von Oberflächenschichten bestimmt werden.

Göttingen, 5. November 1892.

---

# XI. *Ueber die Spectren von Aluminium, Indium und Thallium; von H. Kayser und C. Runge.*

(Im Auszuge mitgetheilt von den Hrn. Verfassern nach den Abhandl. der Berl. Akad. d. Wissensch. 1892.)

---

Nachdem wir in dem dritten, vierten und fünften Abschnitt unserer spectralanalytischen Untersuchungen die Linienspectra aller Elemente der ersten und zweiten Gruppe des Mendelejeff'schen Systems, mit Ausnahme von Beryllium, festgestellt haben [1]), wenden wir uns zur dritten Gruppe. Deren erstes Element, *Bor*, scheint im Kohlebogen nur zwei Linien zu geben, deren Wellenlängen wir gleich

2497,80 und 2496,84

finden. Diese Linien treten im Kohlenbogen als Verunreinigung mit derselben Unvermeidlichkeit auf, wie etwa im sichtbaren Spectrum die $D$-Linien. Bei Einbringen von Borsäure in den Bogen werden die Linien sehr stark und kehren sich um. Andere Linien haben wir, bisher wenigstens, nicht mit Sicherheit finden können. Stärkere Linien sind jedenfalls im Bogen nicht vorhanden, ebensowenig die von Hartley noch aufgeführte Linie bei 3450,1.

Von den übrigen Elementen der dritten Gruppe kommt ein grosser Theil nicht in Betracht: die seltenen Erden und leider auch Gallium sind, soweit sie überhaupt käuflich sind, wegen des hohen Preises im Kohlebogen nicht zu verwerthen, da wir für zweimalige Durchphotographirung des ganzen Spectrums etwa ein Gramm Substanz brauchen, dessen Preis sich z. B. bei Gallium auf 400 M. stellen würde.

Es bleiben von der dritten Gruppe nur Aluminium, Indium, Thallium übrig, deren Linienspectra wir im Folgenden geben, wie wir sie im Bogen gefunden haben. Die Wellenlängen beruhen dabei wieder auf dem Bell'schen Werthe für die $D$-Linien: $D_1 = 5896,16$; $D_2 = 5890,19$.

---

1) Kayser u. Runge, Abhandl. d. Berl. Akad. 1890, 1891, 1892; Wied. Ann. **41**. p. 302. 1890; **43**. p. 385. 1891 u. **46**. p. 225. 1892.

## Aluminium.

Das Spectrum des Aluminiums ist mit dem Inductionsfunken im sichtbaren Theile von Kirchhoff, Thalén, Lecoq untersucht worden, im Ultraviolett von Hartley und Adeney, die kürzesten Wellenlängen von Cornu [1]); einige Linien hat auch Ames [2]) gemessen. Cornu gibt indessen nicht die Wellenlängen selbst, sondern eine Zeichnung des Spectrums und eine Formel, nach welcher sich die Wellenlängen aus denen des Wasserstoffs berechnen lassen sollen. V. A. Julius [3]) hat sie danach berechnet, und wir adoptiren seine Angaben beim Vergleich mit unseren Messungen. Das Bogenspectrum ist nur von Liveing und Dewar untersucht. Im Ultraroth gibt noch Becquerel zwei Linien, die er als „breit und stark, vielleicht mehrfache Linien" bezeichnet.

Wir haben das Bogenspectrum zwischen den Grenzen 670 $\mu\mu$ und 210 $\mu\mu$ photographirt, aber im ganzen sichtbaren Theile keine einzige Linie erhalten; Liveing und Dewar haben hier zwei Linien bei 6244 und 6234 gesehen, die bei uns sicher fehlen. Unsere ersten Linien sind das Paar zwischen den Calciumlinien *H* und *K*. Die folgende Tabelle enthält unsere Resultate in der üblichen Anordnung. — Im Bogen treten auch regelmässig die schönen Banden auf, welche der Thonerde zugeschrieben werden, und welche kürzlich von Hasselberg genau gemessen wurden. Wir haben sie unberücksichtigt gelassen.

Aluminium.

| Wellenlänge | Fehlergrenze | Intensität | Bemerkungen | Frühere Messungen |
|---|---|---|---|---|
| 3961,68 | 0,03 | 1 | Umgekehrt | 3961,1 Thalén, 3960,9 H. u. A. |
| 3944,16 | 0,03 | 1 | " | 3943,1 Thalén, 3943,2 H. u. A. |
| 3092,95 | 0,03 | 3 | " | 3091,5 L. u. D. 3091,9 H. u. A. (für beide Linien) |
| 3092,84 | 0,03 | 1 | " | |
| 3082,27 | 0,03 | 1 | " | 3080,5 L. u. D. 3081,2 H. u. A. |
| 3066,28 | 0,03 | 3 | | 3065,0 H. u. A. |

1) Cornu, Compt. rend. **100.** p. 1181—1188. 1885.

2) J. S. Ames, Phil. Mag. (5) **30.** p. 47. 1890.

3) V. A. Julius, Naturk. Verh. der Koninkl. Akad. van Wetenschapen te Amsterdam **26.** 1888.

| Wellen-länge | Fehler-grenze | Intensi-tät | Bemerkungen | Frühere Messungen |
|---|---|---|---|---|
| 3064,42 | 0,03 | 3 | | 3062,8 H. u. A. |
| 3060,04 | 0,03 | 3 | | 3058,5 H. u. A. |
| 3057,26 | 0,03 | 3 | | 3056,4 H. u. A. |
| 3054,81 | 0,03 | 3 | | 3053,6 H. u. A. |
| 3050,19 | 0,03 | 3 | | 3049,2 H. u. A. |
| 2660,49 | 0,03 | 1 | Umgekehrt | 2659,8 L. u. D. |
| 2652,56 | 0,03 | 1 | „ | 2652,0 L. u. D. |
| 2575,49 | 0,03 | 4 | „ | } 2574,5 L. u. D. |
| 2575,20 | 0,03 | 1 | „ | |
| 2568,08 | 0,03 | 1 | „ | 2567,5 L. u. D. |
| 2426,22 | 0,20 | 4 | Unscharf nach Roth | Neu |
| 2419,64 | 0,20 | 5 | „ „ „ | „ |
| 2378,52 | 0,05 | 3 | Umgekehrt | 2378,4 L. u. D. |
| 2373,45 | 0,03 | 4 | „ | } 2373,2 L. u. D. } 2373,3 H. u. A. |
| 2373,23 | 0,03 | 2 | „ | |
| 2372,21 | 0,05 | 4 | „ | 2373,2 Ames 2372,0 H. u. A. |
| 2367,16 | 0,03 | 1 | „ | 2366,9 L. u. D. 2367,2 H. u. A. |
| 2321,64 | 0,03 | 4 | | Neu |
| 2319,12 | 0,03 | 5 | | „ |
| 2317,55 | 0,03 | 5 | | „ |
| 2315,05 | 0,03 | 5 | | „ |
| 2313,60 | 0,03 | 5 | | „ |
| 2312,56 | 0,03 | 5 | Coincidirt mit Ag 2312,6 (2 u) | „ |
| 2269,20 | 0,05 | 2 | Umgekehrt | 2268,7 L. u. D. 2269,2 Ames |
| 2263,83 | 0,10 | 5 | „ | } 2263,1 L. u. D. |
| 2263.52 | 0,05 | 2 | „ | |
| 2258,27 | 0,10 | 5 | | 2257,3 L. u. D. |
| 2231,27 | 0,20 | 6 | Unscharf nach Roth | Neu |
| 2225,77 | 0,20 | 6 | Unscharf nach Roth, coincitirt mit Cu 2225,77 (3h) | „ |
| 2210,15 | 0,10 | 4 | Umgekehrt | 2210,0 L. u. D. 2210,15 Ames |
| 2204,73 | 0,10 | 4 | „ | 2205,0 L. u. D. |
| 2199,71 | 0,20 | 6 | Umgekehrt, coincidirt nahe mit Cu 2199,77 (2h) | Neu |
| 2174,13 | 0,10 | 6 | Umgekehrt | 2175,0 Cornu (n. V. A. Julius) 2174,0 Ames |
| 2168,87 | 0,10 | 6 | „ | 2169,8 Cornu |
| 2150,69 | 0,20 | 6 | „ | 2151,6 „ 2150,4 Ames |
| 2145,48 | 0,20 | 6 | „ | 2146,4 „ |
| 2134,81 | 0,20 | 6 | „ | 2134,6 „ |
| 2129,52 | 0,20 | 6 | „ | 2129,4 „ |
| 2123,44 | 0,20 | 6 | „ | 2122,5 „ |
| 2118,58 | 0,20 | 6 | „ | 2117,4 „ |

### Indium.

Das Spectrum des Indiums ist bisher nur sehr wenig Gegenstand der Untersuchung gewesen. Nur mit dem In-

ductionsfunken haben Clayden und Heycock den sichtbaren Theil, Hartley und Adeney den ultravioletten Theil durchgemessen. Thalén gibt ausser dem Hauptpaar des sichtbaren Spectrums 451 $\mu\mu$ und 410 $\mu\mu$ nur noch eine Linie bei 4531,6, welche wahrscheinlich nicht zum Metall gehört. Liveing und Dewar haben das Hauptpaar im Bogenspectrum gesehen.

Das Funkenspectrum besitzt namentlich im sichtbaren Theil, aber auch im Ultraviolett, sehr viele Linien, die im Bogenspectrum fehlen; Indium und ebenso Thallium sind wieder auffallende Beispiele für die wesentlich grössere Einfachheit und Gesetzmässigkeit des Bogenspectrums gegenüber dem Funkenspectrum.

Wegen der Kostbarkeit des Materials haben wir nur wenige Aufnahmen des Indiumspectrums gemacht und müssen daher grössere Fehler in den Wellenlängen auch bei scharfen Linien für nicht ausgeschlossen halten. Dem entsprechend sind die Fehlergrenzen gewählt. Aus demselben Grunde haben wir bei einzelnen Linien nicht mit Sicherheit entscheiden können, ob sie zu Indium gehören. Wir führen in unserer Tabelle zwar nur solche auf, deren Zugehörigkeit wir für sehr wahrscheinlich halten, haben aber doch einige durch die Bemerkung „zweifelhaft" gekennzeichnet.

Indium.

| Wellenlängen | Fehlergrenze | Intensität | Bemerkungen | Frühere Messungen |
|---|---|---|---|---|
| 4511,44 | 0,10 | 1 | Umgekehrt | 4510,2 H. u. A. |
| 4101,87 | 0,10 | 2 | Umgekehrt, coincidirt m. Wasserstoff 4101,85 (Ames) u. Zn 4101,94 (5) | 4101,3 H. u. A. |
| 3258,66 | 0,05 | 3 | Umgekehrt | 3257,8 H. u. A. |
| 3256,17 | 0,05 | 1 | „ | 3255,5 H. u. A. |
| 3039,46 | 0,05 | 1 | „ | 3038,7 H. u. A. |
| 2932,71 | 0,05 | 3 | „ | 2932,3 H. u. A. |
| 2753,97 | 0,05 | 3 | „ | 2752,8 H. u. A. |
| 2720,10 | 0,20 | 5 | Sehr unscharf, zweifelhaft | Neu |
| 2714,05 | 0,05 | 3 | Umgekehrt | 2712,9 H. u. A. |
| 2710,38 | 0,05 | 1 | „ | 2709,3 H. u. A. |
| 2666,33 | 0,20 | 5 | Unscharf n. Violett, zweifelhaft | Neu |
| 2601,84 | 0,05 | 3 | Umgekehrt | 2602,5 H. u. A. |
| 2572,71 | 0,20 | 5 | Unscharf nach Roth | Neu |

| Wellen-längen | Fehler-grenze | In-tensi-tät | Bemerkungen | Frühere Messungen |
|---|---|---|---|---|
| 2565,59 | 0,20 | 5 | Unscharf zweifelhaft | 2564,7 H. u. A. |
| 2560,25 | 0,05 | 2 | Umgekehrt | 2559,5 H. u. A. |
| 2523,08 | 0,10 | 4 | „ | Neu |
| 2521,45 | 0,05 | 2 | Umgekehrt, coincidirt mit Co 2521,44 | 2520,9 H. u. A. |
| 2470,65 | 0,15 | 5 | Zweifelhaft | 2470,2 H. u. A. |
| 2468,09 | 0,05 | 4 | Umgekehrt | 2468,4 H. u. A. |
| 2460,14 | 0,05 | 3 | „ | 2460,8 H. u. A. |
| 2430,8 | 0,50 | 6 | „ | 2429,0 H. u. A. |
| 2429,76 | 0,20 | 6 | „ | 2428,6 H. u. A. |
| 2399,33 | 0,15 | 4 | Wahrscheinlich umgekehrt, bedeckt von Fe 2399,31 (1h) | Neu |
| 2389,64 | 0,05 | 2 | Umgekehrt | 2388,0 H. u. A. |
| 2379,74 | 0,20 | 6 | Umgekehrt, coincidirt nahezu mit Tl 2379,66 (2h) | Neu |
| 2357,7 | 0,50 | 6 | Umgekehrt | 2357,0? H. u. A. |
| 2340,30 | 0,15 | 3 | „ | Neu |
| 2306,8 | 0,50 | 6 | „ | 2306,9? H. u. A. |
| 2278,3 | 0,30 | 6 | „ | Neu |
| 2260,6 | 0,30 | 6 | Umgekehrt, coincidirt nahezu mit Cu 2260,58 (4h) | „ |
| 2241,6 | 0,30 | 6 | Umgekehrt | „ |
| 2230,9 | 0,30 | 6 | „ | „ |
| 2218,3 | 0,30 | 6 | Umgekehrt, coincidirt nahezu mit Cu 2218,21 (5) | „ |
| 2211,2 | 0,30 | 6 | Umgekehrt | „ |
| 2200,0 | 0,30 | 6 | „ | „ |
| 2197,5 | 0,30 | 6 | „ | „ |
| 2187,5 | 0,30 | 6 | „ | „ |
| 2180,0 | 0,30 | 6 | „ | „ |

### Thallium.

Das Funkenspectrum des Thallium ist im sichtbaren Theil namentlich von Huggins und von Thalén, im Ultraviolett von Hartley und Adeney untersucht, das Bogenspectrum von Liveing und Dewar. Die kürzesten Wellenlängen sind von Cornu [1]) photographirt und gemessen worden; er gibt aber nicht die Wellenlängen selbst an, sondern eine Formel, nach der sie sich berechnen lassen sollen, und eine Zeichnung mit Maassstab. Wie schon V. A. Julius bemerkt, enthält die Formel mehrere Druckfehler, die berechneten Werthe stimmen durchaus nicht mit der Zeichnung, sodass man nur aus letzterer die Wellenlängen entnehmen kann. In

1) Cornu, Compt. rend. **100.** p. 1181—1188. 1885.

unserer Liste geben wir zum Vergleich die so erhaltenen Zahlen, welche Rydberg abgelesen hat, und die wir controlirt haben.

Wir haben das Spectrum meist aus dem Metall selbst, seltener aus der Chlorverbindung erzeugt und zwischen den Grenzen 630 $\mu\mu$ und 210 $\mu\mu$ photographirt. Die zahlreichen Linien, welche das Funkenspectrum zwischen 650 $\mu\mu$ und 300 $\mu\mu$ zeigt, fehlen im Bogenspectrum fast sämmtlich; bis auf die einzige charakteristische grüne Linie des Thalliums bei 535 $\mu\mu$ und eine schwache Linie bei 553 $\mu\mu$ besteht die ganze, übrigens sehr starke, Strahlung des Thalliums aus ultraviolettem Licht.

Thallium.

| Wellen-längen | Fehler-grenze | Intensität | Bemerkungen | Frühere Messuugen |
|---|---|---|---|---|
| 5528,3 | 0,50 | 5 | Unscharf nach Roth | |
| 5350,65 | 0,03 | 1 | Umgekehrt | 5349 Thalén |
| 3775,87 | 0,03 | 1 | " | 3775,6 L. u. D. |
| 3529,58 | 0,03 | 2 | " | 3528,3 L. u. D. 3528,8 H. u. A. |
| 3519,39 | 0,03 | 1 | " | 3517,8 L. u. D. 3518,6 H. u. A. |
| 3229,88 | 0,03 | 1 | " | 3228,1 L. u. D. 3229,0 H. u. A. |
| 2978,05 | 0,20 | 6 | Verbreitert n. Roth | Neu |
| 2945,15 | 0,15 | 4 | " " " | 2943,9 L. u. D. |
| 2921,63 | 0,03 | 3 | Umgekehrt | 2921,3 L. u. D. 2920,8 H. u. A. |
| 2918,43 | 0,03 | 1 | " | 2917,8 L. u. D. 2917,7 H. u. A. |
| 2895,52 | 0,15 | 4 | Verbreit. n. Violett | 2895,2 L. u. D. 2893,9 H. u. A. |
| 2826,27 | 0,05 | 2 | Umgekehrt | 2825,8 L. u. D. 2825,4 H. u. A. |
| 2767,97 | 0,03 | 1 | " | 2767,1 H. u. A. |
| 2710,77 | 0,08 | 4 | " | 2710,4 L. u. D. 2709,4 H. u. A. |
| 2709,33 | 0,03 | 2 | " | 2708,8 L. u. D. 2708,6 H. u. A. |
| 2700,3 | 0,50 | 5 | Sehr unscharf | 2699,7 L. u. D. 2700,1 H. u. A. |
| 2665,67 | 0,05 | 3 | Umgekehrt | 2665,0 L. u. D. 2665,0 H. u. A. |
| 2609,86 | 0,03 | 4 | " | 2609,4 L. u. D. } 2608,7 H. u. A. |
| 2609,08 | 0,03 | 3 | " | 2608,6 L. u. D. } |
| 2585,68 | 0,05 | 4 | " | Neu |
| 2580,23 | 0,03 | 2 | " | 2579,7 H. u. A. |
| 2553,07 | 0,10 | 5 | " | } 2552,0 L. u. D. 2551,6 H. u. A. |
| 2552,62 | 0,10 | 3 | " | } |
| 2538,27 | 0,10 | 5 | " | Neu |
| 2517,50 | 0,10 | 4 | " | 2517,0 L. u. D. |
| 2508,03 | 0,15 | 6 | " | Neu |
| 2494 00 | 0,10 | 5 | " | " |
| 2487,57 | 0,20 | 6 | " | " |
| 2477,58 | 0,10 | 6 | " | 2477,6 H. u. A. |
| 2472,65 | 0,20 | 6 | " | " |
| 2465,54 | 0,20 | 6 | " | " |
| 2462,01 | 0,30 | 6 | " | " |
| 2456,53 | 0,20 | 6 | " | " |

| Wellen-längen | Fehler-grenze | In-tensi-tät | Bemerkungen | Frühere Messungen |
|---|---|---|---|---|
| 2453,87 | 0,30 | 6 | Umgekehrt | Neu |
| 2449,57 | 0,30 | 6 | „ | „ |
| 2447,59 | 0,30 | 6 | „ | „ |
| 2444,00 | 0,30 | 6 | „ [1]) | „ |
| 2442,24 | 0,30 | 6 | „ | „ |
| 2439,58 | 0,30 | 6 | „ | „ |
| 2416,78 | 0,15 | 6 | Verbreitert n. Roth | „ |
| 2379,66 | 0,03 | 2 | Umgekehrt, fällt nahe zusammen mit In 2379,74 | 2380,0 H. u. A. |
| 2362,16 | 0,15 | 5 | Verbreit. n. Violett | 2364,8 H. u. A. |
| 2316,01 | 0,03 | 3 | Umgekehrt | Neu |
| 2237,91 | 0,10 | 3 | „ | 2238,7 Cornu (nach Rydberg) |
| 2210,80 | 0,10 | 5 | „ | 2210,0 „ |
| 2207,13 | 0,10 | 4 | „ | Neu |
| 2168,68 | 0,30 | 4 | „ | 2169,0 Cornu |
| 2152,08 | 0,30 | 6 | „ | 2152,3 „ |
| 2129,39 | 0,30 | 6 | „ | 2128,6 „ |

Die Spectren von Aluminium, Indium und Thallium zeigen alle drei sehr deutlich eine gesetzmässige Anordnung, die sich auf den grössten Theil der Linien bezieht. Cornu hat schon im Jahre 1885 [2]), was Aluminium und Thallium betrifft, auf die Serien in dem brechbarsten Theile des Spectrums hingewiesen und hat eine numerische Relation zwischen ihnen und der Serie des Wasserstoffs aufgestellt. Wir haben die Rechnungen mit unseren Werthen der Wellenlängen von Thallium und Aluminium und denen von Ames für Wasserstoff [3]) wiederholt und finden, wie weiter unten gezeigt ist, in Cornu's Formel nur eine verhältnissmässig rohe Annäherung. Julius scheint zuerst entdeckt zu haben, dass die im Aluminiumspectrum auftretenden Linienpaare dieselbe Schwingungsdifferenz besitzen [4]) und Rydberg [5]) fand, dass auch die Linien

1) Die Linie 2444,00 ist kaum zu sehen, da eine starke Bleilinie 2443,92 die umgekehrte Thalliumlinie beinahe verdeckt.

2) Cornu, Compt. rend. **100.** p. 1181—1188. 1885.

3) Ames, Phil. Mag. (5) **30.** 1890.

4) V. A. Julius, Naturk. Verh. der koninkl. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **26.** 1888.

5) Rydberg, Recherches sur la constitution des spectres d'émission des éléments chimiques. Kongl. svenska vetenskaps-akademiens handlingar bandet **23.** 1890.

des Indium- und des Thalliumspectrums sich zu Paaren von je derselben Schwingungsdifferenz zusammenfassen lassen, und dass diese Paare ebenso wie im Aluminiumspectrum zwei Serien bilden, die an derselben Stelle auslaufen. Wir finden Rydberg's Resultate durch unsere Beobachtungen im allgemeinen bestätigt und machen auf die Punkte, wo wir ihm widersprechen, im Folgenden besonders aufmerksam.

### Aluminium.

Die Linienpaare des Aluminiumspectrums sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die erste Columne enthält die Wellenlängen, die zweite die reciproken Werthe der Wellenlängen, also Zahlen, die den Schwingungszahlen so gut wie proportional sind, die dritte Columne die Differenzen der reciproken Wellenlängen eines jeden Paares; die vierte Columne gibt an, wie gross der Fehler dieser Differenzen nach den bei unseren Messungen angenommenen Fehlergrenzen sein kann, die fünfte und sechste geben die Intensität und das Aussehen der Linien.

| $\lambda$ | $\frac{1}{\lambda}$ | Differenz | Fehlergrenze | Intensität | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|
| 3961,68 | 25241,8 | 112,1 | 0,4 | 1 | Umgekehrt |
| 3944,16 | 25353,9 | | | 1 | " |
| 3092,95 | 32331,6 | 112,0 | 0,6 | 8 | " |
| 3092,84 | 32332,7 | | | 1 | " |
| 3082,27 | 32443,6 | | | 1 | " |
| 2660,49 | 37587,1 | 112,3 | 0,9 | 1 | " |
| 2652,56 | 37699,4 | | | 1 | " |
| 2575,49 | 38827,6 | 112,0 | 0,9 | 4 | " |
| 2575,20 | 38831,9 | | | 1 | " |
| 2568,08 | 38939,6 | | | 1 | " |
| 2426,22 | 41216,4 | 112,1 | 6,8 | 4 | Nach der Seite der längeren Wellen verbreitert |
| 2419,64 | 41328,5 | | | 5 | |
| 2378,52 | 42043,0 | 111,8 | 1,8 | 3 | Umgekehrt |
| 2372,21 | 42154,8 | | | 4 | " |
| 2373,45 | 42132,8 | 111,9 | 1,1 | 4 | " |
| 2373,23 | 42136,7 | | | 2 | " |
| 2367,16 | 42244,7 | | | 1 | " |
| 2269,20 | 44068,4 | 110,5 | 2,0 | 2 | " |
| 2263,52 | 44178,9 | | | 2 | " |

| λ | 1/λ | Differenz | Fehlergrenze | Intensität | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|
| 2263,83<br>2258,27 | 44172,9<br>44281,7 | 108,8 | 3,9 | 5<br>5 | Umgekehrt |
| 2231,27<br>2225,77 | 44817,5<br>44928,3 | 110,8 | 8,1 | 6<br>6 | Nach der Seite der längeren Wellen verbreitert |
| 2210,15<br>2204,73 | 45245,8<br>45357,0 | 111,2 | 4,1 | 4<br>4 | Umgekehrt<br>" |
| 2204,73<br>2199,71 | 45357,0<br>45460,5 | 103,5 | 6,2 | 4<br>6 | "<br>" |
| 2174,13<br>2168,87 | 45995,4<br>46107,0 | 111,6 | 4,3 | 6<br>6 | "<br>" |
| 2150,69<br>2145,48 | 46496,7<br>46609,6 | 112,9 | 3,7 | 6<br>6 | "<br>" |
| 2134,81<br>2129,52 | 46842,6<br>46958,9 | 116,3 | 8,9 | 6<br>6 | "<br>" |
| 2123,44<br>2118,58 | 47093,4<br>47201,4 | 108,0 | 8,9 | 6<br>6 | "<br>" |

Bei dem zweiten, vierten und siebenten Paare sind je drei Wellenlängen hingeschrieben. Es tritt hier dieselbe Erscheinung auf, die wir in vielen anderen Spectren und zwar immer bei der ersten Nebenserie bemerkt haben. Die grössere Wellenlänge eines Paares besitzt an der weniger brechbaren Seite einen schwächeren Begleiter, der mit der kleineren Wellenlänge des Paares die constante Schwingungsdifferenz gibt. Dieser Begleiter rückt im allgemeinen für die Paare mit kleinerer Wellenlänge näher heran, sodass er wahrscheinlich bei allen Paaren der ersten Nebenserie vorhanden ist, aber bei den brechbareren Paaren von der stärkeren Linie nicht mehr getrennt werden kann.

Die Wellenlänge 2204,73 ist in zwei Paaren aufgeführt. Wir glauben, dass hier die kleinere Wellenlänge eines Paares und die grössere Wellenlänge eines anderen schwächeren Paares so nahe zusammenfallen, dass sie auf unseren Platten nicht mehr getrennt erscheinen.

Als Mittel der Schwingungsdifferenzen der Paare ergibt sich 112,0 und bei allen Paaren mit Ausnahme des zwölften liegt diese Zahl innerhalb der Grenzen, die durch die Beobachtung für die Schwingungsdifferenz gefunden sind. Bei dem

zwölften Paare erklärt sich indessen die grössere Abweichung aus dem Zusammenfliessen der grösseren Wellenlänge mit der kleineren des vorhergehenden Paares. Alle Paare mit Ausnahme der beiden bei 2426,22, 2419,64 und bei 2231,27, 2225,77 lassen sich in zwei Serien ordnen, die dasselbe Aussehen gewähren wie alle bisher von uns untersuchten Serien. Das erste, dritte, sechste, neunte und zwölfte Paar gehören einer Reihe an, und die übrigen Paare mit Ausnahme der beiden eben genannten bilden die andere Reihe. Diese Reihe besteht aus wesentlich stärkeren, leichter umkehrbaren und mehr verbreiterten Linien als jene. Wir nennen diese Reihe daher nach der Analogie mit den für die Spectren der Alkalien aufgestellten Bezeichnungen die erste Nebenserie, jene die zweite Nebenserie.[1]) Auch der Umstand, dass drei von den Paaren der ersten Nebenserie einen schwächeren Begleiter haben, entspricht den Beobachtungen, die bei anderen Spectren gemacht sind. Die Differenzen der Schwingungszahlen auf einander folgender Paare der beiden Nebenserien sind:

| 1. Nebenserie | Fehlergrenze | 2. Nebenserie | Fehlergrenze |
|---|---|---|---|
| 6496,0 | 0,8 | 12345,4 | 0,6 |
| 3305,2 | 1,0 | 4455,6 | 1,3 |
| 1934,9 | 1,5 | 2128,5 | 2,9 |
| 1177,8 | 3,0 | 1181,4 | 6,1 |
| 749,8 | 4,2 | | |
| 502,0 | 6,5 | | |
| 347,6 | 8,8 | | |
| 246,6 | 8,9 | | |

Vergleicht man diese Zahlen mit denen der übrigen Serien, die wir im vierten Abschnitt unserer Untersuchungen über die Spectren der Elemente[2]) zusammengestellt haben, so sieht man, dass die zweite Nebenserie dem von Rydberg aufgestellten Gesetze einigermaassen entspricht und sich in die Tabelle zwischen der ersten Nebenserie des Strontium und der

1) Wir haben das Wort Nebenserie hier ebenso wie bei der Betrachtung der zweiten Mendelejeff'schen Gruppe beibehalten, obgleich es eigentlich nur für die Alkalien einen Sinn hat, wo den Nebenserien Hauptserien gegenüberstehen.

2) Kayser u. Runge, Abhandl. d. Berl. Akad. 1891. p. 65.

zweiten Nebenserie des Zink einreihen lässt. Dagegen passen die Zahlen der ersten Nebenserie ganz und gar nicht in die Tabelle, da nur die letzten drei Zahlen in eine Horizontalreihe zu schreiben sein würden. Diese Serie zeigt auch darin ein von allen anderen Serien abweichendes Verhalten, dass die Formel

$$\lambda^{-1} = A - Bn^{-2} - Cn^{-4}$$

mit viel geringerer Genauigkeit die Wellenlängen darstellt. Berechnet man z. B. die drei Constanten $A$, $B$, $C$ aus den kleineren Wellenlängen der ersten drei Paare, indem man ihnen, wie es der Analogie mit anderen Spectren nach sein muss, die Ordnungszahlen 4, 5, 6 zuordnet, und extrapolirt man für $n = 7$ bis 12, so erhält man

| $\lambda$ berechnet | $\lambda$ beobachtet | Differenz |
|---|---|---|
| 2264,41 | 2263,52 | − 0,89 |
| 2203,85 | 2204,73 | + 0,88 |
| 2164,82 | 2168,87 | + 4,05 |
| 2138,06 | 2145,48 | + 7,42 |
| 2118,85 | 2129,52 | + 10,67 |
| 2104,56 | 2118,58 | + 14,02 |

Die Extrapolation zeigt zwar immer noch einen bemerkenswerthen Anschluss und beweist deutlich, dass die Paare mit einander zusammenhängen; aber die Genauigkeit ist mit der bei den anderen Serien herrschenden gar nicht zu vergleichen. Es scheint uns wahrscheinlich, dass sowohl hier wie bei den übrigen Serien die Formel, welche $\lambda^{-1}$ als Function von $n$ darstellt, eine unendliche nach fallenden Potenzen von $n^2$ geordnete Reihe ist, deren Convergenz bei den anderen Serien rascher ist, als für die erste Nebenserie des Aluminium. Während nun bei den anderen Serien drei Glieder der Reihe ihren Werth mit beträchtlicher Genauigkeit darstellen, ist dies hier nicht der Fall. Um aber doch wenigstens die ersten drei Glieder der Reihe mit möglichster Genauigkeit zu finden, haben wir die drei Constanten aus den letzten sechs Paaren der Serie nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, indem wir dabei voraussetzten, dass bei diesen Paaren wegen der grösseren Werthe von $n$ die folgenden Glieder nur einen geringen Einfluss haben. So haben wir die Formeln

$$\lambda^{-1} = 48308{,}2 - 156662 n^{-2} - 2505331 n^{-4}$$
$$\lambda^{-1} = 48420{,}2 - 156662 n^{-2} - 2505331 n^{-4}$$

gefunden. In der folgenden Tabelle sind die berechneten mit den beobachteten Wellenlängen verglichen:

| $\lambda$ berechnet | $\lambda$ beobachtet | Differenz |
|---|---|---|
| 2269,24 | 2269,20 | − 0,04 |
| 2263,49 | 2263,52 | + 0,03 |
| 2210,00 | 2210,15 | + 0,15 |
| 2204,56 | 2204,73 | + 0,17 |
| 2174,28 | 2174,13 | − 0,15 |
| 2169,00 | 2168,87 | − 0,13 |
| 2150,95 | 2150,69 | − 0,26 |
| 2145,79 | 2145,48 | − 0,31 |
| 2134,82 | 2134,81 | − 0,01 |
| 2129,73 | 2129,52 | − 0,21 |
| 2123,16 | 2123,44 | + 0,28 |
| 2118,14 | 2118,58 | + 0,44 |

Die berechneten Constanten können nur auf eine geringe Genauigkeit Anspruch erheben, weil die Wellenlängen, aus denen sie gefunden sind, sich nur über einen verhältnissmässig kleinen Theil des Spectrums erstrecken. Aber die Rechnung zeigt doch wenigstens, dass die zweite Constante der Formel auch hier nicht viel von den Werthen verschieden ist, die sie in den übrigen Formeln besitzt, wenn auch die Abweichung vom Mittel erheblich stärker als in den bisher erhaltenen Formeln ist. Die Extrapolation rückwärts für kleinere Werthe von $n$ führt, wie sich denken lässt, zu grossen Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung, die umso grösser sind je kleiner $n$. Und zwar gibt die Rechnung die reciproken Werthe der Wellenlängen zu klein, woraus man schliessen muss, dass die folgende höhere Potenz von $n^{-1}$ eine positiven Coefficienten besitzt.

Die zweite Nebenserie zeigt kein aussergewöhnliches Verhalten. Die Formel ist aus dem zweiten, dritten und vierten Paare der Serie berechnet, nachdem die Wellenlängen so corrigirt waren, dass die Paare genau die Schwingungsdifferenz 112,0 geben.

$$\lambda^{-1} = 48244{,}5 - 127527\, n^{-2} - 687819\, n^{-4}$$
$$\lambda^{-1} = 48356{,}5 - 127527\, n^{-2} - 687819\, n^{-4}.$$

Die folgende Tabelle enthält die berechneten und die beobachteten Werthe

| $n$ | $\lambda$ berechnet | $\lambda$ beobachtet | Differenz | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3908,81 | 3961,68 | + 52,87 | |
| | 3891,77 | 3944,16 | + 52,39 | |
| 4 | 2660,48 | 2660,49 | | Zur Berechnung der Constanten benutzt |
| | 2652,57 | 2652,56 | | |
| 5 | 2378,52 | 2378,52 | | |
| | 2372,20 | 2372,21 | | |
| 6 | 2263,91 | 2263,83 | | |
| | 2258,18 | 2258,27 | | |
| 7 | 2204,81 | 2204,73 | − 0,08 | |
| | 2199,38 | 2199,71 | + 0,33 | |

$n = 3$ ist die kleinste ganze Zahl, für die die Formel einen positiven Werth liefert. Die grössere Abweichung bei $n = 3$ deutet auf weitere Glieder mit höheren Potenzen von $n^{-1}$ und negativen Coefficienten. Man würde auch ohne eine weitere Constante die Abweichung der für $n = 3$ berechneten Werthe von den beobachteten durch Ausgleichung beträchtlich herunterdrücken können. Aber nach unserer Ansicht würden sich dabei die Constanten von ihren wahren Werthen weiter entfernen.

Rydberg hat die Paare in etwas anderer Weise zu Serien zusammengefasst. Er lässt die erste Serie mit der Wellenlänge 11280 beginnen, die Becquerel beobachtet hat. Auch nach unserer Formel müsste vor dem ersten von uns beobachteten Paare eines voraufgehen; ob es aber bei 11280 liegt, können wir nicht entscheiden.

Becquerel nennt diese Linie „peut-être multiple“; es ist danach weder sicher, dass sie aus zwei Linien besteht, noch dass diese beiden Linien die Schwingungsdifferenz 112,0 ergeben. In den folgenden beiden Paaren der ersten Nebenserie stimmen wir mit Rydberg überein; aber dann beginnt die Abweichung. Die Paare $n = 5, 6, 7$ unserer zweiten Nebenserie sind ihm nicht bekannt. Statt dessen rechnet er die Paare $n = 6$ bis 12 unserer ersten Nebenserie zur zweiten. Es kann aber kaum ein Zweifel darüber bestehen, dass Ryd-

berg's Anordnung nicht richtig ist. Denn erstens zeigen die sieben Paare, die das Ende unserer ersten Nebenserie bilden, durch ihre leichte Umkehrung und durch ihre Verbreiterung, dass sie nicht zur zweiten Nebenserie gehören, während die Paare $n = 5$, 6, 7 der zweiten Nebenserie nach ihrem Aussehen nicht wohl zur ersten Nebenserie gerechnet werden können; zweitens aber würde man bei Rydberg's Anordnung der Paare in der zweiten Nebenserie Schwingungsdifferenzen erhalten, deren Abweichungen von dem Rydberg'schen Gesetze ganz unregelmässig sind, während die Schwingungsdifferenzen unserer ersten Nebenserie zwar auch dem Rydberg'schen Gesetze widersprechen, aber von Paar zu Paar mit abnehmender Ordnungszahl in gleichmässig wachsendem Maasse abweichen.

Rydberg gibt ausser den beiden Serien noch eine Anzahl von anderen Linienpaaren an, von denen er glaubt, dass sie die gleiche Schwingungsdifferenz unter einander besitzen. Drei von den Paaren befinden sich unter den von uns gemessenen Linien nämlich:

| | | |
|---|---|---|
| 3066,28 | 3064,42 | 3060,04 |
| 3057,26 | 3054,81 | 3050,19. |

Die Differenz der reciproken Wellenlängen ist:

96,2 102,7 105,5.

Diese drei Zahlen dürfen, nach der Genauigkeit unserer Messungen, wenn die Schwingungsdifferenz constant wäre, nicht mehr als 0,7 von einem mittleren Werth abweichen; die Linien sind also nicht als Paare zu betrachten.

## Indium.

Die Linienpaare von gleicher Schwingungsdifferenz, die wir im Spectrum des Indium gemessen haben, sind in der folgenden Tabelle enthalten in derselben Anordnung, in der oben die Paare von Aluminiumlinien zusammengestellt wurden:

| λ | 1/λ | Differenz | Fehlergrenze | Intensität | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|
| 4511,44 | 22165,9 | 2213,2 | 1,1 | 1 | Umgekehrt |
| 4101,87 | 24379,1 | | | 2 | " |
| 3258,66 | 30687,5 | 2213,1 | 1,0 | 3 | " |
| 3256,17 | 30710,9 | | | 1 | " |
| 3039,46 | 32900,6 | | | 1 | " |
| 2932,71 | 34098,2 | 2213,0 | 1,2 | 3 | " |
| 2753,97 | 36311,2 | | | 3 | " |
| 2720,10 | 36763,4 | 2214,0 | 5,8 | 5 | Verbreitert |
| 2565,59 | 38977,4 | | | 5 | " |
| 2714,05 | 36845,3 | 2213,4 | 1,5 | 3 | Umgekehrt |
| 2710,38 | 36895,2 | | | 1 | " |
| 2560,25 | 39058,7 | | | 2 | " |
| 2601,84 | 38434,3 | 2213,8 | 1,6 | 3 | " |
| 2460,14 | 40648,1 | | | 3 | " |
| 2523,08 | 39634,1 | 2213,2 | 2,5 | 4 | " |
| 2521,45 | 39659,7 | | | 2 | " |
| 2389,64 | 41847,3 | | | 2 | " |
| 2468,09 | 40517,2 | 2212,4 | 3,6 | 4 | " |
| 2340,30 | 42729,6 | | | 3 | " |
| 2430,8 | 41138,7 | 2211,4 | 17,9 | 6 | " |
| 2429,76 | 41156,3 | | | 6 | " |
| 2306,8 | 43350,1 | | | 6 | " |
| 2399,33 | 41678,3 | 2214,1 | 8,4 | 4 | Wahrscheinlich auch umgekehrt aber von einer Eisenlinie überdeckt |
| 2278,3 | 43892,4 | | | 6 | Umgekehrt |
| 2379,74 | 42021,4 | 2214,6 | 9,4 | 6 | " |
| 2160,6 | 44236,0 | | | 6 | " |
| 2357,7 | 42414,2 | 2196,8 | 15,0 | 6 | " |
| 2241,6 | 44611,0 | | | 6 | " |

Rydberg's Resultate finden sich durch unsere Messungen bestätigt. Die sechs Paare, die er nach den Messungen von Thalén und von Hartley und Adeney aufgefunden hat (die ersten sechs der Tabelle, wenn man das vierte ausnimmt), geben nach unseren Messungen sehr nahe dieselbe Schwingungsdifferenz. Nach den früheren Messungen ist die Abweichung zwischen dem grössten und dem kleinsten Werthe der Schwingungsdifferenz 23 mal so gross wie bei uns. Wir haben noch sechs andere Paare mit derselben Schwingungsdifferenz aufgefunden. Die Linien sind viel schwächer und

daher viel weniger genau gemessen; aber die Abweichungen unter den Schwingungsdifferenzen können, wie man aus der Tabelle sieht, durch die Beobachtungsfehler erklärt werden. Nur bei dem letzten Paare übersteigt die Abweichung um ein Weniges die Fehlergrenze, die wir angenommen haben.

Das Mittel der Schwingungsdifferenzen ist 2213,2, wenn man bei der Berechnung die verschiedenen Genauigkeiten berücksichtigt.

Beim zweiten, fünften, siebenten und neunten Paar ist die grössere Wellenlänge wieder wie bei den Paaren der ersten Nebenserie im Aluminiumspectrum von einer schwächeren Linie begleitet, die mit der kleineren Wellenlänge des Paares die constante Schwingungsdifferenz gibt. Man wird der Analogie wegen diese Paare zur ersten Nebenserie rechnen.

Die Formeln

$$\lambda^{-1} = 44515{,}4 - 139308\,n^{-2} - 1311032\,n^{-4}$$
$$\lambda^{-1} = 46728{,}6 - 139308\,n^{-2} - 1311032\,n^{-4},$$

deren Constanten aus den ersten dreien dieser Paare für $n = 4, 5, 6$ berechnet sind, geben für diese und andere Werthe von $n$ Wellenlängen, die in der folgenden Tabelle mit den Beobachtungen verglichen sind.

| $n$ | $\lambda$ berechnet | $\lambda$ beobachtet | Bemerkungen |
|---|---|---|---|
| 3 | 7781,4<br>6638,2 | | Unsere Aufnahmen reichen nur bis 5550. Uebrigens ist nach der Analogie mit anderen Spectren zu erwarten, dass die berechneten Wellenlängen viel zu klein sind. |
| 4 | 3258,66<br>3039,46 | 3258,66<br>3039,46 | Zur Berechnung der Constanten benutzt |
| 5 | 2714,04<br>2560,25 | 2714,05<br>2560,25 | Zur Berechnung der Constanten benutzt |
| 6 | 2523,08<br>2389,64 | 2523,08<br>2389,64 | Zur Berechnung der Constanten benutzt |
| 7 | 2431,53<br>2307,36 | 2430,8<br>2306,8 | |
| 8 | 2379,90<br>2260,81 | 2379,74<br>2260,6 | |
| 9 | 2347,65<br>2231,70 | <br>2230,9 | |

| $n$ | $\lambda$ berechnet | $\lambda$ beobachtet | Bemerkungen |
|---|---|---|---|
| 10 | 2326,06 | | |
| | 2212,17 | 2211,2 | |
| 11 | 2310,83 | | |
| | 2198,39 | 2197,5 | |
| 12 | 2299,66 | | |
| | 2188,28 | 2187,5 | |
| 13 | 2291,20 | | |
| | 2180,63 | 2180,0 | |

Auch in dieser Annahme der ersten Nebenserie konnten wir Rydberg folgen, dem aber nur die drei ersten Paare und die Linie 2430 bekannt sind. Er erwähnt indessen nicht, dass sie seinem Gesetze deutlich widerspricht, nach dem die Schwingungsdifferenzen auf einander folgender Glieder für alle Serien durch dieselbe Function $f(n+\mu)$ darstellbar sein sollen. [1]) Denn die Reihe der Schwingungsdifferenzen dieser Serie ist 6158,0 2788,7 1502,9 etc., und sie kreuzt also die Reihe der Schwingungsdifferenzen der ersten Nebenserie im Magnesiumspectrum 6236,9 2774,4 1474,6 etc. Es bestärken diese Zahlen die Einwände, die wir in der Nachschrift des Abschn. IV. unserer Untersuchungen gegen Rydberg's Betrachtungen erhoben haben. Was die zweite Nebenserie betrifft, so haben wir Rydberg's Anordnung zu bestätigen. Das vierte Paar der oben gegebenen allgemeinen Tabelle der Paare muss man sich weg denken, dann sind ausser den Paaren der ersten Nebenserie nur die der zweiten vorhanden. Man erhält die folgenden Formeln und Werthe

$$\lambda^{-1} = 44535,0 - 126766\,n^{-2} - 643584\,n^{-4}$$
$$\lambda^{-1} = 46748,2 - 126766\,n^{-2} - 643584\,n^{-4}$$

| $n$ | $\lambda$ berechnet | $\lambda$ beobachtet | Bemerkungen |
|---|---|---|---|
| 3 | 4443,57 | 4511,44 | |
| | 4045,70 | 4101,87 | |
| 4 | 2932,71 | 2932,71 | Zur Berechnung der Constanten benutzt |
| | 2753,96 | 2753,97 | |

1) Rydberg, Rech. sur la Const. des spectres d'émission. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar Bandet 23. p. 36 ff.

| $n$ | $\lambda$ berechnet | $\lambda$ beobachtet | Bemerkungen |
|---|---|---|---|
| 5 | 2601,82 | 2601,82 | Zur Berechnung der Constanten benutzt |
| | 2460,16 | 2460,14 | |
| 6 | 2468,09 | 2468,09 | |
| | 2340,26 | 2340,30 | |
| 7 | 2399,24 | 2399,33 | |
| | 2278,26 | 2278,3 | |
| 8 | 2358,65 | 2357,7 | |
| | 2241,63 | 2241,6 | |
| 9 | 2332,53 | | |
| | 2218,03 | 2218,3 | |
| 10 | 2314,66 | | |
| | 2201,86 | 2200,0 | |

Die grössere Abweichung bei dem ersten Paare könnte man bei den folgenden drei Paaren compensiren. Aber wir glauben richtigere Werthe der Constanten zu erhalten, wenn wir das erste Paar für die Rechnung bei Seite lassen. Die ersten Constanten in beiden Formeln haben nahezu dieselben Werthe wie für die erste Nebenserie. Es wird dadurch Rydberg's Bemerkung, dass die beiden Nebenserien an derselben Stelle auslaufen, für Indium bestätigt.

### Thallium.

Im Spectrum des Thalliums haben wir die folgenden Linienpaare gemessen

| $\lambda$ | $\frac{1}{\lambda}$ | Differenz | Fehlergrenze | Intensität | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|
| 5350,65 | 18689,3 | 7794,7 | 0,32 | 1 | Umgekehrt |
| 3775,87 | 26484,0 | | | 1 | „ |
| 3529,58 | 28332,0 | 7795,6 | 0,63 | 2 | „ |
| 3519,39 | 28414,0 | | | 1 | „ |
| 2767,97 | 36127,6 | | | 1 | „ |
| 3229,88 | 30960,9 | 7795,3 | 0,74 | 1 | „ |
| 2580,23 | 38756,2 | | | 2 | „ |
| 2978,05 | 33579,0 | 7798,4 | 4,9 | 6 | Verbreitert nach d. Seite d. grösseren Wellenlängen |
| 2416,78 | 41377,4 | | | 6 | Verbreitert nach d. Seite d. grösseren Wellenlängen |

| λ | $\frac{1}{\lambda}$ | Differenz | Fehler-grenze | Inten-sität | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|
| 2921,63 | 34227,5 | | | 3 | Umgekehrt |
| 2918,43 | 34265,0 | 7795,3 | 0,9 | 1 | „ |
| 2379,66 | 42022,8 | | | 2 | „ |
| 2895,52 | 34536,1 | 7798,0 | 4,5 | 4 | Verbreitert nach d. Seite d. kleineren Wellenlängen |
| 2362,16 | 42334,1 | | | 5 | Verbreitert nach d Seite d. kleineren Wellenlängen |
| 2826,27 | 35382,3 | 7795,4 | 1,2 | 2 | Umgekehrt |
| 2316,01 | 43177,7 | | | 3 | „ |
| 2710,77 | 36889,9 | | | 4 | „ |
| 2709,33 | 36909,5 | 7794,7 | 2,4 | 2 | „ |
| 2237,91 | 44684,6 | | | 3 | „ |
| 2665,67 | 37514,0 | 7793,7 | 2,7 | 3 | „ |
| 2207,13 | 45307,7 | | | 4 | „ |
| 2609,86 | 38316,2 | | | 4 | „ |
| 2609,08 | 38327,7 | 7794,8 | 6,8 | 3 | „ |
| 2168,68 | 46111,0 | | | 4 | „ |
| 2585,68 | 38674,6 | 7792,1 | 7,3 | 4 | „ |
| 2152,08 | 46466,7 | | | 6 | „ |
| 2553,07 | 39168,5 | | | 5 | „ |
| 2552,62 | 39175,4 | 7793,3 | 8,2 | 3 | „ |
| 2129,39 | 46961,8 | | | 6 | „ |

Die Paare sind bis auf das vierte, sechste und elfte schon von Rydberg, nach Messungen von Thalén, Hartley und Adeney, Liveing und Dewar, und Cornu angegeben worden. Nach unseren Messungen ist der Mittelwerth der Schwingungsdifferenz 7794,9, und so weit die Fehler der Beobachtungen zu schliessen erlauben, haben die Schwingungsdifferenzen aller Paare denselben Werth. Bei fünf Paaren findet man wieder an der Seite der längeren Wellen einen Begleiter von geringerer Intensität, der mit der kleineren Wellenlänge des Paares die constante Schwingungsdifferenz ergibt. Man wird geneigt sein, diese zur ersten Nebenserie zu rechnen, wie auch Rydberg gethan hat.

Die Rechnung nach unserer Formel ergibt, wenn man alle von uns beobachteten Linien nach der Genauigkeit berücksichtigt:

$$\lambda^{-1} = 41542,7 - 132293\, n^{-2} - 1265223\, n^{-4}$$
$$\lambda^{-1} = 49337,6 - 132293\, n^{-2} - 1265223\, n^{-4}$$

| $n$ | $\lambda$ berechnet | $\lambda$ beobachtet | Differenz | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 8910<br>5258 | | | Auf unseren Platten nicht vorhanden |
| 4 | 3529,56<br>2768,01 | 3529,58<br>2767,97 | + 0,02<br>− 0,04 | |
| 5 | 2921,70<br>2379,73 | 2921,63<br>2379,66 | − 0,07<br>− 0,07 | |
| 6 | 2710,64<br>2237,81 | 2710,77<br>2237,91 | + 0,13<br>+ 0,10 | |
| 7 | 2609,88<br>2168,69 | 2609,86<br>2168,68 | − 0,02<br>− 0,01 | |
| 8 | 2553,19<br>2129,40 | 2553,07<br>2129,39 | − 0,12<br>− 0,01 | |
| 9 | 2517,84<br>2104,75 | 2517,50<br>2105,1 | − 0,34<br>+ 0,35 | Nach Cornu (auf Rowland's Normalen reducirt.) |
| 10 | 2494,19<br>2088,20 | 2494,00<br>2088,8 | − 0,19<br>+ 0,60 | Nach Cornu |
| 11 | 2477,52<br>2076,50 | 2477,58<br>2077,3 | + 0,06<br>+ 0,80 | „ „ |
| 12 | 2465,30<br>2067,92 | 2465,54<br>2069,2 | + 0,24<br>+ 1,28 | „ „ |
| 13 | 2456,06<br>2061,41 | 2456,53<br>2062,3 | + 0,47<br>+ 0,89 | „ „ |
| 14 | 2448,89<br>2056,36 | 2449,57<br>2057,3 | + 0,68<br>+ 0,94 | „ „ |
| 15 | 2443,21<br>2052,35 | 2444,00<br>2053,9 | + 0,79<br>+ 1,55 | „ „ |
| 16 | 2438,63<br>2049,12 | 2439,58 | + 0,95 | |

Die Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung gehen über die Fehlergrenzen, wenn auch nur wenig, hinaus.

Sehr viel schlechter ist die Uebereinstimmung bei der zweiten Nebenserie. Wir haben hier, um möglichst richtige Werthe für die Constanten zu bekommen, die ersten vier Paare bei der Rechnung nicht mit berücksichtigt. Für die übrigen Linien gehen die Abweichungen nicht über die Fehlergrenze hinaus:

$$\lambda^{-1} = 41506{,}4 - 122617\, n^{-2} - 790683\, n^{-4}$$
$$\lambda^{-1} = 49301{,}3 - 122617\, n^{-2} - 790683\, n^{-4}$$

| $n$ | $\lambda$ berechnet | $\lambda$ beobachtet | Differenz | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 5518,53 | 5350,65 | −167,88 | |
| | 3858,67 | 3775,87 | −82,80 | |
| 4 | 3251,59 | 3229,88 | −21,71 | |
| | 2594,09 | 2580,23 | −13,86 | |
| 5 | 2829,92 | 2826,27 | −3,65 | |
| | 2318,49 | 2316,01 | −2,48 | |
| 6 | 2667,36 | 2665,67 | −1,69 | |
| | 2208,23 | 2207,13 | −1,10 | |
| 7 | 2585,67 | 2585,68 | +0,01 | |
| | 2151,94 | 2152,08 | +0,14 | |
| 8 | 2538,23 | 2538,27 | +0,04 | |
| | 2118,99 | 2119,2 | | Nach Cornu (auf Rowland's Normalen reducirt.) |
| 9 | 2508,02 | 2508,03 | +0,01 | |
| | 2097,89 | 2098,5 | | Nach Cornu |
| 10 | 2487,49 | 2487,57 | +0,08 | |
| | 2083,50 | 2083,2 | | „ „ |
| 11 | 2472,86 | 2472,65 | −0,21 | |
| | 2073,23 | 2072,4 | | „ „ |
| 12 | 2462,04 | 2462,01 | −0,03 | |
| | 2065,62 | | | |
| 13 | 2453,80 | 2453,87 | +0,07 | |
| | 2059,81 | | | |
| 14 | 2447,37 | 2447,59 | +0,22 | |
| | 2055,28 | | | |
| 15 | 2442,25 | 2442,24 | −0,01 | |
| | 2051,67 | | | |

Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass man die Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung bei den ersten vier Paaren sehr viel kleiner machen kann, wenn man sie bei der Rechnung mit berücksichtigt. Aber nach unserer Ansicht würden dadurch die Constanten weniger richtig, da zu vermuthen, dass für die kleinen Werthe von $n$ noch andere Glieder mit höheren Potenzen von $n^{-1}$ in Betracht kommen. Es scheint übrigens zwischen dem Paare $n=6$ und $n=7$ eine kleine Unstetigkeit zu liegen. Wenn man für diese und die benachbarten Linien Formeln berechnet, die möglichst gut stimmen und die Abweichungen graphisch aufträgt, so scheint ihre Curve hier einen Knick zu haben, der zwar klein aber für die Genauigkeit der Beobachtungen zu gross ist.

Die beiden Serien im Thallium-Spectrum laufen, wie man aus den ersten Constanten der Formeln sieht, sehr nahe an derselben Stelle zusammen.

Cornu, der die kleinsten Wellenlängen der Aluminium- und Thalliumserien zuerst beobachtet hat, glaubte eine numerische Beziehung zwischen diesen und der Wasserstoffserie nachweisen zu können.[1]) Er meint, es seien die Differenzen aufeinanderfolgender Wellenlängen einer Serie den Differenzen aufeinanderfolgender Wellenlängen der Wasserstoffserie proportional. Wir haben dieses Gesetz nicht bestätigt gefunden, wenigstens nicht in dem Grade, wie es der Genauigkeit der Beobachtungen entspricht. In der folgenden Tabelle sind die Differenzen der Wellenlängen aufeinanderfolgender Linien zusammengestellt und die Quotienten ausgerechnet, die nach Cornu in jeder Columne denselben Werth haben sollten. Für Wasserstoff sind die Messungen von Ames[2]) benutzt.

| Wasserstoff | Aluminium 1 Neb. Ser. | Quotient | Thallium 1 Neb. Ser. grössere Wellenl. | Quotient | Thallium 1 Neb. Ser. kleinere Wellenl. | Quotient |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1701,55 | 514,19 | 0,3022 | 607,95 | 0,3573 | 388,31 | 0,2282 |
| 520,83 | 200,92 | 0,3858 | 210,86 | 0,4049 | 141,75 | 0,2722 |
| 238,81 | 103,64 | 0,434 | 100,91 | 0,4226 | 69,23 | 0,290 |
| 131,60 | 58,79 | 0,447 | 56,79 | 0,4315 | 39,23 | 0,298 |
| 81,10 | 35,86 | 0,442 | 35,57 | 0,439 | | |
| 53,55 | 23,39 | 0,437 | 23,50 | 0,439 | | |
| 37,6 | 15,96 | 0,424 | 16,42 | 0,437 | | |
| 27,3 | 10,94 | 0,401 | 12,04 | 0,441 | | |
| 20,55 | | | 9,01 | 0,438 | | |
| 16,0 | | | 6,96 | 0.435 | | |
| 12,35 | | | 5,57 | 0,450 | | |
| 10,1 | | | 4,42 | 0,438 | | |

Cornu hat nur das Ende der Aluminium- und Thalliumserie berücksichtigt. Es scheint ihm entgangen zu sein, dass noch drei Paare mit grösseren Wellenlängen voraufgehen, die zweifellos auch zur Serie gehören. Aber selbst wenn man die ersten beiden Horizontalreihen der Tabelle fortlässt, so ist Cornu's Gesetz doch nicht erfüllt.

1) Cornu, Comptes Rendus 100 p. 1181—1188 (1885).

2) Ames, Phil. Mag. (5) 30. 1890.

Dass die drei Spectren von Aluminium, Indium, Thallium auch zueinander in Beziehung stehen, übersieht man am besten an der Zeichnung. Jedem der drei Elemente kommen hier zwei Horizontalstreifen zu. In dem oberen ist die erste Nebenserie, in dem unteren die zweite Nebenserie eingetragen nach der Scala der reciproken Wellenlängen. Aber es ist jedesmal nur die grössere Wellenlänge der Paare gezeichnet, weil die Uebersichtlichkeit sonst gestört wird. Man sieht wie die drei ersten Nebenserien und die drei zweiten Nebenserien sich entsprechen und wie sie mit dem grösseren Atomgewicht nach der Seite der grösseren Wellenlängen rücken. Man sieht auch wie die beiden Serien bei jedem Element an derselben Stelle auszulaufen scheinen. Am deutlichsten ist dies bei Thallium, wo die beiden Serien am weitesten beobachtet sind. Die kleineren Wellenlängen der Paare würden ein nicht ganz so

λ 5000 4500 4000 3500 3000 2500
1/λ 20 25 30 35 40 45
Al
In
Tl

regelmässiges Bild geben. Da die Schwingungsdifferenz aller Paare desselben Spectrums dieselbe ist, so würden die Serien der kleineren Wellenlängen aus den gezeichneten hervorgehen, wenn man die Zeichnung nach rechts verschöbe um den Betrag der Schwingungsdifferenz. Nun aber nimmt die Schwingungsdifferenz von Indium zu Thallium um mehr zu, als die Serien der längeren Wellen nach links rücken. Daher liegen die Serien der kleineren Wellen beim Thallium weiter nach rechts als beim Indium. Aehnliches ist bei Zink, Cadmium und Quecksilber beobachtet worden.

Wir fanden bei Aluminium, Indium, Thallium für die Schwingungsdifferenzen die Zahlen 112.0, 2213.2, 7794.9, die, wie schon Rydberg bemerkt hat, der Grössenordnung nach, etwa wie die Quadrate der Atomgewichte wachsen. Dividirt man sie durch das Quadrat des Atomgewichtes, so erhält man die Quotienten

0,1534 0,1721 0,1879.

Auch an den Constanten der Formeln ist zu erkennen, dass die drei Spectren gesetzmässig zusammenhängen. Sie sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

$$\lambda^{-1} = A - Bn^{-2} - Cn^{-4}$$

| | | *A* | | *B* | *C* |
|---|---|---|---|---|---|
| I | Al | 48308,2 | 48420,2 | 156662 | 2505331 |
| | In | 44515.4 | 46728,6 | 139308 | 1311032 |
| | Tl | 41542,7 | 49337,6 | 132293 | 1265223 |
| II | Al | 48244,5 | 48356,5 | 127527 | 687819 |
| | In | 44535,0 | 46748,2 | 126766 | 643584 |
| | Tl | 41506,4 | 49301,3 | 122617 | 790683 |

Von den Constanten sind der Natur der Sache nach die Werthe von *A* die genauesten und die von *C* die ungenauesten. Warum dies so sein muss, ist in der Note zu dem dritten Abschnitt (1890) unserer Untersuchungen über die Spectren der Elemente (p. 63 ff.) auseinandergesetzt.

## XII. *Ueber die ultrarothen Spectren der Alkalien; von H. Kayser und C. Runge.*

Wenn man eine Zeichnung der Spectren der Alkalien betrachtet, so fällt auf den ersten Blick die Regelmässigkeit ihres Baues auf. Schon in den sechziger Jahren ist diese Regelmässigkeit von Lecoq de Boisbeaudran bemerkt und beschrieben worden. Noch viel gesetzmässiger aber erscheinen die Spectren geordnet, wenn man die Linien auf gewisse Weise in Reihen sondert, wie es von Rydberg und von uns geschehen ist. [1]) Es zeigt sich dann bei allen Alkalien, man möchte sagen, der gleiche Plan des Spectrums, eine solche Analogie in der Vertheilung der Linien, dass jeder Linie des einen Spectrums eine Linie im anderen Spectrum entspricht. In den wenigen Fällen, wo diese Analogie nicht hat nachgewiesen werden können, da handelt es sich entweder um schwächere Linien, die sich leicht der Beobachtung entziehen, oder es fällt die der Analogie nach vermuthete Linie in den ultrarothen Theil des Spectrums, der unseren photographischen Methoden nicht zugänglich war. Nur einen Fall haben wir gefunden, wo nach unseren Beobachtungen die Analogie in der Vertheilung der Linien eine Ausnahme zu erleiden scheint. Im Spectrum des Kalium sollte nämlich etwa bei 696 $\mu\mu$ ausser dem dort vorhandenen Linienpaare von etwas kleinerer Wellenlänge noch ein zweites von gleicher Schwingungsdifferenz liegen. Dieses durch die Analogie mit den übrigen Spectren geforderte Linienpaar haben wir indessen nicht gefunden, und es wird auch von anderen Beobachtern nicht aufgeführt.

Was den ultrarothen Theil des Spectrums der Alkalien betrifft, so ist er kürzlich von Hrn. Snow [2]) mit Hülfe des Bolometers untersucht worden mit der ausgesprochenen Absicht, die von uns der Analogie nach vermutheten Linien, deren Wellenlängen wir mit Hülfe gewisser von uns entdeckter

1) Rydberg, Kongl. svenska vetenskaps-akademiens handlingar bandet 23. Nr. 11; Kayser u. Runge, Abhandl. der Berl. Akad. 1890.

2) Snow, Wied. Ann. 47. p. 208 u. f. 1892.

empirischer Formeln näherungsweise berechnet haben, aufzusuchen.

Die vermuthete Lithiumlinie findet er nahe an der berechneten Stelle und in ihrer Nähe keine anderen Linien, sodass die Uebereinstimmung nicht besser gewünscht werden kann. Was Natrium betrifft, so waren uns die betreffenden Linien, die nach dem Plane der Spectren hier liegen sollten, nahe an den den Formeln entsprechenden Stellen schon durch die Beobachtungen von Abney und Becquerel bekannt. Nur blieb es zweifelhaft, ob es wirklich, wie wir vermuthen, zwei Linienpaare von gleicher Schwingungsdifferenz wie die $D$-Linien sind. Von Abney ist das eine Linienpaar mit der vorgeschriebenen Schwingungsdifferenz beobachtet worden. Das andere dagegen ist von Becquerel nur als eine einfache Linie beobachtet, was aber nichts beweist, da er auch das von Abney beobachtete Linienpaar als einfach aufführt. Snow's Apparat besitzt leider eine zu geringe Dispersion, um die Frage zu beantworten, da er auch das Abney'sche Linienpaar nicht zu trennen vermag. Die übrigen sechs ultrarothen Linien, die Snow ausserdem noch anführt, entsprechen weit geringeren Ausschlägen. Ob sie wirklich dem Natrium angehören, erscheint, nach den Verunreinigungen im sichtbaren Theile zu urtheilen, von denen unten die Rede sein wird, zweifelhaft. Im Spectrum des Kalium vermuthen wir zwei nahe aneinanderliegende Linienpaare, etwa zwischen 1244 und 1266 $\mu\mu$, beide von der gleichen Schwingungsdifferenz mit dem starken rothen Paare. Schon Becquerel hat in dem ultrarothen Theile drei Kaliumlinien beobachtet, von denen die eine bei 1233 $\mu\mu$ nach Snow bei 1220 $\mu\mu$ liegen soll. Es ist nicht unmöglich, dass dies die vermutheten vier Linien sind; denn Snow's Apparat würde sie nicht haben trennen können. Der Bolometerstreifen bedeckt in dieser Gegend etwa 18 $\mu\mu$, und so würden wohl vier Linien, die in einem Intervall von 22 $\mu\mu$ enthalten sind, nicht getrennt werden können. Immerhin muss man sagen, dass die anderen beiden von Becquerel beobachteten und von Snow bestätigten Kaliumlinien ausser den Serien vorhanden sind. Im Spectrum des Rubidium vermutheten wir ein Paar von Linien etwa bei 765 und 779, und ein anderes Paar bei 1650 und 1721 $\mu\mu$, beide mit derselben

Schwingungsdifferenz, wie das starke Paar 781 und 795. Keines dieser Paare hat Hr. Snow gefunden. Zwar würde das erste Paar von dem starken Paare 781, 795 überdeckt werden und sich so der Beobachtung entziehen; aber man sollte meinen, das zweite Paar hätte wohl gefunden werden müssen. Was endlich das Caesium betrifft, so hält auch hier Hr. Snow die Uebereinstimmung seiner Beobachtungen mit den von uns vermutheten Linien für zweifelhaft. Wir müssen dagegen aufrecht erhalten, dass die vermutheten Linien mit aller nur zu verlangenden Genauigkeit von ihm beobachtet worden sind und dass alle übrigen von ihm geführten Linien aller Wahrscheinlichkeit nach dem Caesium gar nicht angehören.

Um diese Behauptung zu begründen, wird es gut sein, die Messungen Snow's im sichtbaren Theile des Spectrums mit den hier schon bekannten Wellenlängen zu vergleichen. Man gewinnt dann eine Vorstellung von der Genauigkeit und von der Reinheit der von Snow gegebenen Spectren. Wir stellen in der folgenden Tabelle seinen Messungen die unserigen gegenüber.

| Lithium | | Natrium | | Kalium | | Rubidium | | Caesium | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Snow | K. u. R. | Snow | K. u. R. | Snow | K. u. R. | Snow | K. u. R. | Snow | K. u. R. |
| 3913 | 3915,2 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| — | — | 3932 | fehlt | — | — | — | — | — | — |
| — | — | 3967 | fehlt | — | — | — | — | — | — |
| — | — | — | — | 4045 | 4044,29 | — | — | — | — |
| — | — | — | — | | 4047,36 | — | — | — | — |
| 4140 | 4132,44 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| — | — | — | — | — | — | 4200 | 4201,98 | 4200 | fehlt |
| - | — | — | — | — | — | | 4215,72 | | |
| 4238 | fehlt | 4236 | fehlt | 4233 | fehlt | 4230 | fehlt | 4230 | fehlt |
| 4288 | 4273,44 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| — | — | — | — | — | — | — | — | 4565 | 4555,44 |
| — | — | — | — | — | — | — | — | 4600 | 4593,34 |
| 4615 | 4602,37 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| — | — | 4677 | 4665,2 | — | — | — | — | — | — |
| — | — | | 4669,4 | — | — | — | — | - | — |
| 4990 | 4972,11 | | | — | — | — | — | — | — |
| — | — | 4996 | 4979,30 | — | — | — | — | — | — |
| — | — | | 4983,53 | — | — | — | — | — | — |
| — | — | | | 5113 | fehlt | — | — | — | — |
| — | — | 5164 | 5149,19 | — | -- | — | — | — | — |
| — | — | | 5153,72 | — | — | — | — | — | - |

| Lithium | | Natrium | | Kalium | | Rubidium | | Caesium | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Snow | K. u. R. | Snow | K. u. R. | Snow | K. u. R. | Snow | K. u. R. | Snow | K. u. R. |
| — | — | — | — | — | — | 5215 | fehlt | — | — |
| — | — | 5271 | fehlt | — | — | 5270 | fehlt | — | — |
| — | — | — | — | 5340 | 5323,55 | — | — | — | — |
| — | — | — | — | | 5340,08 | — | — | — | — |
| — | — | — | — | 5362 | 5343,35 | — | — | — | — |
| — | — | — | — | | 5359,88 | — | — | — | — |
| — | — | — | — | — | — | 5367 | 5362,94 | — | — |
| — | — | — | — | — | — | 5435 | 5431,83 | — | — |
| — | — | 5600 | fehlt | — | — | 5592 | 5648,18 | 5528 | fehlt |
| — | — | — | — | — | — | | 5654,22 | 5635 | 5635,1 |
| — | — | — | — | — | — | — | — | | 5664,0 |
| — | — | 5685 | 5682,90 | — | — | — | — | — | — |
| — | — | | 5688,26 | — | — | 5710 | 5724,41 | — | — |
| — | — | — | — | 5800 | 5782,67 | — | — | — | — |
| — | — | — | — | | 5802,01 | — | — | — | — |
| — | — | — | — | | 5812,54 | — | — | 5828 | 5845,1 |
| — | — | — | — | | 5832,23 | — | — | — | — |
| — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| — | — | 5892 | 5890,19 | — | — | — | — | — | — |
| — | — | | 5896,16 | — | — | — | — | 6010 | 6010,6 |
| — | — | — | — | — | — | 607 | 6071,2 | — | — |
| — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 6102 | 6103,77 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| — | — | 616 | 6154,62 | — | — | 616 | 6159,8 | 619 | fehlt |
| — | — | | 6161,15 | — | — | 627 | 6206,7 | 629 | fehlt |
| — | — | — | — | — | — | | 6298,7 | | |
| — | — | 644 | fehlt | 643 | fehlt | — | — | 646 | fehlt |
| 670 | 6708,2 | 671 | fehlt | — | — | 669 | fehlt | 674 | 6723,6 |
| — | — | 699 | fehlt | 691 | 6911,2 | — | — | 694 | 6973,9 |
| — | — | | | | 6938,8 | — | — | — | — |
| — | — | 710 | fehlt | — | — | — | — | — | — |
| — | — | 714 | fehlt | — | — | — | — | — | — |
| - | — | 720 | fehlt | — | — | 726 | fehlt | 721 | fehlt |
| — | — | 736 | fehlt | — | — | 737 | fehlt | — | — |
| — | — | 770 | fehlt | 768 | 7665,6 | — | — | — | — |
| — | — | — | — | | 7699,3 | — | — | — | — |
| — | — | — | — | — | — | 775 | 7811 | 775 | fehlt |
| — | — | — | — | — | — | 791 | 7950 | 790 | fehlt |

Der Fehler der Snow'schen Messungen bewegt sich zwischen 1 und 2 $\mu\mu$, steigt aber bei der Caesiumlinie 6974 auf 3 und bei den rothen Rubidiumlinien auf 4 und 6 $\mu\mu$. Bei grösserer Wellenlänge nimmt eben die Dispersion des von Snow benutzten Apparates ab und infolge dessen werden die Einstellungen ungenauer.

Was die Reinheit der Spectra betrifft, so sind in der folgenden Tabelle alle die Messungen Snow's zusammen-

gestellt, denen keine bekannten Linien in dem betreffenden Spectrum entsprechen.

| Lithium | Natrium | Kalium | Rubidium | Caesium |
|---|---|---|---|---|
| — | 3932 | — | — | — |
| — | 3967 | — | — | — |
| — | — | — | — | 4200 |
| 4238 | 4236 | 4233 | 4230 | 4230 |
| — | — | 5113 | — | — |
| — | — | — | 5215 | — |
| — | 5271 | — | 5270 | — |
| — | — | — | — | 5528 |
| — | 5600 | — | — | — |
| — | — | — | — | 619 |
| — | — | — | — | 629 |
| — | 644 | 643 | — | 646 |
| — | 671 | — | 669 | — |
| — | 699 | — | — | — |
| — | 710 | — | — | — |
| — | 714 | — | — | — |
| — | 720 | — | 726 | 721 |
| — | 736 | — | 737 | — |
| — | 770 | — | — | 775 |
| — | — | — | — | 790 |

Dass diese Linien nicht dem betreffenden Spectrum angehören, ist nun nicht allein deshalb wahrscheinlich, weil sie als Linien des Spectrums mit den empfindlicheren Methoden bisher nicht gefunden sind, sondern auch, weil für die Mehrzahl das Element, dem sie wahrscheinlich angehören, angegeben werden kann. So ist 4200 vermuthlich die starke Rubidiumlinie und ebenso sind 629, 775 und 790 Rubidiumlinien; 619 rührt vom Natrium, 671, 669 vom Lithium her. Von den übrigen gehören mehrere dem Calcium an. Es sind aller Wahrscheinlichkeit nach die starken Calciumlinien: 3933,83, 3968,63, 4226,91, 5270,45, 6439,36. Auch die bei Natrium geführte Messung 5600 entspricht wahrscheinlich der Gruppe von starken Calciumlinien:

5588,96, 5590,30, 5594,64, 5598,68, 5601,51, 5603,06,

die Snow's Apparat nicht im Stande sein würde zu trennen, wie man aus den nicht getrennten Linienpaaren des Kaliums und des Rubidiums sieht. Es bleibt nur noch der Ursprung der Linien 5113, 5215, 5528 und der sechs rothen beim Natrium verzeichneten Linien unerklärt. Von diesen ist 736

auch bei Rubidium, 720 bei Rubidium und Caesium geführt und 770 ist wohl die starke Kaliumlinie.

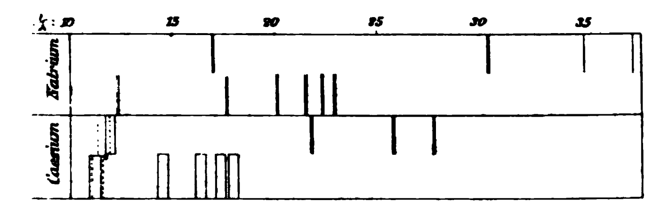
Bei diesen Verunreinigungen im sichtbaren Theile des Spectrums wird man auch die Messung im ultrarothen Theile mit Vorsicht aufnehmen und jedenfalls solche Linien aus einem Spectrum fortlassen, die auch bei einem anderen Elemente auftreten, wenn sie hier nicht viel schwächer sind und als Verunreinigungen betrachtet werden können, die vom ersten Elemente herrühren. Es wird zu dem Zwecke gut sein, die Wellenlängen zusammenzustellen. In der folgenden Tabelle sind die Messungen, die möglicherweise derselben Linie entsprechen, in dieselbe Horizontalreihe gesetzt, bei jeder Linie ist ihre Intensität in Scalentheilen des Galvanometerausschlages hinzugefügt und zugleich ist in der letzten Colonne bemerkt, wieviel $\mu\mu$ auf den Bolometerstreifen kommen. Wenn man bedenkt, dass in der Gegend der kleinen Wellenlängen, wo der Bolometerstreifen nur 1,3 $\mu\mu$ breit ist, Fehler von 1 bis 1,5 $\mu\mu$ vorkommen, so wird man auch im ultrarothen Theile Fehler etwa von der Grösse der Streifenbreite nicht für ausgeschlossen halten.

| Lithium | | Natrium | | Kalium | | Rubidium | | Caesium | | Breite des Bolometerstreifens |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda$ | $J$ | $\lambda$ | $J$ | $\lambda$ | $J$ | $\lambda$ | $J$ | $\lambda$ | $J$ | |
| 811 | 296 | — | — | — | — | — | — | — | — | 9 $\mu\mu$ |
| — | — | 818 | 660 | — | — | 821 | 42 | — | — | " |
| — | — | — | — | — | — | — | — | 833 | 297 | " |
| — | — | 855 | 18 | 840 | 18 | 845 | 50 | — | — | 10 $\mu\mu$ |
| — | — | — | — | — | — | — | — | 865 | 151 | " |
| — | — | — | — | 885 | 13 | 878 | 60 | 882 | 345 | " |
| — | — | — | — | — | — | 913 | 11 | 900 | 155 | 11 $\mu\mu$ |
| — | — | 930 | 8 | 950 | 23 | 945 | 10 | — | — | 12 $\mu\mu$ |
| — | — | 995 | 10 | — | — | 997 | 151 | 995 | 182 | 13 $\mu\mu$ |
| — | — | — | — | — | — | 1063 | 11 | — | — | 14 $\mu\mu$ |
| — | — | 1075 | 13 | 1086 | 108 | 1090 | 13 | — | — | 15 $\mu\mu$ |
| — | — | 1132 | 419 | — | — | — | — | — | — | 15 $\mu\mu$ |
| — | — | — | — | 1155 | 395 | 1153 | 26 | 1150 | 9 | 16 $\mu\mu$ |
| — | — | 1245 | 30 | 1220 | 205 | 1224 | 13 | 1205 | 7 | 17 $\mu\mu$ |
| — | — | — | — | — | — | 1318 | 198 | 1323 | 81 | 18 $\mu\mu$ |
| — | — | — | — | — | — | — | — | 1420 | 38 | 19 $\mu\mu$ |
| — | — | — | — | 1470 | 70 | 1475 | 102 | 1450 | 52 | 21 $\mu\mu$ |
| — | — | — | — | 1500 | ? | 1520 | 71 | 1520 | 20 | " |
| — | — | — | — | — | — | — | — | 1575 | 8 | " |
| 1800 | ? | 1800 | ? | — | — | — | — | — | — | " |

Es ist nicht möglich, ohne weitere experimentelle Untersuchung diese Zahlen zu sichten. Aber es wird sehr wahr-

scheinlich, dass die Spectren nicht rein sind. Nicht allein ist das Caesium, wie schon Hr. Snow selbst bemerkt, durch Rubidium verunreinigt, sondern auch Rubidium durch Natrium (818) und Natrium, Rubidium, Caesium durch Kalium (1086, 1155, 1220). Von den Linien, denen geringere Ausschläge entsprechen, sind mehrere verdächtig, weil sie in mehreren Spectren zugleich vorkommen. Von den Linien des Caesiums sind verdächtig 995, 1150, 1205, 1323, 1450, 1520. Wenn man also von den schwächeren Linien 1420 und 1575 absieht, so bleiben als sichere Caesiumlinien allein 833, 865, 882, 900 übrig. Ihrer Stärke nach bilden sie zwei Paare, das eine 833, 882, das andere etwas schwächere 865 und 900. An dieser Stelle des Spectrums müssen nun der Analogie nach zwei starke Paare von Linien liegen, deren Wellenlängen wir nach den empirischen Formeln auf etwa 828, 867 für das stärkere Paar und 877, 922 für das weniger starke berechnet hatten. Die berechneten Werthe hielten wir wegen der Ungenauigkeit der Extrapolation nur auf 10 bis 20 $\mu\mu$ für richtig. Die Uebereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Werthen ist darnach recht gut. Aber wir würden auf diese Uebereinstimmung viel weniger Gewicht legen, als auf ein anderes Kriterium. Die Analogie verlangt, dass die beiden Paare eine vorgeschriebene Schwingungsdifferenz haben müssen. Es sollten die reciproken Werthe der beiden Wellenlängen eines jeden Paares um 545 Einheiten der fünften Stelle voneinander verschieden sein. Leider sind Hrn. Snow's Messungen nicht genau genug, um auch in diesem Punkte eine sichere Beurtheilung zu gestatten. Nimmt man an, dass die beobachtete Wellenlänge um die Breite eines Bolometerstreifens anders sein kann, so folgt, dass die Differenz der reciproken Wellenlängen für das erste Paar zwischen 422 und 913, für das zweite Paar zwischen 218 und 681 Einheiten der fünften Stelle liegt. Aber auch ohne alle Rechnung wird der Vergleich der Zeichnung des Caesiumspectrums mit der Zeichnung des Natriumspectrums überzeugend darthun, wie die von Hrn. Snow beobachteten Linien von der Analogie gefordert waren. Das Natriumspectrum besteht aus drei Reihen von Paaren der sogenannten Hauptserie, deren erstes und stärkstes Glied die *D*-Linien sind und zwei Nebenserien. Im Caesiumspectrum

haben wir der Hauptserie und der ersten Nebenserie entsprechende Reihen von Linienpaaren aufgefunden bis auf die ersten und vermuthlich stärksten Paare, die ins Ultraroth fallen. In der Figur sind die Linien nach ihren reciproken Wellenlängen aufgetragen, damit man die Uebereinstimmung in der Schwingungsdifferenz der Paare der Nebenserie und des ersten Paares der Hauptserie sieht. Die punktirten Linien stellen die von Hrn. Snow beobachteten dar, und zwar sind die beiden stärkeren 833 und 882 zur Hauptserie, die beiden schwächeren 865 und 900 zur Nebenserie gerechnet. Die dabei stehenden ausgezogenen Linien bezeichnen die Stellen, wo wir sie nach unseren empirischen Formeln vermutheten.




Man sieht, dass die von Hrn. Snow beobachteten Caesiumlinien das Schema auf das Glücklichste vervollständigen. Es ist aber sehr wünschenswerth, dass die Messungen mit grösserer Genauigkeit wiederholt werden, um die Frage der Schwingungsdifferenz ins Reine zu bringen. Und schliesslich wäre noch ein Paar mit viel grösserer Wellenlänge, aber mit derselben Schwingungsdifferenz wie die anderen Paare bei etwa 4000 $\mu\mu$ aufzusuchen, das dem von Abney entdeckten Paar von Natriumlinien bei 819 analog wäre.

## XIII. *Untersuchungen auf dem Gebiet der inneren Wärmeleitung; von Richard Wachsmuth.*

---

§ 1.

Die innere Wärmeleitung von Flüssigkeiten ist vielfach und nach sehr verschiedenen Methoden untersucht worden. Die Hauptschwierigkeit, die zu überwinden war, bot das Auftreten von Strömungen in der untersuchten Flüssigkeit, hervorgerufen durch die verschiedenen Temperaturen im Innern und das geringere specifische Gewicht der wärmeren Schichten. Im allgemeinen resultirte daraus ein Apparat, bei welchem die Flüssigkeitsschicht von oben her erwärmt oder von unten her abgekühlt wurde — bisweilen auch beides —, weil die wärmeren Schichten ihre höhere Lage beibehalten sollten.

Bei den meisten der erdachten Methoden benutzt man entweder eine lange Flüssigkeits*säule*, die an einem Ende eine constante Temperaturänderung erleidet, und messen das Wärmegefälle an verschiedenen Stellen dieser Säule; oder man wendet eine dünne Flüssigkeits*lamelle* zwischen zwei Kupferplatten an, lässt den Wärmeaustausch zwischen den zwei Platten vor sich gehen und misst in diesen den Temperaturverlauf. Der Kürze halber will ich die erste Art *Säulenmethode*, die zweite *Lamellenmethode* nennen.

Nach den ersten rein qualitativen Untersuchungen von Rumford[1]), Th. Thomson[2]), Nicholson, Pictet und Murray[3]) unternahm es zuerst Despretz[4]), die *Säulen*methode quantitativ zu verwerthen. Die ersten brauchbaren absoluten Werthe bestimmte dann Hr. Lundquist[5]) auf einem

---

1) Count Rumford, Essays **2.** p. 199.

2) Th. Thomson, Journal of Nicholson **1.** p. 81.

3) J. Murray, Arch. **42.** p. 195.

4) Despretz, Pogg. Ann. **46.** p. 340. 1839; Comp. rend. **7.** p. 933. 1838. Ann. chim. et phys. **61.** p. 206. 1839 (fast überall falsch angegeben).

5) Lundquist, Undersöking etc. Upsala Universitets Årsskrift 1869.

von Ångström[1]) angegebenen Wege und auch Hr. Chree[2]) hat sich dieser Methode bedient.

Die *Lamellen*methode wurde zuerst von Hrn. Guthrie[3]) angewandt, doch rührt die wesentlichste Vervollkommnung von Hrn. H. F. Weber[4]) her. Weiterhin haben dann Hr. De Heen[5]), Hr. Christiansen[6]), Hr. Henneberg[7]) und Hr. Jäger[8]) die Weber'sche Methode benutzt und ihren Zwecken angepasst.

Ausser der Lamellen- und Säulenmethode sind noch einige andere Arten der Bestimmung der inneren Wärmeleitung zu erwähnen.

Hr. Winkelmann[9]) setzte zwei Metallcylinder ineinander, füllte den Zwischenraum mit Flüssigkeit und kühlte von aussen. Der innere Cylinder mit einem engen Ansatzrohr diente als Thermometer. Es ist dies eine Methode, die bereits von Hrn. Narr angewandt wurde, wie Beetz[10]) angibt, und die dann Hr. Stefan[11]) für Gase benutzte.

Beetz[10]) bediente sich derselben Methode in der Kundt'schen Modification, dass zwei dünne Reagenzgläser ineinander gesteckt wurden. Seine Resultate sind von Hrn. Weber[12]) widerlegt worden, bei dem überhaupt eine eingehende Kritik und Correctur der brauchbaren älteren quantitativen Methoden zu finden ist.

Hr. Grätz[13]) wandte gegen die Weber'sche Methode ein, dass sie die äussere Wärmeleitungsfähigkeit benutze, und dass die vollständige oder partielle Diathermansie der Flüssigkeiten

1) Ångström, Pogg. Ann. **123.** p. 638. 1864.
2) Chree, Proc. Roy. Soc. London **42.** p. 300, **43.** p. 30. 1887.
3) Guthrie, Phil. Trans. **159.** p. 637. 1869; Phil. Mag. (4) **35.** p. 283. 1868; **37.** p. 468. 1869.
4) H. F. Weber, Wied. Ann. **10.** p. 103. 1880.
5) De Heen, Bull. Ac. Belg. (3) **18.** p. 192. 1889.
6) Christiansen, Wied. Ann. **14.** p. 23. 1881.
7) Henneberg, Wied. Ann. **36.** p. 146. 1889.
8) G. Jäger, Wien. Ber. **99.** p. 245. 1890.
9) Winkelmann, Pogg. Ann. **153.** p. 481. 1874.
10) Beetz, Wied. Ann. **7.** p. 435. 1879; Sitzb. bayr. Ac. p. 86. 1879.
11) Stefan, Wien. Ber. **65.** p. 45.
12) H. F. Weber, l. c. p. 480 ff.
13) Grätz, Wied. Ann. **18.** p. 79. 1883; **25.** p. 337. 1885.

nicht berücksichtigt sei. Von diesen zwei Fehlern sollte seine Methode frei sein. Ein Flüssigkeitsstrahl von constanter Geschwindigkeit wurde nämlich vor und nach dem Hindurchgehen durch ein dünnes, in einem Wasserbad auf constanter Temperatur erhaltenes Metallrohr mit dem Thermometer auf seine Temperaturen geprüft und aus deren Differenz die Leitfähigkeit ermittelt. Da um die Flüssigkeit in dem Rohr rings herum die Temperatur überall gleich war, so war eine Wärmestrahlung von den Wänden unmöglich. Auch trat die Flüssigkeit zwischen den zwei Thermometern mit der Luft nirgends in Berührung, die äussere Leitungsfähigkeit gegen Luft wurde also hier vermieden. Dagegen ist durch die Gestaltung der Flüssigkeit in einen dünnen langen Strahl innerhalb der Röhre für das gleiche Volumen bei dem Grätz'schen Apparat eine ca. 7mal so grosse Flüssigkeitsoberfläche geboten, als bei der Weber'schen Anordnung einer dünnen Flüssigkeitslamelle. Eine Discontinuität der Wärmeleitung an der Grenze der Flüssigkeit wird dabei also eine viel grössere Rolle spielen. Ausserdem gestattet das zweite Thermometer keine sehr genauen Temperaturangaben; denn der Flüssigkeitsstrahl besteht aus lauter concentrischen Cylindern von verschiedener Temperatur, die sich nach Verlassen der Röhre mehr oder minder vermischen, gibt also bloss einen mittleren Werth, der bei langsamem Strömen auch von der Grösse der Thermometerkugel abhängig ist.

In der folgenden Tabelle ist eine Zusammenstellung der hauptsächlichsten Bestimmungen[1]) für die Constante der inneren Wärmeleitung der verschiedenen untersuchten Flüssigkeiten unter Anwendung der Weber'schen Correcturen gegeben.

Es bedeuten Lu Lundquist, Wi Winkelmann Apparat I, We Weber, Lo Lorberg, Ch Chree, Gr Grätz, (DH) De Heen, (Chr) Christiansen, (He) Henneberg, (Jä) Jäger; wobei die Klammern anzeigen sollen, dass die mitgetheilten Werthe relative sind, bezogen auf Wasser = 100.

1) Gänzlich werthlose Resultate sind fortgelassen. Die Lundquist'schen Werthe gebe ich nach Wüllner, Exp. Phys. 3. p. 316. 1885, da mir die Originalarbeit nicht zugänglich.

We* sind absolute Werthe, die Hr. Weber später nach etwas veränderter Methode[1]) bestimmte. Zum Vergleich sind noch die Werthe für Quecksilber von An Ångström, Weber und Be Berget hinzugefügt. Alle nicht eingeklammerten Zahlen sind in cm g min ausgedrückt.

Quecksilber: 1,06 (50°) An; 0,9094 (4,5°), 0,9720 (17°) We; 0,925 (4°) Lo; 1,2090 (0°—100°) Be.

Wasser: 0,0937 (40,8°) Lu; 0,0624 Wi; 0,0745 (4°), 0,0857 (23°) We; 0,0816 We*; 0,08317 (4°), 0,09108 (23°) Lo; 0,0747 (18°), 0,0815 (19,5°) Ch; 0,0945 (30°) Gr.

KCl: (20 Proc. 92,0 Jä); spec. Gew. 1,187, 0,0669 Wi.

$KClO_3$: 0,0695 Gr.

NaCl: spec. Gew. 1,178, 0,0901 (43,9°) Lu; spec. Gew. 1,110, 0,0658 Wi; 0,0692 (4°), 0,0809 (26°) We; 0.0671 Gr; (25 Proc. 93,9, 12,5 Proc. 96,8 Jä).

$BaCl_2$: (21 Proc. 96,3 Jä).

$SrCl_2$: (25 Proc. 94,6 Jä).

$CaCl_2$: (30 Proc. 90,7, 15 Proc. 95,4 Jä).

$MgCl_2$: (22 Proc. 89,0, 11 Proc. 94,9 Jä).

$ZnCl_2$: (35 Proc. 83,7, 17,5 Proc. 91,5 Jä).

$KNO_3$: (20 Proc. 92,2, 10 Proc. 97,4 Jä).

$NaNO_3$: (44 Proc. 90,4, 22 Proc. 94,1 Jä).

$Sr(NO_3)_2$: (36 Proc. 92,3 Jä).

$Pb(NO_3)_2$: (36 Proc. 92,8 Jä).

$K_2SO_4$: (10 Proc. 99,3 Jä).

$Na_2SO_4$: (10 Proc. 99,8 Jä).

$MgSO_4$: (22 Proc. 97,5 Jä).

$CuSO_4$: 0,0710 We; 0,0922 Gr; (18 Proc. 95,1 Jä).

$ZnSO_4$: spec. Gew. 1,237, 0,0984; spec. Gew. 1,252, 0,0948; spec. Gew. 1,382, 0,0948 Lu; 0,0872 (45°) Lu corr. von We; 0,0711, 0.0698, 0,0691 (4°), 0,0776 (23°) We (32 Proc. 91,5, 16 Proc. 95,3 Jä).

KHO: (42 Proc. 90,6, 21 Proc. 95,5 Jä).

$K_2CO_3$: (10 Proc. 97,4 Jä).

$Na_2CO_3$: (10 Proc. 96,8 Jä).

HCl: (38 Proc. 72,6, 25 Proc. 79,4, 12,5 Proc. 87,0 Jä).

$H_2SO_4$: spec. Gew. 1,128, 0,0900; spec. Gew. 1,207, 0,0870; spec. Gew. 1,372, 0,0756 Lu; sp. Gew. 1,05, 0,076; spec. Gew. 1,18, 0,078 Ch; (90 Proc. 58,4, 60 Proc. 72,2, 30 Proc. 85,8 Jä); 0,0459 We*.

Methylalkohol: 0,0354 (19,5°), 0,0346 (18°) Ch; (27,34 DH); 0,0297 We*.

Aethylalkohol: spec. Gew. 0,795, 0,0295 Wi; 0,0292 We; 0,0254 We*; 0,0327 Gr; (24,16 DH); (37,08 Chr); (30,09 He).

Propylalkohol: 0,0224 We*.

Butylalkohol (iso): 0,0204 We*.

Amylalkohol: (18,55 DH); 0,0197 We*.

Ameisensäure: 0,0389 We*.

Essigsäure: 0,0283 We*.

Propionsäure: 0,0234 We*.

Buttersäure (norm.): 0,0216 We*.

Isobuttersäure: 0,0204 We*.

Valeriansäure (norm.): 0,0195 We*.

Isovaleriansäure: 0,0187 We*.

Isocapronsäure: 0,0179 We*.

Methylacetat: (22,06 DH); 0,0231 We*.

1) H. F. Weber, Berliner Berichte p. 809. 1885.

Aethylformiat: 0,0227 We*.
Aethylacetat: (20,00 D H); 0,0209 We*.
Propylformiat: 0,0214 We*.
Propylacetat: 0,0196 We*.
Methylbutyrat: 0,0201 We*.
Aethylbutyrat: 0,0191 We*.
Methylvalerat: (17,63 D H); 0,0189 We*.
Aethylvalerat: (17,34 D H); 0,0184 We*.
Amylacetat: (16,98 D H); 0,0181 We*.
Amylvalerat: (16,37 D H).
Chlorbenzol: 0,0181 We*.
Chloroform: 0,0220 We; 0,0173 We*.
Chlorkohlenstoff: 0,0151 We*.
Propylchlorid: 0,0170 We*.
Isobutylchlorid: 0,0167 We*.
Amylchlorid: 0,0170 We*.
Brombenzol: 0,0159 We*.
Aethylbromid: 0,0148 We*.
Propylbromid: 0,0154 We*.
Isobutylbromid: 0,0167 We*.
Amylbromid: 0,0142 We*.
Aethyljodid: 0,0133 We*.
Propyljodid: 0,0132 We*.
Isobutyljodid: 0,0125 We*.
Amyljodid: 0,0122 We*.
Benzol: (19,08 D H); 0,0200 We*.
Toluol: 0,0184 We*.
Aethylbenzol: (19,68 D H).
Amylbenzol: (17,26 D H).
Xylol: (17,14 D H).
Cymol: (15,93 D H); 0,0163 We*.
Amylbromür: (13,75 D H).

Aether: 0,0243 We; 0,0227 Gr; 0,0182 We*.
Schwefelkohlenstoff: sp. Gew. 1,268, 0,0357 Wi; 0,0250 We; 0,0160 Gr; 0,0322 (15,5°) Ch; 0,0206 We*.
Benzin: 0,0200 We.
Glycerin: sp. Gew. 1,220, 0,0404 Wi; 0,0402 We; 0,0382 Gr; (59,93 Chr); 0,0402 We*.
Petroleum: 0,0213 Gr.
Paraffinöl: 0,0264 (19°), 0,0273 (20°) Ch.
Terpentinöl: 0,0195 Gr; 0,0189 (18°) Ch; 0,0156 We*.
Olivenöl: 0,0235 We; (32,10 Chr).
Citronenöl: 0,0210 We; (32,10 Chr).
Senföl: 0,0229 We*.
Aethylsulfid: 0,0197 We*.
Anilin: 0,0245 We*.

§ 2.

Bei der grossen Auswahl von Bestimmungsmethoden erschien es mir interessant zu untersuchen, bei welchen von ihnen die Strömungen in der Flüssigkeit wirklich vermieden werden.

Ich habe daher zuerst die Säulenmethode geprüft, indem ich in einem von oben her erhitzten Becherglas das Fortschreiten der Wärme verfolgte, und bin zu dem Resultat gekommen, dass hier selbst bei möglichst guten Vorkehrungen gegen seitliche Einflüsse Strömungen auftraten. Alle Messungen nach dieser Methode müssen also erst sehr sorgfältigen Prüfungen unterliegen, ehe man sich ihrer zu wirklich genauen Bestimmungen bedienen darf. Offenbar genügen bei der langen und dünnen Flüssigkeitssäule schon sehr geringe Unregelmässigkeiten, sei es in dem Erwärmungsgefäss, sei es im um-

gebenden Mantel, um das statische Gleichgewicht der aufeinander geschichteten Lagen verschiedener Temperatur und daher verschiedenen specifischen Gewichtes zu stören.

Als Lamellenmethode habe ich dann die Weber'sche benutzt und durch Gelatiniren der dadurch am Strömen gehinderten Flüssigkeit untersucht, ob die hier für die Wärmeleitung gefundenen Werthe nicht durch Strömungserscheinungen vergrössert seien. Es existiren darüber meines Wissens noch keine Untersuchungen, nur Beetz hat für seine Methode mit Quittenschleim und Stärkemehl derartige Versuche angestellt. Ich fand, dass der benutzte Abstand der beiden Kupferplatten (ca. 2 mm) versechsfacht werden kann, ohne dass die geringsten Unterschiede in der Leitfähigkeit sich ergaben, die auf eine Strömung hinweisen könnten. Es scheint, dass bei diesem Apparate die hier fortwährend abnehmende geringe Differenz der Temperaturen der beiden Kupferplatten zur Erzeugung von Strömungen nicht genügt.

Mit Benutzung dieser nun als zuverlässig nachgewiesenen Methode suchte ich weiterhin zu finden, ob ein Zusatz eines intensiven Farbstoffes das Leitvermögen des Wassers beeinflusse, habe aber keine Aenderung wahrnehmen können.

Ebenso waren Versuche, eine Beziehung zwischen der Dielectricitätsconstante und dem Wärmeleitvermögen aufzufinden, erfolglos.

Das Hauptresultat meiner Untersuchungen ist daher der Nachweis, dass *die innere Wärmeleitung unabhängig* ist *von der inneren Reibung in der Flüssigkeit.*[1])

Zur weiteren Prüfung habe ich noch eine Reihe von Bestimmungen der inneren Leitfähigkeit für einige Oele und Balsame hinzugefügt.

---

1) Analoges für die electrische Leitfähigkeit hat ja Arrhenius gezeigt, nämlich dass ein geringer Zusatz von Gelatine ebenfalls ohne Wirkung ist, während freilich später für grosse Quanta eine Beeinflussung nachgewiesen wurde.

§ 3.

Um das Fortschreiten der Wärme in einer Flüssigkeitssäule beobachten zu können, benutzte ich Flüssigkeiten, die mit der Temperatur ihre Farbe ändern.

Eine bei Zimmertemperatur hergestellte sehr verdünnte blaue *Jodstärkelösung* wird ziemlich plötzlich beim Erhitzen farblos, je nach dem Grade der Verdünnung zwischen ca. 30 bis 70$^0$ und färbt sich bei Abkühlung wieder blau, jedoch tritt die Blaufärbung erst bei etwas tieferer Temperatur wieder ein. *Eisenchlorid* ist in sehr verdünnter Lösung hellgelb, wird aber bei ca. 80$^0$ dunkelbraun. Doch ist der Uebergang ein ganz allmählicher, sodass es sich als zu Beobachtungen untauglich erwies.

In einigen Fällen wurde Wasser mit *Phenolphtaleïn* versetzt und durch geringen Zusatz von Ammoniak scharlachroth gefärbt. Bei ca. 65$^0$ trat Entfärbung ein.

Brauchbar erwies sich *Cyanin*, das mit Spuren von Salzsäure farblos gemacht beim Erwärmen wieder blau wird.

Meine Versuche verliefen nun folgendermaassen: Ein Becherglas wurde mit Jodstärkelösung gefüllt und so aufgestellt, dass sein oberer Rand horizontal war. Darauf wurde als Erwärmungsapparat ein Messingcylinder gesetzt, der oben im Deckel zwei Oeffnungen hatte, durch deren eine ein Dampfstrom eintrat, während durch die andere ein Rohr bis fast auf den Boden des Cylinders ging, um von dort den Dampf wieder austreten zu lassen. Dieser Cylinderboden berührte die ganze Oberfläche der Flüssigkeit und stand auf dem Rande des Becherglases auf. Er wurde vor Beginn jedes Versuches frisch geputzt. Auch benutzte ich zur möglichsten Vermeidung von Luftblasen nur ausgekochtes Wasser.

Wurde der Dampf eingeleitet, so bildete sich mit ziemlich deutlicher horizontaler Grenze eine wasserhelle Schicht, die anfangs regelmässig abwärts fortschritt. Nach etwa einer halben Stunde bildete sich aber eine schwache zweite Grenze unterhalb der ersten, bald entstanden weitere Schichtungen, die Grenzen wurden undeutlich und diejenige Grenzlinie, welche für die gewählte Verdünnung die Entfärbungstemperatur angab, verlor sich.

Da ich die Schichtungen äusseren Einflüssen zuschrieb, so wandte ich die Berget'sche Methode[1]) des Schutzringes an, d. h. ich setzte das Becherglas voll Wasser mit Zusatz von Jodstärke in ein zweites Becherglas mit etwas grösserem Durchmesser und füllte dieses mit reinem, ebenfalls ausgekochtem Wasser. Der Erhitzungskessel wurde so gross gewählt, dass sein Boden auf dem oberen Rande beider Gläser aufstand.

Anfangs war das Fortschreiten der Grenzlinie ein regelmässiges. Als Beispiel sei folgender Versuch angeführt:

1892 Feb. 15. Zimmertemp. 17°. Entfärbungstemp. 52°.

Zeit in Min. 0, 5, 15, 25, 35, 45, 55.

Millimeter Abstand von der Oberfläche: 0, 0.6, 0.85, 1.2, 1.5, 1.7, 1.85.

Dann aber trat wieder die Trennung in Bänder ein, die sich jetzt sehr scharf voneinander abhoben und ebenfalls langsam nach unten fortschritten. Wiederholte Versuche, bei denen ich die Dicke des Schutzmantels variirte oder ihn ganz fortliess, zeigten mir, dass die Schichtungen nicht durch seitliche Beeinflussungen, wie die Lage des Fensters etc. hervorgerufen waren; denn je stärker der Schutzring, um so schärfer die Grenzen.

Anzunehmen, dass die Grenzen Wirbelgrenzen seien, lag nahe; auch zeigten sich die blauen Schichtungen an ihren oberen Grenzen entschieden dunkler, waren also dort kühler als an den unteren. Doch habe ich auch unmittelbar wahrnehmbar Wirbelströmungen nachgewiesen. Bei einem Becherglas von 8.2 cm Länge entstand nach anfänglich normalem Fortschreiten der Entfärbungsgrenze genau in der Mitte des Glases eine zweite Grenze in hellerem und dunklerem Blau, welche bei seitlicher Ansicht einfache regelmässige Wellenlinien zeigte, die sich nach 5 Min. sogar zu Maeander-förmigen Windungen ausbildeten.[2]) Nun denke man sich einen Thermometer an dieser Stelle oder auch einen feinen Bolometerdraht, der mit jeder Windung vier Schnittpunkte haben würde; beide

1) Berget, Compt. rend. **106**. p. 1152. 1888.

2) Auf die hydrodynamische Seite dieses Versuches behalte ich mir vor in einer späteren Arbeit zurückzukommen.

vermöchten die Erscheinung gar nicht oder nur sehr undeutlich anzuzeigen, da sie beide nur das Integral der umliegenden Temperaturen geben können.

Ein weiterer Versuch zum Nachweis der Wirbel war folgender: Eine verdünnte Gelatinelösung mit einem Zusatz von eben farblos gewordenem Cyanin wurde in ein Becherglas gefüllt und nach dem Erstarren wie gewöhnlich von oben erhitzt. Jetzt konnten sich keine Schichtungen in Gebieten zeigen, die tiefer lagen, als die zum Schmelzen nöthige Temperatur vorgedrungen war. Ausserdem war die ganze Flüssigkeit so zäh, dass ich kaum mehr Strömungen erwartete. In der That traten keine Bänder mehr auf, ebensowenig wie bei einem analogen Versuch mit Phenolphtaleïn. Brachte ich jedoch auf die schon etwas vorgerückte Grenzfläche der geschmolzenen Gelatine gegen die feste ein Tröpfchen intensiv blauer Cyaninlösung, indem ich eine feine Capillare einschob und den Tropfen hinabsinken liess, so zertheilte er sich in feine Fäden, die alle von einem wellenförmigen Wirbel erfasst und auf der Grenzfläche gegen die Mitte fortgeführt wurden.

Ohne Gelatinezusatz bildeten sich in der farblosen Cyaninlösung wieder Bänder gefärbter und also wärmerer Flüssigkeit, ganz ähnlich wie bei der Jodstärkelösung.

Um über die Natur des Wirbels ins Klare zu kommen und zu sehen, ob die Schichtungen vielleicht durch chemische Veränderungen in den Lösungen entstanden seien, habe ich noch eine Reihe von Versuchen mit reinem Wasser gemacht, dem ich, um die Strömungen verfolgen zu können, einige Tropfen Anilinroth hinzusetzte. Ein Becherglas mit oben abgeschliffenem Rand wurde in das gewöhnliche Mantelglas gesetzt; doch hatte ich beide nicht ganz mit Wasser gefüllt, vielmehr zu oberst eine dünne Schicht Knochenöl gegossen. In das Oel gebrachte Tropfen der Anilinrothlösung sanken bloss bis an die Grenzschicht und drangen erst bei beginnender Erhitzung in das Wasser ein. Bei wenig Farbstoff bildeten sich ebenfalls wieder Bänder. Während aber bei Jodstärkelösung die Farbenbänder nicht bis dicht an den Rand des Becherglases gingen, vielmehr eine farblose, d. h. heissere Schicht sich dort zeigte, die an den Stellen, wo zwei Bänder einander berührten, sogar etwas zwischen sie hineindrang, so trat dies-

mal das Umgekehrte auf, weil die farbigen Streifen die heisseren waren.

Unter Anwendung von soviel Farbstoff, dass er vor Beginn der Erwärmung die Grundfläche der Knochenölschicht bedeckte, stellte sich schliesslich die Natur der Wirbel wie in Fig. 1 dar. Die weiss gebliebenen Theile sind die bei der Jodstärke auftretenden Bänder. Uebertrieben gezeichnet scheinen sich die einzelnen Schichten wie in Fig. 2 aufeinander zu legen.

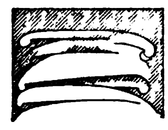


Fig. 1.



Fig. 2.

Schliesslich soll noch eines Versuchs Erwähnung geschehen, der angestellt wurde, um die Erscheinungen nächst dem Boden des Becherglases zu prüfen: Es wurden drei auf Siegellackfüssen central ineinander gestellte Bechergläser mit oben abgeschliffenen in einer Horizontalebene liegenden Rändern verwendet. Die beiden Schutzmäntel enthielten Wasser, oben mit einem Oelring; der innersten Becherfüllung war noch etwas Alkohol zugesetzt, um eine auf dem Boden des innersten Glases eingedampfte blaue Cyaninlösung leichter wieder aufzulösen. Es bildete sich bei längerem ruhigem Stehen auf dem Boden eine dünne Schicht von intensiv blauer Farbe.

In das Oel, das auch hier den oberen Abschluss bildete, hatte ich wie früher etwas Anilinroth gebracht, um die in den früheren Versuchen regelmässig auftretenden Bänder wieder beobachten zu können. Nach einer halben Stunde zeigte sich über der farbigen Bodenschicht ein Band und zehn Minuten darauf hatte sich zwischen beiden eine blaue Verbindung mit einer tiefen Einschnürung in der Mitte gebildet. Offenbar war am Rand ein ringförmiger Wirbel, wie der Rauchring einer Cigarre, entstanden, der keine Farbe in sich hineinliess, wohl aber, da er aussen nach unten und innen nach oben ging, die blaue Farbe innen mit heraufriss, sodass sich ein Mantel bildete.

Durch diese Versuche scheint mir die Schwierigkeit strömungsfreier Erwärmung einer längeren Flüssigkeitssäule hinlänglich dargethan und der Nachweis gebracht zu sein, dass

die auftretenden Schichtungen auf innere Wirbel zurückzuführen sind.

§ 4.

Hr. H. F. Weber[1]) hat eine Methode angegeben, die die Messung der inneren Wärmeleitung an Flüssigkeitslamellen gestattet. Er nimmt zwei genau eben geschliffene cylindrische Kupferplatten, trennt sie durch drei kleine Glasklötzchen und füllt den so entstandenen Zwischenraum durch eine Oeffnung in der oberen Platte mit Flüssigkeit. Dies genau horizontal aufgestellte Plattensystem wird, nachdem es in seiner ganzen Masse von der Zimmertemperatur durchdrungen ist, auf eine horizontal abgeschliffene Eisplatte herabgesenkt und mit einer Hülle von 0° umgeben; den Verlauf der Abkühlung zeigt ein in die obere Kupferplatte eingelassenes Thermoelement, dessen andere Löthstelle auf 0° gehalten wird. Hieraus berechnet sich die Constante der inneren Wärmeleitung.

Leider fehlt eine Beschreibung der zum Aufhängen wie Herablassen nöthigen Vorrichtungen. Ich habe mir daher folgenden Apparat construirt.

Eine gleichseitig dreieckige gusseiserne Platte (*a*) (Fig. 3) von 30,5 cm Seitenlänge und 1 cm Stärke war an ihren Ecken mit drei 23,5 cm hohen und 1,3 cm dicken Füssen versehen und trug im Mittelpunkt einen rechteckigen 11 cm hohen, 1,5 cm breiten und 1 cm dicken Messingstab (*b*), der senkrecht nach oben stand. Eine daraufgepasste messingene Hülse (*c*) mit Schleiffeder und Vorrichtung zum Einschnappen bei höchster Stellung liess sich an dem Messingstab verschieben und war an ihrem unteren Ende mit einer Messingscheibe von 6 cm Durchmesser versehen. Auf dieser Scheibe schliff eine in der Mitte 3 cm weit durchbohrte zweite dreieckige Eisenplatte (*d*), die von drei Schrauben festgehalten wurde und durch drei Ausschnitte einen Spielraum zur Drehung um die Verticalaxe erhielt. Zwei Messinggriffe (*e e*) erleichterten die Bewegung. In je 15 cm Abstand voneinander waren an den drei Ecken dieser kleineren Eisenplatte drei 15 cm lange und 0,2 cm starke Drahtstäbe (*f*) eingelassen und mit Doppel-

1) H. F. Weber, Wied. Ann. **10**. p. 107. 1880.

schrauben verstellbar gemacht. Unten trugen sie je ein 1,5 cm breites und 0,1 cm dickes Messingscheibchen, auf welches je einer der drei gleich zu erwähnenden Zapfen der unteren Kupferplatte (*h*) aufgelegt werden konnte. Für die Drahtstäbe und ihre der Drehung des oberen Eisendreiecks entsprechende seitliche Bewegung waren in dem Hauptdreieck Schlitze angebracht. Dieser ganze so montirte Dreifuss konnte auf drei mit einer Steinplatte fest verbundene Unterlegplatten gestellt werden.

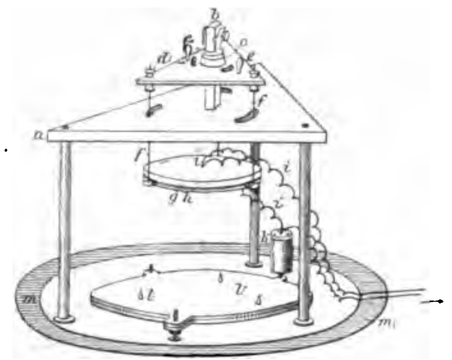


Fig. 3.

Die Kupferplatten (*g*, *h*) selbst waren mit einem grossen Ansatzkopf gegossen, um das Auftreten innerer Blasen möglichst zu verhindern. Nachdem sie glatt gedreht waren, erhielt die zur oberen Platte bestimmte eine centrale Durchbohrung von 0,1 cm Stärke, die später für die Einfüllung der zähen Balsame bis auf 0,3 cm vergrössert wurde. Die untere liess ich an der Peripherie mit drei dünnen kurzen Zapfen versehen, mit denen ich sie anfänglich direct auf die oben erwähnten Scheibchen legte. Beim Herabsenken auf die Eisplatte lag die Kupferplatte eher auf, als die Scheibchen berührten, und diese konnten dann, wie oben beschrieben, seitlich unter den Zapfen hinweggedreht werden. Später hängte ich die Zapfen in Seidenfadenringe, die über die Scheibchen gelegt waren und nach der Berührung der Platte mit der Eisfläche herabfielen. Doch war auch dann noch die Möglichkeit einer seitlichen Bewegung der Drahtstäbe von Werth, schon um bei dem schnellen Fortnehmen des Dreifusses nach Herablassen des Plattensystems Verwickelungen mit den Drähten des Thermoelements (*i*) zu vermeiden. Zur Beobachtung der Temperaturen war nämlich nach Hrn. Weber's Vorbild nahe der centralen Durchbohrung ein Thermoelement in die obere Platte eingelöthet. Ich benutzte dünne Drähte von Eisen und Neusilber und liess die andere Löthstelle in ein mit Petro-

leum gefülltes Röhrchen tauchen, das in schmelzendem Eis stand (*k*).

Der Radius der Kupferplatten beträgt 8,0368 cm, die obere Platte hat ein Gewicht von 1737,4 g und eine Dicke von 0,9895 cm, ihre Gesammtoberfläche beträgt also 455,82 ccm. Die Dicke der unteren Platte ist 0,5598 cm. Die beide Platten trennenden Glasklötzchen haben eine Dicke von 0,219 cm. Die specifische Wärme des Kupfers habe ich zu 0,0932 angenommen und das specifische Gewicht der von mir verwandten Sorte zu 8,71 bestimmt.

Der unterzulegende Eisklotz wurde auf einer zweiten Steinplatte vorbereitet. Dort befanden sich für eine runde Eisenscheibe (*l*) mit Fortsätzen für drei verstellbare Füsse drei Unterlegplatten, die ebenso horizontirt waren, wie drei entsprechende, die ich auf dem ersten Stein zwischen den für den Dreifuss bestimmten angebracht hatte. Eine Horizontalstellung der Eisenscheibe auf dem zweiten Stein stellte diese dann auch für den ersten sicher. Diese Eisenscheibe sollte auf ihrer Oberfläche die Eisplatte tragen und erhielt noch drei Zacken, um das Herabgleiten des Eises zu verhindern. Die Abstände der Fussschrauben voneinander betrugen nur 25 cm, so dass die Scheibe (*l*) mit horizontirtem Eisklotz im letzten Moment zwischen zwei der 30 cm voneinander abstehenden Beine des Dreifusses bequem hineingeschoben werden konnte.

Mit einem Durchmesser von ca. 50 cm war um die zweimal drei Unterlegplatten auf dem Stein ein Ring (*m*) von Filz geklebt, der nur an einer Stelle eine Durchbrechung erlitt für zwei dicke Kupferdrähte, die zum Platze des Beobachters gingen, dort in einen Stromwender und dann weiter zu einem aperiodischen Wiedemann'schen Galvanometer geführt waren. An die Kupferdrähte waren gleich innerhalb des Filzringes die zwei dünnen Eisendrähte des Thermoelements angelöthet. Alle Löthstellen, die hätten Beeinflussungen der Resultate hervorrufen können, sollten nämlich innerhalb des Filzringes bleiben, weil auf diesen ein doppelwandiger Kupfermantel (Fig. 4) mit Füllung von schmelzendem Eis aufgesetzt wurde, um eine gleichmässige Temperatur von 0° herzustellen, sobald ein Versuch begann. Der Kupfermantel war nach Hrn. Kro-

nauer's[1]) Vorgang doppelwandig gewählt, hatte 44 cm inneren und 49 cm äusseren Durchmesser und es befanden sich an seiner Oberfläche drei grosse mit Korken verschliessbare Oeffnungen für die Füllung.

Der einzelne Versuch verlief nun folgendermaassen: Die Platten wurden frisch gereinigt und die untere in den Dreifuss mit dem verschiebbaren Dreieck in Hochstellung eingehängt, danach die obere Kupferplatte mit Dazwischenlegung der drei Glasklötzchen darauf gebracht. Das so aufgehängte Plattensystem stellte ich genau horizontal und füllte den Zwischenraum mit Flüssigkeit. Während

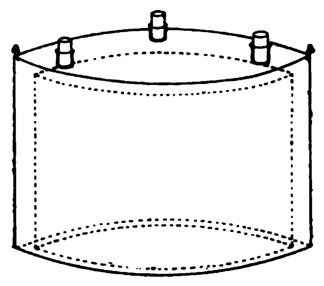


Fig. 4.

es der Einwirkung der Zimmertemperatur überlassen blieb, bereitete ich den Eisklotz vor und schob ihn dann unter die Kupferplatten. Diese wurden herabgelassen, die obere Eisenplatte wieder hochgehoben, der Dreifuss fortgenommen und der Eismantel über das Plattensystem gestülpt. Den Verlauf der Abkühlung beobachtete ich dann von 10 Sec. zu 10 Sec. mit dem Ablesefernrohr am Galvanometer. Von der Proportionalität von Temperaturdifferenz und Galvanometerausschlag innerhalb des benutzten Bereiches hatte ich mich durch besondere Vorversuche überzeugt. Zum Zweck grösserer Constanz war die Kupferplatte mit dem Thermoelement vor den Versuchen wiederholt grossen Temperaturwechseln unterworfen worden. Ausserdem wurde nach jedem Versuch, später nur nach mehreren die Grösse des Ausschlags mit einem Greiner'schen Normalthermometer verglichen.

§ 5.

Die Berechnung der Weber'schen Beobachtungen ist von Hrn. Lorberg[2]) einigen Correcturen unterworfen worden und

1) H. Kronauer, Das innere Wärmeleitungsvermögen von Blei, Wismut und Wood's Metall. Diss. 1880.

2) Lorberg, Wied. Ann. **14.** p. 291. 1881.

ich habe mich daher seiner verbesserten Formeln bedient. Lorberg leitet für das innere Wärmeleitungsvermögen $k$ folgende Gleichung ab:

$$a^2 = \frac{k}{\zeta} = \frac{\xi^2 \mu^2}{q_0^2} \frac{1 - \frac{1}{N\mu^2}\left[\left(\frac{2}{\varrho} + \frac{1}{\xi_1}\right)\frac{h_1}{\zeta_1} + \frac{1}{3}\mu^2 \xi_1 \frac{h_1}{k_1} + (N-1)\frac{2}{\varrho}\frac{h}{\zeta}\right]}{1 - \xi_1^2 \frac{\zeta_1}{k_1}\frac{\mu^2}{N}\left[\frac{1}{3} + \varkappa\left(1 + \frac{\alpha^2}{q_0^2}\right)\right]}$$

Hierin ist

$\varrho$ = Radius der Kupferplatte = 8,0368 cm

$\xi$ = Dicke der Flüssigkeitsschicht = 0,219 cm

$\xi_1$ = Dicke der oberen Kupferplatte = 0,9895 cm

$\varkappa = \frac{\text{Dicke der unteren Kupferplatte}}{\text{Dicke der oberen Kupferplatte}} = 0,5657$

$c$ = spec. Wärme der Flüssigkeit
$s$ = Dichtigkeit " " $\Big\}\ \zeta = c \cdot s$

Speciell für Wasser $c = 1$, $s = 1$ $\Big\}\ \zeta = 1$

$c_1$ = spec. Wärme des Kupfers = 0,0932
$s_1$ = Dichte des Kupfers = 8,71 $\Big\}\ \zeta_1 = c_1 \cdot s_1 = 0,8118$

$\alpha = \frac{\zeta}{\zeta_1}\frac{\xi}{\xi_1}$. Für Wasser $\alpha = 0,2726$

$q_0$ = erste Wurzel aus der Gleichung $q \operatorname{tg} q = \alpha$

Für Wasser $q_0 = 0,2497$

$N = \frac{1+\alpha}{2} + \frac{q_0^2}{2\alpha} = 1,0943$ für Wasser

$k_1$ = innere Leitfähigkeit des Kupfers = 50

$h$ = äussere Leitfähigkeit der Flüssigkeit

$h_1$ = äussere Leitfähigkeit des Kupfers. Sie wurde nach Weber's Methode[1]) wiederholt bestimmt und ergab 0,004, während Weber 0,006 findet. Die benutzte Formel ist

$$\log\left(\frac{x_0}{x}\right) \frac{h_1\, o}{M_1\, c_1} \cdot t$$

worin die $x$ = Galvanometerausschläge

$o$ = Oberfl. der oberen Kupferplatte = 455,82

$M_1$ = Masse der oberen Kupferplatte = 1737,4

$t$ = Zeit = 1, da die Berechnungen auf die Zeiteinheit reducirt wurden.

---

1) H. F. Weber, l. c. p. 128.

Bei meinen Dimensionen ergab sich aus diesen Werthen für Wasser die Formel:

$$a^2 = \frac{k}{\zeta} = \frac{0,19206\,\mu^2 - 0,00109 - 0,0045\,\frac{h}{\zeta}}{1 - 0,01579\,\mu^2}.$$

Die Differenzen der Logarithmen zweier um eine Minute voneinander getrennter Galvanometerablesungen ergeben dann die Gleichung[1])

$$^{10}\log x_n - {}^{10}\log x_{n+1} = M\mu^2$$

worin $M = 0,43429$ der Modul der dekadischen Logarithmen ist. Ich beobachtete aber alle 10 Secunden, also sind die Differenzen der Logarithmen zweier bei mir aufeinander folgenden Galvanometerausschläge $= \frac{1}{6}\,M\,\mu^2$.

Meine ersten Versuche waren Wiederholungen der Weber'schen Bestimmungen der inneren Wärmeleitung für Wasser.

Als Mittel aus mehreren Bestimmungen ergibt sich für eine Mitteltemperatur von 4,1°

$$k = 0,07\,742.$$

Da ich im Zweifel war, ob die so erhaltenen Werthe nicht vielleicht durch Strömungen vergrössert seien, so setzte ich dem Wasser etwa 1 Proc. Gelatine zu, eine gerade hinreichende Menge, um die Flüssigkeit zum Erstarren zu bringen. Gleich die erste Versuchsreihe ergab für

$$\frac{1}{6}\,M\,\mu^2 = 0,02\,990$$

und hieraus

$$k = 0,07\,876.$$

Dies ist fast genau derselbe Werth, wie ich ihn bei meinem ersten Versuche mit reinem Wasser fand.

Folgende war nämlich meine erste Beobachtungsreihe:

---

1) Lorberg, l. c. p. 437.

1892 Mai 30. Wasser 0,219 cm dicke Schicht.

| Galvanometer-ausschlag $x$ (mm) | Temperatur $t$ | $^{10}\log x_n$ | $\log \frac{x_n}{x_{n+1}}$ |
|---|---|---|---|
| 142,0 | 15,0° | 2,15 229 | 0,02 551 |
| 133,9 | 14,2° | 2,12 678 | 0,03 371 |
| 123,9 | 13,1° | 2,09 307 | 0,03 313 |
| 114,8 | 12,2° | 2,05 994 | 0,03 056 |
| 107,0 | 11,3° | 2,02 938 | 0,02 765 |
| 100,4 | 10,6° | 2,00 173 | 0,03 231 |
| 93,2 | 9,8° | 1,96 942 | 0,03 040 |
| 86,9 | 9,2° | 1,93 902 | 0,03 161 |
| 80,8 | 8,5° | 1,90 741 | 0,02 889 |
| 75,6 | 7,9° | 1,87 852 | 0,02 972 |
| 70,6 | 7,4° | 1,84 880 | 0,02 926 |
| 66,0 | 7,0° | 1,81 954 | 0,03 066 |
| 61,5 | 6,5° | 1,78 888 | 0,02 997 |
| 57,4 | 6,0° | 1,75 891 | 0,02 813 |
| 53,8 | 5,7° | 1,73 078 | 0,02 921 |
| 50,3 | 5,3° | 1,70 157 | 0,03 132 |
| 46,8 | 5,0° | 1,67 025 | 0,02 878 |
| 43,8 | 4,7° | 1,64 147 | 0,03 081 |
| 40,8 | 4,3° | 1,61 066 | 0,02 860 |
| 38,2 | 4,0° | 1,58 206 | 0,02 939 |
| 35,7 | 3,8° | 1,55 267 | |

Mitteltemperatur 4,1° $\qquad 0{,}02\,998 = \frac{1}{6} M \mu^2$

also ist:

$$\mu^2 = 0{,}17\,988$$

und hieraus

$$k = 0{,}07\,898 - 0{,}0042\,h.$$

Aus einem anderen Versuche für 1 proc. Gelatine ergibt sich

$$k = 0{,}07\,750$$

d. h. fast genau gleich dem vorhin für Wasser angegebenen Mittelwerth.

Nimmt man freilich einen starken Zusatz von Gelatine, so macht sich eine Verringerung des Leitungsvermögens geltend. So fand ich bei 5 Proc. nur noch

$$k = 0{,}06\,943.$$

Immerhin war es mir aber sehr überraschend, dass die Veränderung der Zähigkeit (die Vergrösserung der inneren Reibung) so gänzlich ohne Einfluss blieb. Um mich zu überzeugen, dass nicht etwa bloss die Dünnheit der untersuchten Schicht die Wahrnehmung erschwere und gleichzeitig um zu prüfen, ob die Grenze, bei der Strömungen innerhalb der

Flüssigkeit leicht eintreten, schon bei geringer Dicke erreicht sei, vergrösserte ich den Plattenabstand auf 0,666 cm. Um das Auslaufen des Wassers zu verhindern, umgab ich die untere Kupferplatte mit einem Ring von Guttaperchapapier, der bis etwas unterhalb der oberen Platte reichte und an der unteren Platte mit Chloroform angeklebt wurde.

Die Mitteltemperatur musste jetzt auf 8,5° erhöht werden, um nicht zu kleine Ausschläge berücksichtigen zu müssen, da der Abfall der Temperatur ein viel langsamerer geworden war. Als Beispiel führe ich diesmal einen Versuch mit $1^1/_2$ proc. Gelatinezusatz an. Beobachtet wurde wieder alle 10 Secunden.

1892 Juli 1. Gelatine 1,5 Proc. 0,666 Dicke.

| Galvanometer-ausschlag $x$ (mm) | Temperatur $t$ | $^{10}\log x_n$ | $\log \frac{x_n}{x_{n+1}}$ |
|---|---|---|---|
| 252,9 | 22,3° | 2,40 295 | 0,00 797 |
| 248,3 | 21,9° | 2,39 498 | 723 |
| 244,2 | 21,5° | 2,38 775 | 808 |
| 239,7 | 21,2° | 2,37 967 | 749 |
| 235,6 | 20,8° | 2,37 218 | 782 |
| 231,4 | 20,4° | 2,36 436 | 814 |
| 227,1 | 20,0° | 2,35 622 | 772 |
| 223,1 | 19,7° | 2,34 850 | 766 |
| 219,2 | 19,4° | 2,34 084 | 759 |
| 215,4 | 19,0° | 2,33 325 | 815 |
| 211,4 | 18,6° | 2,32 510 | 808 |
| 207,5 | 18,3° | 2,31 702 | 888 |
| 203,3 | 17,9° | 2,30 814 | 733 |
| 199,9 | 17,7° | 2,30 081 | 878 |
| 195,9 | 17,3° | 2,29 203 | 850 |
| 192,1 | 17,0° | 2,28 353 | 799 |
| 188,6 | 16,7° | 2,27 554 | 743 |
| 185,4 | 16,4° | 2,26 811 | 780 |
| 182,1 | 16,1° | 2,26 031 | 867 |
| 178,5 | 15,7° | 2,25 164 | 736 |
| 175,5 | 15,5° | 2,24 428 | 850 |
| 172,1 | 15,2° | 2,23 578 | 841 |
| 168,8 | 15,0° | 2,22 737 | 831 |
| 165,6 | 14,7° | 2,21 906 | 928 |
| 162,1 | 14,3° | 2,20 978 | 866 |
| 158,9 | 14,1° | 2,20 112 | 827 |
| 155,9 | 13,8° | 2,19 285 | 816 |
| 153,0 | 13,5° | 2,18 469 | 889 |
| 149,9 | 13,3° | 2,17 580 | 878 |
| 146,9 | 13,0° | 2,16 702 | 836 |
| 144,1 | 12,7° | 2,15 866 | 821 |
| 141,1 | 12,5° | 2,15 045 | 744 |
| 139,0 | 12,3° | 2,14 301 | |

Mitteltemperatur 8,5° $\qquad 0,00\,812 = \frac{1}{6} M \mu^2$

Hieraus ergibt sich

$$\mu^2 = 0{,}04\,874.$$

Ein analoger Versuch mit reinem Wasser lieferte

$$\mu^2 = 0{,}04\,979.$$

Rechnet man die Lorberg'sche Formel für diese Dicke von 0,666 cm aus und bestimmt danach $k$, so ergibt sich aus obigen Werthen

für Wasser: $k = 0{,}07\,568 - 0{,}0398\,h$,

für $1^1/_2$ proc. Gelatine: $k = 0{,}07\,402 - 0{,}0398\,h$.

Streng genommen darf man überhaupt die Formel in dieser Gestalt nicht mehr anwenden, denn es besitzt die Dicke der Schicht nicht mehr die von der Theorie geforderte Kleinheit gegenüber der Dicke der oberen Kupferplatte. Ausserdem spielt die seitliche Ausstrahlung eine nicht mehr zu vernachlässigende Rolle. Wie sich die von der Formel ohne Berücksichtigung dieser Gesichtspunkte gelieferten Werthe ändern, davon geben Versuche mit abermals vergrösserter Schichtdicke Zeugniss.

Bei einem Plattenabstand von 1,209 cm fand ich z. B. für Wasser:

Juli 8. $k = 0{,}06\,592 - 0{,}1238\,h$.

Der Werth von $\mu^2$ ergab sich dabei zu

$$\mu^2 = 0{,}05\,496,$$

während ein Versuch mit $1^1/_2$ proc. Gelatine bei derselben Dicke

Juli 11. $\mu^2 = 0{,}05\,496$,

also genau denselben Werth aufwies. [1])

Wenn auch natürlich diese haarscharfe Uebereinstimmung nur als Zufall bezeichnet werden darf, so zeigt sich doch deutlich darin, dass weder Strömungen im reinen Wasser gewesen sein können, noch die Vergrösserung der Reibung das Wärmeleitungsvermögen beeinflusst.

Einen Versuch möchte ich noch anführen, der den Einfluss der Zähigkeitsänderung deutlich hätte zeigen müssen.

1) Bei dieser Schichtdicke genügte es, wenn die Ablesungen am Galvanometer alle 30 Sec. vorgenommen wurden.

Bei einer Schichtdicke von 0,666 cm verfolgte ich die Abkühlung einer so dünnen Gelatinelösung, dass sie bei Beginn des Versuches noch flüssig war und erst während der Abkühlung erstarrte. Eine Aenderung des Leitvermögens hätte sich durch Aenderung der Differenzen der Logarithmen der Galvanometerausschläge sofort gezeigt. Ihre Constanz im Verlauf des ganzen Versuches bewies wieder die *Unabhängigkeit von der inneren Reibung.*

Gleichzeitig ergibt sich aus diesen Versuchen, dass die Weber'sche Methode von Strömungseinflüssen frei ist.

§ 6.

Ferner suchte ich über die Frage, ob Wärmeleitung eine *Strahlung* von Molecül zu Molecül sei, Aufschluss zu erhalten, indem ich Wasser durch Zusatz geringer Mengen von intensiven Farbstoffen (z. B. Nigrosin) färbte. Eine Aenderung der Leitfähigkeit würde ein Beweis für die Strahlung sein, indem ein farbiges Molecül anders leitete, als ein ungefärbtes. — Die Dicke der untersuchten Schicht betrug 1,209 cm, die Galvanometerablesungen geschahen jede halbe Minute. Es ist mir indessen nicht gelungen, einen Unterschied zu finden. Zwei aufeinander folgende Versuche ergaben z. B.

Juli 18. Wasser mit Zusatz von Nigrosin

$$\mu^2 = 0{,}05\,669.$$

Juli 19. Reines Wasser

$$\mu^2 = 0{,}05\,549.$$

Eine die Versuchsfehler übersteigende Differenz hätte hier eine Entscheidung zu bringen vermocht, diese Uebereinstimmung der beiden Werthe aber löst die Frage nicht. Auch war dies negative Resultat von vornherein wahrscheinlich. Fasst man nämlich die Leitung als einen gesonderten Begriff auf, so würde kaum durch einen minimalen Zusatz einer fremden Substanz eine Aenderung hervorgerufen werden können. Andererseits, wenn Leitung Strahlung von Molecül zu Molecül ist, so war ebenfalls nur eine geringe Beeinflussung zu erwarten, da Wasser ja schon an und für sich die Wärmestrahlung in so hohem Grade absorbirt, man möchte sagen, für Wärmestrahlen dunkel ist. Es könnte dann also viel eher das Wasser als Färbstoff für Wärmestrahlung benutzt werden.

Weiterhin schien sich bei einer ersten Zusammenstellung von Flüssigkeiten, deren inneres Wärmeleitungsvermögen und deren Dielectricitätsconstante bekannt sind, eine umgekehrte Proportionalität zwischen beiden zu ergeben; bei eingehenden Vergleichen konnte indessen diese Beziehung nicht aufrecht erhalten werden.

§ 7.

Zum Schluss habe ich noch bei zehn Oelen und Balsamen die Constante $k$ der inneren Wärmeleitung bestimmt, um nochmals die Unabhängigkeit von der Zähigkeit zu prüfen.

Die Constanten des Apparates waren dieselben, wie bisher, nur betrug jetzt die Dicke der Schicht 0,220 cm statt 0,219 cm. Auch erfolgte die Berechnung wieder nach der p. 20 angegebenen Formel, bei deren Anwendung die Kenntniss des specifischen Gewichtes $s$ und der specifischen Wärme $c$ erforderlich war. Die specifischen Wärmen bestimmte ich nach der Kopp'schen Erkaltungsmethode und benutzte die Mittelwerthe aus je drei Messungen.

So erhielt ich $\zeta = c \cdot s$ und leitete daraus jedesmal $\alpha$, $q_0^2$ und $N$ ab. Der Werth des Correctionsgliedes für die äussere Wärmeleitung der Flüssigkeit kann bei der dünnen Schicht wieder ausser Rechnung gelassen werden; er beträgt z. B. für Olivenöl:

$$0{,}0041\, h.$$

In der folgenden Tabelle habe ich meine Resultate zusammengestellt. Darin bedeutet $s$ das specifische Gewicht, $c$ die specifische Wärme, $M\mu^2$ den sechsfachen Mittelwerth der Differenzen der Logarithmen der von mir beobachteten Ausschläge des Galvanometers (vgl. p. 173) und $k$ ist die mit Hülfe dieser Werthe abgeleitete Constante der inneren Wärmeleitung.

| Substanz | $s$ | $c$ | $M\mu^2$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| Balsamum Copaivae . . . . . . . . . | 0,985 | 0,345 | 0,03 951 | 0,0155 |
| Balsamum Canadense. . . . . . . . . | 0,989 | 0,349 | 0,03 958 | 0,0155 |
| Oleum Nucistae (express.) . . . . . . | 0,943 | 0,408 | 0,05 258 | 0,0211 |
| Oleum Arachis . . . . . . . . . . . | 0,915 | 0,385 | 0,05 659 | 0,0227 |
| Oleum Amygdalarum dulcium Germanicum | 0,915 | 0,397 | 0,05 882 | 0,0237 |
| Oleum Olivarum Provinciale (Vièrge) . . | 0,912 | 0,396 | 0,05 891 | 0,0237 |
| Oleum Sesami . . . . . . . . . . . | 0,922 | 0,387 | 0,05 894 | 0,0237 |
| Oleum Papaveris . . . . . . . . . . | 0,919 | 0,337 | 0,05 919 | 0,0237 |
| Oleum Amygdalarum dulcium verum Angelicum . . . . . . . . . . . . | 0,918 | 0,353 | 0,06 055 | 0,0243 |
| Oleum Ricini. . . . . . . . . . . . | 0,961 | 0,434 | 0,06 268 | 0,0255 |

Nun war aber im Temperaturbereich meiner Untersuchungen Oleum Nucistae fest, Balsamum Canadense sehr zähflüssig, Balsamum Copaivae leichter fliessend; weiter wäre Ricinusöl anzuschliessen, das aber noch wesentlich schwerflüssiger war, als die anderen Oele. Dass sich die Reihenfolge bei Ordnung nach dem Wärme-Leitvermögen ganz anders ergibt, scheint mir die Unabhängigkeit von der inneren Reibung zu beweisen.

Untersucht war bisher nur das Olivenöl, für welches Hr. Weber $k = 0{,}0235$ ermittelt hat, und mein Resultat $k = 0{,}0237$ stimmt mit diesem Werth sehr gut überein.

Vorliegende Arbeit habe ich auf Anrathen des Hrn. Geheimrath Wiedemann unternommen, dem ich auch für die vielfache gütige Unterstützung während ihres Verlaufes zu aufrichtigstem Danke mich verpflichtet fühle.

Leipzig, Physikalisches Institut, 1892 October 15.

---

## XIV. *Ueber den absoluten Werth der Wärmeleitung der Luft; von A. Winkelmann.*

Die im Folgenden mitgetheilten Versuche sind durch die Discussion veranlasst, welche zwischen Hrn. L. Graetz[1]) und mir[2]) vor Kurzem stattgefunden hat. Graetz glaubte in der Berechnung der von mir abgeleiteten Werthe für die absolute Grösse der Wärmeleitung einen Fehler entdeckt zu haben, der, durch die cylindrische Form der Apparate bedingt, die Wärmeleitung um ungefähr 9,1 Proc. des wahren Werthes zu gross erscheinen lasse. Da eine ganz strenge Berechnung für cylinderförmige Apparate bisher noch nicht durchgeführt ist, so begnügte sich Graetz bei seiner neuen Berechnung mit einer Annäherung; diese liefert aber, wie ich gezeigt habe[3]), einen Grenzwerth, der von dem wahren Werthe nicht erreicht werden kann. Die Differenz von 9,1 Proc., die dieser Grenzwerth gegenüber dem von mir ermittelten Resultate darstellt, kann deshalb gegen das letztere nicht verwerthet werden, und ist für die Frage, ob meine Berechnung richtig ist, ganz ohne Belang.

Um der von mir ausgeführten Berechnung eine weitere Stütze zu geben, habe ich damals in vierfach verschiedener Weise annähernde Berechnungen für den cylinderförmigen Apparat durchgeführt und gezeigt, dass alle diese Berechnungen nahe übereinstimmende Resultate liefern (die Maximaldifferenz betrug nur 0,58 Proc.). Es ist deshalb nicht wahrscheinlich, dass die Berechnung einen Fehler von 1 Proc. enthält.

Trotz dieses Ergebnisses schien es mir wünschenswerth, das früher gewonnene Resultat auf einem anderen Wege sicherzustellen und zwar dadurch, dass man statt cylinderförmiger Metallapparate solche von Kugelform in Anwendung brachte. Bei dieser Form lässt sich, wie schon Graetz hervorhob, die

1) Graetz, Wied. Ann. **45**. p. 298. 1892.

2) Winkelmann, Wied. Ann. **46**. p. 323. 1892.

3) l. c. p. 329.

Rechnung ganz strenge durchführen, sodass jeder Zweifel ausgeschlossen ist.

§ 1. Der Apparat.

Die massive Kugel, die im Innern einer kugelförmigen Hülle Platz finden sollte, wurde aus Kupfer hergestellt und vergoldet. In der Richtung eines Radius wurde eine 3,5 cm tiefe Ausbohrung von 0,87 cm Durchmesser bewirkt. Um ein Urtheil über die Vollkommenheit der Kugelgestalt zu gewinnen, wurde die Kugel in den kreisförmigen Ausschnitt (3,6 Durchmesser) einer Platte gelegt und dann durch ein Mikroskop die obere Begrenzung der Kugel beobachtet. Bei einer Drehung der Kugel änderte sich die Einstellung nur wenig, sodass die Differenz der verschiedenen Durchmesser kleiner als 0,003 cm war.

Die Bestimmung des mittleren Kegelradius geschah auf hydrostatischem Wege, indem die Ausbohrung durch einen Metallzapfen geschlossen und die Kugel an einem feinen Draht in Luft und Wasser gewogen wurde. Der Radius $r$ der Kugel ergab sich so $= 2,5020$ cm. Diese Methode lässt eine grosse Genauigkeit zu; denn einem Fehler von 0,01 g in dem Gewichtsverlust entspricht ein Fehler von nur 0,0001 cm im Radius.

Die Kugelhülle von Messing bestand aus zwei Halbkugeln, die gleichfalls im Innern vergoldet waren und die zusammengeschraubt eine Hohlkugel darstellten. Die Dimension wurde durch Wasserwägung ermittelt; der Radius $R$ war 2,8485 cm.

Die massive innere Kupferkugel wurde durch ein Glasrohr, das mit der oberen äusseren Halbkugel fest verbunden war, gehalten. Die doppelte Verbindung wurde in der gleichen Weise, wie früher bei den cylinderförmigen Apparaten[1]) hergestellt; auch wurde in ähnlicher Weise wie früher durch Anwendung eines Ringes beim Einsetzen dafür Sorge getragen, dass der Abstand von Kugel und Hülle an allen Stellen der gleiche war.

Zu den Versuchen wurde dasselbe Thermometer wie früher benutzt; eine erneute Vergleichung ergab, dass der Nullpunkt um 0,03° angestiegen war. Man hat deshalb folgende Angaben bezogen auf das Gasthermometer nach den damaligen Beobachtungen.[2])

1) Winkelmann, Wied. Ann. **44.** p. 431. 1891.

2) l. c. p. 443.

| Angabe des Thermometers. | | Wahre Temperatur. | |
|---|---|---|---|
| 15,0 | 12,0 | 14,89 | 11,97 |
| 14,5 | 11,5 | 14,41 | 11,48 |
| 14,0 | 11,0 | 13,93 | 10,99 |
| 13,5 | 10,5 | 13,445 | 10,495 |
| 13,0 | 10,0 | 12,96 | 10,00 |
| 12.5 | | 12,465 | |

Das Thermometer wurde durch das Glasrohr in die Ausbohrung der inneren Kugel gesteckt; die Ausbohrung enthielt 15,517 g Quecksilber.

## § 2. Methode der Berechnung.

Die Versuche erstrecken sich auf die Beobachtungen mit Luft, Wasserstoff und Kohlensäure. Bezeichnet man
die Abkühlungsgeschwindigkeit für Luft mit $v$,
„ „ „ Wasserstoff mit $V$,
„ „ „ Kohlensäure „ $v'$, ferner
die Wärmeleitungsfähigkeit der Luft mit $l$,
„ „ des Wasserstoffes mit $w$,
„ „ der Kohlensäure „ $k$,
endlich der Wasserwerth der inneren Kugel mit $W$, so hat man[1])

$$(1)\qquad \begin{cases} W.v = l.f + C \\ W.V = w.f + C \\ W.v' = k.f + C, \end{cases}$$

wo $C$ eine Constante bezeichnet, deren Grösse durch die Strahlung und durch die Wärmeleitung des die beiden Kugeln verbindenden Glases bedingt ist. Ferner ist

$$f = 4\pi.\frac{R.r}{R-r},$$

wenn $R$ resp. $r$ den Radius der äusseren resp. inneren Kugel darstellt.

Aus den Gleichungen[1]) ergeben sich folgende Werthe für die Wärmeleitung der Luft:

$$(2a)\qquad l = \frac{V-v}{n-1}.\frac{W}{f}$$

$$(2b)\qquad l = \frac{v-v'}{1-m}.\frac{W}{f}$$

wo $n$ das Verhältniss der Wärmeleitung des Wasserstoffes zu der der Luft

1) l. c. 435.

$$n = \frac{w}{l}$$

bezeichnet, und $m$ die entsprechende Grösse für Kohlensäure und Luft

$$m = \frac{k}{l}$$

darstellt.

In den Gleichungen (2) sind die einzelnen Grössen für den vorliegenden Kugelapparat durch erneute Beobachtung zu bestimmen mit Ausnahme der Werthe $n$ und $m$. Diese lassen sich durch die Combination zweier Apparate ableiten, wie es in der früheren Arbeit geschehen ist. Aus der Form der damals benutzten Gleichung (10)

$$n = \frac{w}{l} = \frac{V_2 - V_1}{v_2 - v_1}$$

sieht man, dass das Verhältniss $n$ von den Dimensionen der Apparate ganz unabhängig ist und dass nur die Abkühlungsgeschwindigkeiten, die unter gleichen Bedingungen erhalten wurden, in die Rechnung eingehen. Auch ein Fehler in den Thermometerangaben hat auf diese Grösse gar keinen Einfluss, vorausgesetzt, dass immer das gleiche Thermometer, wie es bei den Versuchen der Fall war, benutzt wird. Man kann deshalb für den vorliegenden Zweck die damals ermittelten Werthe von $n$ und $m$ ohne Bedenken benutzen und hat dann nur mit *einem* Apparat jetzt die Versuche auszuführen.

### § 3. Beobachtungen.

Im Folgenden sind die Beobachtungen mitgetheilt, die bei der Abkühlung in schmelzendem Eise erhalten wurden. Es sind für die einzelnen Temperaturen die Zeiten angeben, die von dem Moment an gerechnet werden, in welchem das sich abkühlende Thermometer die Ausgangstemperatur (14,89) passirt. Neben der Zeit ist die Abkühlungsgeschwindigkeit

$$v \,.\, \log e = \frac{\log \tau_0 - \log \tau_n}{t_n}$$

mitgetheilt. Ferner ist die Summe der Zeiten und der Mittelwerth von $v \,.\, \log e$, der nach der Formel (2) meiner früheren Arbeit berechnet wurde[1]), angegeben.

1) l c. p. 187.

Luft. Druck 17 mm.

| Temp. | Zeit in Sec. | $v \log e$ |
|---|---|---|
| 14,89 | 0 | |
| 14,41 | 102 | 0,0001395 |
| 13,93 | 210 | 1378 |
| 13,445 | 320 | 1385 |
| 12,96 | 436 | 1383 |
| 12,465 | 556 | 1388 |
| 11,97 | 681 | 1392 |
| 11,48 | 812 | 1397 |
| 10,99 | 947 | 1393 |
| 10,495 | 1090 | 1393 |
| 10,00 | 1245 | 1389 |
| Summe: | 6399 | |

Die weiteren Beobachtungen lieferten für die Summe der Zeiten folgende Werthe.[1])

| Druck: | |
|---|---|
| 17 mm | 6399 |
| 17 „ | 6409 |
| 35 „ | 6394 |
| 35 „ | 6395 |
| Mittel: | 6399 |

$v \log e = 0{,}0001390.$

Wasserstoff. Druck 40 mm.

| Temp. | Zeit in Sec. | $v . \log e.$ |
|---|---|---|
| 14,89 | 0 | |
| 14,41 | 15,8 | 0,000 9006 |
| | 32,3 | 8960 |
| | 49,2 | 9010 |
| | 67,2 | 8970 |
| | 85,2 | 9061 |
| | 104,7 | 9054 |
| | 124,8 | 9090 |
| | 145,2 | 9083 |
| | 167,3 | 9081 |
| 10,00 | 191,0 | 9052 |
| Summe: | 982,8 | |

Weitere Beobachtungen:

| Druck: | |
|---|---|
| 40 mm | 982,8 |
| 40 „ | 986,5 |
| 40 „ | 985,8 |
| 42 „ | 983,6 |
| 80 „ | 985,0 |
| Mittel: | 983,9 |

$v . \log e = 0{,}0009040.$

Kohlensäure. Druck 6 mm.

| Temp. | Zeit in Sec. | $v . \log e.$ |
|---|---|---|
| 14,89 | 0 | |
| 14,41 | 161 | 0,0000 884 |
| | 330 | 877 |
| | 504 | 879 |
| | 686 | 879 |
| | 875 | 882 |
| | 1072 | 884 |
| | 1278 | 888 |
| | 1492 | 884 |
| | 1720 | 883 |
| 10,00 | 1961 | 882 |
| Summe: | 10079 | |

Weitere Beobachtungen:

| Druck: | |
|---|---|
| 6 mm | 100 79 |
| 7 „ | 100 93 |
| 13 „ | 100 60 |
| 13 „ | 100 94 |
| Mittel: | 100 81 |

$v . \log e = 0{,}0000882$

Eine Durchsicht der Werthe von $v . \log e$ lässt erkennen, dass sie bis zur Temperatur 12,96 kleiner sind, als später;

1) Das Resultat der ersten Beobachtungsreihe ist der Vollständigkeit halber hier nochmals wiederholt.

nur bei der Luft ist der erste Werth grösser. Es wurde schon in der früheren Arbeit auf den gleichen Umstand hingewiesen und die Ursache in einer kleinen Ungenauigkeit (0,01°) des Thermometers festgestellt; auf das Endresultat ist dies nur von geringem Einfluss.

Es war nach den Dimensionen des Apparates zu erwarten, dass auch bei einem höheren Drucke die Abkühlungsgeschwindigkeiten sich nur wenig vergrössern würden. Bei einem Drucke von 710 mm wurde erhalten:

| | $v \cdot \log e$ |
|---|---|
| Für Luft | 0,0001396 |
| „ Wasserstoff | 0,0009127 |
| „ Kohlensäure | 0,0000893. |

Eine Vergleichung mit den früheren Werthen bei kleinem Druck zeigt, dass die Differenz für Luft und Wasserstoff kleiner als 1 Proc. ist, und dass sie für Kohlensäure 1,2 Proc. beträgt. Die Wirkungen der Gasströmmungen sind also hier auch bei einem Druck von 710 mm nur gering.

### § 4. Berechnung der Versuche.

Im Folgenden sind die Werthe angegeben, die zur Berechnung der Wärmeleitungsfähigkeit $l$ der Luft nach den Formeln (2) nöthig sind. Es ist:

$$\left.\begin{aligned} v \cdot \log e &= 0{,}0001390 \\ V \cdot \log e &= 0{,}0009040 \\ v' \cdot \log e &= 0{,}0000882 \end{aligned}\right\} \text{ bezogen auf Temperatur } 6{,}1^{\circ}.$$

Der Wasserwerth $W$ setzt sich zusammen aus dem der Kupferkugel, des eingefüllten Quecksilbers und des Thermometergefässes.

Das Gewicht der Kupferkugel ist 541,803 g; die specifische Wärme des Kupfers[1]) bei 6,1° nach Bède 0,0913; daher der Wasserwerth 49,466.

---

1) Es ist in der früheren Arbeit die specifische Wärme des Kupfers für die Temperatur 6°,1 — das ist jene Temperatur, auf welche sich die Mittelwerthe von $v \cdot \log e$ beziehen — eingeführt. Da die Kugel sich aber bei den Versuchen von 15° bis 10° abkühlt, so muss die mittlere specifische Wärme für dieses Temperaturintervall eingeführt werden; man erhält dann 0,0916 statt des oben angegebenen 0,0913. Der Unterschied ist nur gering; um die Vergleichbarkeit mit den frühern Resultaten vollständig zu erhalten, wurde auch jetzt der frühere Werth benutzt.

Aus dem Gewicht 15,517 des Quecksilbers und der specifischen Wärme 0,0333 folgt der Wasserwerth 0,517.

Endlich ist der Wasserwerth des Thermometergefässes[1]) 0,156. Hiermit wird $W = 50,139$.

Aus den schon angegebenen Grössen

$$R = 2,8485 \text{ cm}; \quad r = 2,5020,$$

folgt

$$f = 258,48.$$

An diesem Werthe ist noch eine kleine Correction dafür anzubringen, dass die innere Kugel mit der äusseren durch ein Glasrohr verbunden ist[2]). Bezeichnet man den Querschnitt des vom Glasrohre eingenommenen cylindrischen Raumes — in dem vorliegenden Falle ist derselbe = 0,594 qcm — mit $\varepsilon$, so ist von $f$ die Grösse:

$$\frac{\varepsilon}{R - r}$$

abzuziehen, um dem gedachten Einflusse Rechnung zu tragen. Man erhält dann:

$$f' = f - \frac{\varepsilon}{R - r} = 256,77.$$

Endlich findet man aus den früher gewonnenen Mittelwerthen der Wärmeleitung bei der Temp. 6,1°:

$$\frac{w}{l} = \frac{0,0003872}{0,0000561} = 6,902 = n$$

$$\frac{k}{l} = \frac{0,0000335}{0,0000561} = 0,5971 = m.$$

Aus der Gleichung (2a) findet man für die Wärmeleitungsfähigkeit der Luft 0,00005827, und aus der Gleichung (2b) 0,00005668. Beide Werthe beziehen sich auf die Temperatur 6,1° und geben im Mittel:

$$l_{6,1} = 0,0000\,5747.$$

Reducirt man mit dem Temperaturcoefficienten 0,0018 auf 0°, so erhält man:

$$l_0 = \mathbf{0,0000568.}$$

Dieser Werth, der mit dem früher aus cylinderförmigen Apparaten abgeleiteten Resultat $l_0 = 0,0000555$ unmittelbar vergleichbar

1) l. c. p. 448.
2) l. c. p. 450.

ist, zeigt diesem gegenüber eine Differenz von 2,3 Proc. Diese wird theilweise in Beobachtungsfehlern, vielleicht auch in einer kleinen Verschiedenheit der specifischen Wärme des Kupfers begründet sein, wobei hervorgehoben werden mag, dass die zwei früher erhaltenen Werthe unter sich einen Unterschied von der gleichen Grösse zeigen.[1])

Da die Verhältnisszahlen *n* und *m* der früheren Arbeit entnommen sind, hat es keinen Zweck, auch die Werthe für die Wärmeleitung des Wasserstoffs und der Kohlensäure aus den vorliegenden Beobachtungen zu berechnen; man würde die gleichen Differenzen wie bei der Luft finden.

---

Das Resultat der Versuche lässt sich so zusammenfassen: Die Grössen, die aus der Beobachtung mit *cylinderförmigen* Apparaten für die Wärmeleitung der Luft ermittelt wurden, stimmen nahe (bis auf 2,3 Proc.) mit dem Werthe überein, der durch einen *kugelförmigen* Apparat gewonnen ist.

Jena, November 1892.

1) l. c. p. 450.

## XV. *Ueber eine zur Untersuchung sehr zäher Flüssigkeiten geeignete Modification der Transpirationsmethode; von C. Brodmann.*

---

Die Transpirationsmethode, die als sicherste und genaueste der bekannten Methoden zur Zähigkeitsbestimmung von Flüssigkeiten gelten muss, wird in ihrer gebräuchlichen Form unbequem, ja aus praktischen Gründen fast völlig unanwendbar, sobald es sich um sehr zähe Substanzen, wie z. B. concentrirtes Glycerin, handelt, und sobald man Gewicht darauf legt, mit nicht zu weiten Röhren und unter gewöhnlichem Druck zu beobachten.

Andererseits ist aber gerade eine Untersuchung solcher sehr zäher Flüssigkeiten von einigem Interesse, insbesondere wegen der starken Abhängigkeit von der Temperatur, die bei ihnen der Reibungscoefficient zeigt.

Ich habe deswegen versucht, die Methode in etwas zu modificiren und gelangte zu einer Anordnung, nach der man Reibungscoefficienten, welche den des Wassers um das tausendfache übersteigen, mit befriedigender Genauigkeit in verhältnissmässig kurzer Zeit bestimmen kann.

Durch ein vertical gestelltes Capillarrohr floss die Substanz unter der Wirkung der Schwere aus. Das Rohr mündete am oberen Ende in ein weites Reservoir, welches bis zu einer bestimmten Höhe mit der Flüssigkeit gefüllt war. Das untere Ende des Rohres tauchte in ein zweites kleineres Reservoir einige Millimeter tief ein.

Dieses letztere, welches wir als Auffanggefäss bezeichnen wollen, stand auf der einen Schaale einer chemischen Waage, deren zweite Schaale so belastet war, dass sie das Uebergewicht besass. Fliesst nun die Substanz durch das Rohr allmählich in das Auffanggefäss hinein, so kommt ein Zeitpunkt, in dem die Waage umschlägt und der Balken durch seine Ruhelage, oder überhaupt durch eine bestimmte, irgendwie markirte Stellung hindurchgeht. Dieser Zeitpunkt wird beobachtet.

Alsdann wird auf die zweite Schaale ein passendes Zusatzgewicht gelegt. Die Waage neigt sich von neuem nach der Seite der zweiten Schaale und der ganze Vorgang wiederholt sich. Man beobachtet wieder den Zeitpunkt, in welchem die markirte Stellung des Balkens erreicht wird. Die Differenz zwischen den beiden Zeiten entspricht, von einigen Correctionen zunächst abgesehen, der Ausflussdauer einer Flüssigkeitsmenge, die dem zugesetzten Gewicht an Masse gleichkommt. Da man bei einigermaassen empfindlicher Waage das Zusatzgewicht sehr klein nehmen kann, so wird auch für sehr zähe Flüssigkeiten und verhältnissmässig enges Rohr eine angemessene Beobachtungsdauer sich erreichen lassen.

Im Einzelnen war der Apparat folgendermaassen angeordnet: Das obere Reservoir bestand aus einer Flasche, deren Boden abgesprengt war. Durch ihren Hals war das eine Rohrende mittels Gummistopfens wasserdicht eingeführt. Dabei befand sich der Endpunkt des Rohres etwa in der Mitte der Flasche. Man erhielt so eine dem Cornu'schen Staubsack analoge Vorrichtung, welche das Capillarrohr vor dem Eindringen fester Theilchen wirksam schützte.

Rohr und Reservoir wurden in einen Blechcylinder von 90 cm Höhe und 15 cm Durchmesser eingesetzt, durch dessen Boden das untere Rohrende central wasserdicht hindurchgeführt werden konnte. Es ragte etwa um 1 cm aus dem Boden hervor. Bei einer Gesammtlänge der Capillaren von 71,1 cm befand sich das obere Resorvoir, welches etwa 10 cm Durchmesser hatte, gänzlich innerhalb des Blechcylinders und wurde in demselben durch einen entsprechenden Halter gestützt.

Zwei einander diametral gegenüberliegende Glasfenster im oberen Ende des Cylinders gestatteten eine Beobachtung des Flüssigkeitsstandes im Reservoir.

Der dieser Art vorgerichtete Apparat kam neben einer gewöhnlichen, langarmigen chemischen Waage so zur Aufstellung, dass das untere Rohrende etwa in der Höhe der einen Schaale sich befand. Sein horizontaler Abstand von der Schaalenmitte betrug 17 cm.

Das Auffanggefäss war ein leichtes Glasgefäss von 4,8 cm Durchmesser und 2,5 cm Höhe.

Es stand auf einem Streifen Hartgummi, welcher auf der

Waagschaale auflag; und welcher durch ein auf ihm verschiebbares 100 g-Stück äquilibrirt wurde. Entsprechend der im Gefäss enthaltenen Flüssigkeitsmenge wurde die Höhe desselben durch dieses Gegengewicht so regulirt, dass das Rohr einige Millimeter in die Flüssigkeit hineinragte wenn man die Arretirung der Waage löste.

Die Arretirung war derart modificirt, dass der Balken nur einen kleinen Spielraum beiderseits hatte; infolgedessen unterschied sich die Tiefe, bis zu welcher das Rohrende eintauchte, bei den extremsten Balkenstellungen nur um etwa 2 mm.

Die Ruhelage der Waage, resp. die jeweilige Stellung des Balkens wurde mit Spiegel und Scala abgelesen.

Um möglichst hohe Empfindlichkeit zu erzielen, war hierzu folgende Einrichtung getroffen:

Der Spiegel drehte sich um zwei, in seiner Ebene diametral angekittete Stahlnadeln als Axe, welche in zwei, von einer Gabel getragenen Glasröhrchen ruhten. Die Hinterseite des Spiegels trug einen ca. 4 cm langen Messingdraht central und senkrecht zur Spiegelebene, dessen Ende durch einen feinen Coconfaden von 3 cm Länge mit dem Doppelhaken desjenigen Schaalengehänges verbunden war, auf welchem die Gewichte ruhten. Die ganze Anordnung war so abgemessen, dass bei horizontaler Stellung des Balkens der Coconfaden und die Spiegelebene vertical standen. Schlug dann der Balken nach der Seite des Auffangegefässes zu um, so hob sich das dem Spiegel abgewandte Ende des Messingdrahtes und der Spiegel drehte sich.

Diese Anordnung, die nach einigen anderen Versuchen als die geeignetste beibehalten wurde, gab der Bewegung der Scala im Gesichtsfelde einen vollkommen ruhigen, von allen Unregelmässigkeiten freien Charakter.

Um die Temperatur zu variiren, resp. um eine bestimmte Temperatur eine Zeit lang festzuhalten, wurde folgendermaassen verfahren:

Von der Wasserleitung ging ein verzweigtes Röhrensystem aus. Der eine Zweig ging glatt weiter, der andere führte zu einer kupfernen Heizschlange von ca. 4 m Gesammt und 25 cm Axenlänge. Diese befand sich in einem entsprechenden, mit Wasser gefüllten Topfe, der durch Gasflammen angeheizt werden

konnte. Hinter der Schlange vereinigten sich beide Zweige wieder. Die Leitung führte dann weiter bis auf den Boden des Blechgefässes und es strömte während des Versuches beständig Wasser durch das System in das Gefäss ein, um durch eine Oeffnung im oberen Rande des letzteren wieder abzufliessen.

Indem man den Zufluss durch beide Zweige mit Hülfe von Quetschhähnen regulirte und den Topf mit der Kupferschlange verschieden stark anheizte, konnte man bequem beliebige Temperaturen bis zu derjenigen des Leitungswassers hinab (ca. 13°) erreichen.

So war während der Beobachtung Rohr und oberes Reservoir beständig von gleichmässig erwärmtem fliessendem Wasser umgeben.

Die Beobachtungstemperatur wurde an drei Thermometern abgelesen, von denen zwei in verschiedener Höhe durch die Wand des Blechgefässes in dieses eingeführt waren, während das dritte sich im oberen Reservoir befand. Die beiden ersten zeigten 0,2°, das letztere 0,1° an. Sie waren unter sich und mit einem Normalthermometer verglichen.

Mit einer Beobachtung wurde erst begonnen, wenn alle drei Thermometer sehr nahe die gleiche Temperatur zeigten. Als Beobachtungstemperatur wurde das Mittel aus den drei Ablesungen eingeführt.

Um jede einseitige Erwärmung des Waagebalkens zu vermeiden, war der Heizapparat möglichst entfernt von der Waage aufgestellt und es war der Blechcylinder längs seiner ganzen Mantelfläche dick mit Filz umwickelt.

Die Formel, welche den Zusammenhang zwischen ausgeflossener Masse und Zeit ausdrückt, lässt sich für den Fall unveränderter Niveauhöhe im oberen und unteren Reservoir aus den hydrodynamischen Differentialgleichungen für zähe Flüssigkeiten in bekannter Weise herleiten. Nennt man $h_1$ und $h_2$ die obere und untere Druckhöhe, bezogen auf die Mündungen der Röhre, $\sigma$ die Dichte der Flüssigkeit, so hat man am oberen Rohrende den Druck $p_0 + h_1 \sigma g$ am unteren $p_0 + h_2 \sigma g$, wo $p_0$ den Atmosphärendruck bedeutet.

Daraus ergibt sich, wenn man mit $k$ den Reibungscoefficienten, mit $r_0$ den Radius der Capillaren, mit $g$ die Beschleunigung der Schwere und mit $L$ die Länge der Capil-

laren bezeichnet, für das während der Zeit $t$ ausfliessende Volumen der Werth:

$$\gamma = \frac{\pi\,\sigma\,g}{8\,k}\left[1 + \frac{h_1 - h_2}{L}\right] r_0^4\, t,$$

und für die in derselben Zeit ausfliessende Masse in derselben:

$$m = \frac{\pi\,\sigma^2 g}{8\,k}\left[1 + \frac{h_1 - h_2}{L}\right] r_0^4\, t.$$

Aus dieser Formel folgt, dass bei einigermassen beträchtlicher Rohrlänge $L$, $h_1$ und $h_2$ nur in mässiger Genauigkeit bekannt zu sein brauchen. Es war in meinem Versuche $L = 71{,}1$ cm. Ein Fehler von 7 mm in der Bestimmung von $h_1 - h_2$ würde noch nicht 1 Proc. Fehler in $k$ ergeben.

Deswegen kann man die während eines Versuches eintretende Aenderung des oberen und unteren Niveaus, von denen die letztere in der Hauptsache von der bei jedem Versuche sich wiederholenden Senkung des Auffangegefässes während des Umschlagens der Waage herrührt, völlig vernachlässigen; denn die Aenderung von $h_2$, welche bei weitem die beträchtlichste war, betrug noch nicht 2 mm.

Der Werth von $h_1$ wurde an dem in das obere Reservoir eintauchenden Thermometer bestimmt; für $h_2$ wurde ein Mittelwerth zwischen den bei einem Versuche erreichten Extremen eingeführt.

Mit der Niveauhöhe $h_2$ und ihrer Aenderung mit der Zeit steht eine Fehlerquelle in Zusammenhang, die nicht vernachlässigt werden darf.

Zu dem Gewicht des Auffanggefässes addirt sich der Auftrieb, den das in die Flüssigkeit eintauchende Rohrende erfährt.

Soll die zwischen correspondirenden Stellungen des Balkens verstrichene Zeit dem Zusatzgewichte genau entsprechen, so ist dafür Bedingung, dass bei der gleichen Balkenstellung auch der Auftrieb dss eintauchenden Rohrendes der gleiche ist, d. h. dass in beiden Fällen das Rohrende gleich tief eintaucht. Dies ist in Wahrheit nicht der Fall.

Einmal vermehrt sich die Menge der Flüssigkeit im Auffanggefäss, und dadurch wächst die eintauchende Strecke. Andererseits aber verschiebt sich durch diese Vermehrung der Flüssigkeitsmenge der Schwerpunkt des ganzen, aus Schaale. Gummistreifen, Auffanggefäss und Gegengewicht bestehenden

Systemes nach dem Auffanggefässe zu, und da das System bei der von mir gewählten Aufstellung in einer zum Balken senkrechten Ebene um den Punkt drehbar war, in welchem der Haken des Schaalengehänges in den vom Balken getragenen Bügel einfasste, so sank hierdurch das Auffanggefäss, die eingetauchte Strecke verminderte sich.

Nennt man $q$ das Zusatzgewicht, $m$ die zwischen zwei correspondirenden Balkenstellungen ausgeflossene Masse, $\delta_1 h_2$ und $\delta_2 h_2$ die durch die eben erwähnten Ursachen bedingten Aenderungen von $h_2$, ferner $R$ den äusseren Radius der Capillaren, $P$ den Radius des Auffanggefässes, $\mu$ die Senkung durch Schwerpunktverschiebung bei 1 g Gewichtszunahme, so hat man:

$$\delta_1 h_2 = \frac{m}{P^2\left(1 - \frac{R^2}{P^2}\right)\sigma\pi}$$

$$\delta_2 h_2 = \mu . m$$

$$q = m + (\delta_1 h_2 - \delta_2 h_2)\sigma R^2 \pi$$

$$= m\left\{1 + \frac{R^2}{P^2\left(1 - \frac{R^2}{P^2}\right)} - \mu\sigma R^2\pi\right\}$$

Bezeichnet man die Klammer in vorstehender Gleichung abkürzend durch $\lambda$, und nennt $k_0$ den ohne unsere Correction berechneten Werth des Coefficienten, so hat man:

$$k = \lambda k_0.$$

$\mu$ wurde durch directe Beobachtung bestimmt. Ein Mikroskop mit Ocularmikrometer war auf eine Marke am Auffanggefäss gerichtet. Bei zwei entsprechenden Balkenstellungen, zwischen denen eine bekannte Flüssigkeitsmenge ausgeflossen war, wurde die Stellung der Marke abgelesen. So fand sich als Mittel aus einer grösseren Anzahl gut miteinander übereinstimmender Beobachtungen für $\mu$ der Werth $\mu = 0{,}1313$ cm.

Es war ferner:

$$R = 0{,}29 \text{ cm}$$
$$P = 4{,}8 \text{ cm.}$$

Aus diesen Daten wurde für jeden Satz $\lambda$ berechnet, wobei $\sigma$ entsprechend der jeweiligen Zimmertemperatur angenommen wurde. Die so gefundene Correction ist nicht unbedeutend. Sie übersteigt in meinen später anzuführenden Beobachtungen

den Betrag von 2 Proc. Sie würde sich bedeutend verringern lassen, wenn man durch eine eigene Construction der Waage die excentrische Stellung des Auffanggefässes beseitigte.

Eine weitere Fehlerquelle liegt darin, dass nothwendigerweise ein kurzes Ende der Capillaren aus dem Blechcylinder herausragt, und deswegen eine Temperatur besitzen wird, die von der des Bades abweicht. Berücksichtigt man, dass die Flüssigkeit beständig mit der Badtemperatur in das freie Ende eintritt, sowie, dass die freie Strecke nur kurz ist[1]), so erscheint es wahrscheinlich, dass die mittlere Temperatur derselben der Badtemperatur näher liegt, als der Zimmertemperatur.

Es soll im Folgenden gezeigt werden, dass, auch wenn man die Temperatur des freien Stückes im Extrem gleich dem Mittel aus Zimmer- und Badtemperatur setzt, ein in Betracht kommender Fehler bei den hier vorliegenden Beobachtungen durch Vernachlässigung dieser Correction nicht entsteht.

Hierzu gehen wir auf die Differentialgleichungen für reibende Flüssigkeiten zurück.

Die $z$-Axe liege in der Rohraxe, positiv von oben nach unten. $r$ sei der Radiusvector in der $xy$-Ebene, $u\,v\,w$ die Geschwindigkeitscomponenten nach den drei Axen. $\sigma$, $k$ und $g$ haben die oben angegebene Bedeutung.

Man kann integriren unter der Annahme, $p$, der Druck, hinge nur von $z$, $w$ nur von $r$ ab, $u$ sei ebenso wie $v$ gleich Null.

Dann bleibt für $p$ und $z$ die Gleichung:

$$-\frac{1}{\sigma}\frac{dp}{dz}+g=-\frac{k}{\sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\frac{d^2w}{dr^2}\right).$$

Wir vernachlässigen die kleinen Aenderungen von $\sigma$ mit der Temperatur. Dann wird, bei beliebig vorgegebener, wechselnder Temperatur im Rohr, $k$ als willkürliche Function von $z$ zu betrachten sein, $k=f(z)$, und obige Differentialgleichung muss unter dieser Annahme integrirt werden.

Setzt man:

$$\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\frac{d^2w}{dr^2}=W,$$

1) Es sei hier angeführt, dass bei der zähesten der später verwandten Flüssigkeiten und bei der niedrigsten Beobachtungstemperatur ein Theilchen etwa $1^1/_2$ Minuten gebrauchte, um die 1 cm lange freie Strecke zurückzulegen.

so wird:

$$-\frac{1}{\sigma}\frac{dp}{dz}+g=-\frac{f(z)}{\sigma}\cdot W$$

$$-\frac{1}{\sigma}\frac{d^2p}{dz^2}=-\frac{1}{\sigma}\frac{df}{dz}\cdot W$$

$$\frac{-\frac{1}{\sigma}\frac{d^2p}{dz^2}}{-\frac{1}{\sigma}\frac{dp}{dz}+g}=\frac{df}{dz}\cdot\frac{1}{f}.$$

Durch beiderseitige Integration folgt:

$$c\left(\frac{dp}{dz}\cdot\frac{1}{\sigma}-g\right)=f,$$

wo $c$ eine Integrationsconstante bedeutet.

Setzt man den hieraus sich ergebenden Werth von $dp/dz$ in die ursprüngliche Differentialgleichung ein, so erhält man nach kurzer Rechnung:

$$\frac{\sigma}{c}=\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\frac{d^2w}{dr^2}.$$

Um $c$ bestimmen zu können, muss $f$ explicit als Function von $z$ gegeben sein. Es sei zwischen $z=0$ und $z=l$, $f$ constant $=f_1$, ebenso zwischen $z=l_1$ und $z=L$, $f=f_2$. Dann kann man $f$ in die nachstehende Fourier'sche Reihe entwickeln:

$$f=\frac{l_1}{L}(f_1-f_2)+f_2+\frac{f_1-f_2}{\pi}\sum_1^\infty\frac{1}{\nu}\sin\frac{\nu\pi l_1}{L}\cos\frac{\nu\pi z}{L}.$$

Ferner hat man:

$$\frac{dp}{dz}=\left(\frac{f}{c}+g\right)\sigma.$$

Setzt man den Werth von $f$ hierin ein und integrirt, so erhält man:

$$p=\frac{\sigma}{c}\left\{\frac{l_1}{L}(f_1-f_2)z+f_2z+\frac{f_1-f_2}{\pi^2}L\sum_1^\infty\frac{1}{\nu^2}\sin\frac{\nu\pi l_1}{L}\sin\frac{\nu\pi z}{L}+\Gamma\right\}+\sigma g.z,$$

wo $\Gamma$ eine neue Integrationsconstante bedeutet.

Für $z=0$ und $z=L$ sind die Werthe von $p$ bekannt und zwar resp. gleich $p_0+h_1\sigma g$ und $p_0+h_2\sigma g$. Macht man davon Gebrauch, so findet man:

$$\frac{1}{c}=g\cdot\frac{1+\frac{h_1-h_2}{L}}{f_2+(f_1-f_2)\cdot\frac{l_1}{L}}=\frac{1}{\sigma}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\frac{d^2w}{dr^2}\right).$$

Hieraus findet man in bekannter Weise für die in der Zeit $t$ ausströmende Masse den Werth:

$$m = \sigma^2 g \frac{\left[1 + \frac{h_1 - h_2}{L}\right]}{f_2 (L - l_1) - f_1 l_1} \cdot L \cdot \frac{\pi r_0^4 t}{8}.$$

$L - l_1$ ist die Länge des freien Endes, die wir $= \Delta l$ setzen wollen. $\Delta l$ ist klein gegen $L$.

Bezeichnet man den unter der Annahme gleichmässiger Temperatur berechneten Werth von $k$ durch $K$, so findet man nach kurzer Rechnung:

$$k = K\left[1 - \frac{\Delta l}{L}\left(\frac{f_2}{f_1} - 1\right)\right].$$

Aus dieser Formel ergibt sich zunächst ein bemerkenswerther Unterschied zwischen dem Fall, dass die Badtemperatur die höhere ist, und dem umgekehrten.

Im ersteren Falle ist $f_2 > f_1$, es kann also bei entsprechend grosser Differenz der beiden Temperaturen $f_2 / f_1 - 1$ und damit die ganze Correction sehr beträchtliche Werthe erhalten.

Im zweiten Falle dagegen ist $f_2 < f_1$, und der grösste absolute Werth, den $f_2 / f_1 - 1$ erreichen kann, ist der Werth 1. Die Correction kann also im Extrem den Werth $k . \Delta l / L$ erhalten.

Um an einem Zahlenbeispiel den wirklichen Betrag unserer Correction in einem speciellen Falle kennen zu lernen, wählen wir aus den späteren Beobachtungen an Glycerin als ungünstigsten Fall die letzte Beobachtung des ersten Satzes. Sie ergibt bei $\vartheta = 30^0$ $k = K = f_1 = 2{,}930$.

Die Zimmertemperatur war 21°. Für die Mitteltemperatur wird $k = f_2 = 4{,}226$. Daraus berechnet man für die Klammer den Werth 0,994, also $k = 0{,}994\,K$, sodass hier der Fehler 0,6 Proc. betragen würde. Bedenkt man, dass bei Glycerin, wie sich aus den späteren Beobachtungen ergibt, ein Fehler von 0,1° in der Bestimmung der Badtemperatur bereits eine Unsicherheit von angenähert 1 Proc. im Werthe von $k$ bedingt, so erscheint die Vernachlässigung der behandelten Fehlerquelle als statthaft, um so mehr, als sich eine auch nur einigermaassen sichere Temperaturbestimmung des freien Rohrendes

als kaum möglich erweist. Es sei nur noch einmal darauf aufmerksam gemacht, dass der hier berechnete Fehler von 0,6 Proc. ein Extrem darstellt, das höchst wahrscheinlich nicht angenähert erreicht wird.

Von anderen wesentlichen Fehlerquellen ist die Methode frei. Zufällige Fehler können auftreten infolge Verschiebung der Ruhelage der Waage oder infolge des Umstandes, dass bei dem bald höheren, bald tieferen Eintauchen des Rohrendes in das Auffanggefäss während eines Satzes wechselnde Mengen der Flüssigkeit am Rohre hängen bleiben, wenn die Schaale mit dem Auffanggefäss sinkt.

Dass diese zufälligen Fehler sich innerhalb enger Grenzen halten, wurde in den Vorversuchen durch Beobachtung einer grossen Reihe von Durchgangszeiten bei constanter Temperatur und stets gleichgewähltem Zusatzgewicht mit Sicherheit festgestellt.

Zum Schluss sei noch bemerkt, dass das angewendete Capillarrohr auf sein gleichmässiges Kaliber geprüft war.

Der Radius $r_0$ wurde durch Auswägen mit Quecksilber bestimmt und gleich 0,03042 cm gefunden.

Die im Vorstehenden beschriebene Methode wurde angewandt, um die Abhängigkeit des Reibungscoefficienten sehr zähen Glycerins von der Temperatur im Intervall von 13° bis 30° zu bestimmen.

Das Glycerin war aus der chemischen Fabrik von Merck hierselbst bezogen. Es war bezeichnet als Glycerin. purissimum bidest. Pharm. Britt. und war als Chlor-Metall, -Kalk und Schwefelsäure frei garantirt.

15,55 g, im Platintiegel geglüht, ergaben 0,0028 g Rückstand. Bei einer qualitativen Untersuchung im hiesigen chemischen Laboratorium, für die ich Hrn. Dr. Kolb hierselbst zu Dank verpflichtet bin, liessen sich von fremden Beimengungen nur schwache Spuren von Fettsäuren nachweisen.

Für die erste Beobachtungsreihe wurde das Glycerin im Vacuum auf dem Wasserbade erhitzt und so möglichst entwässert. Für die zweite Reihe wurde das gelieferte Glycerin direct benutzt, die dritte und vierte wurden mit verschieden verdünntem Glycerin beobachtet. Bei 15° war das specifische Gewicht in den vier Fällen resp. gleich:

1,2524; 1,2479; 1,2365; 1,2202.

Die Bestimmung des specifischen Gewichtes geschah mit dem Pyknometer. Es wurde die Beobachtung für zwei verschiedene Temperaturen ausgeführt und danach die Werthe für die Badtemperaturen linear interpolirt.

Da das concentrirte Glycerin stark Wasser absorbirt, so musste verhütet werden, dass die Glycerinoberfläche im Auffanggefäss mit der wasserdampfhaltigen Zimmerluft in Berührung kam, damit nicht durch Wasserabsorption eine Gewichtszunahme des Auffanggefässes eintrete.

Dies wurde durch eine dünne Vaselinschicht erreicht, welche man auf der Glycerinoberfläche sich ausbreiten liess.

Bei dem oberen Reservoir erwiess sich eine analoge Maassregel als überflüssig. Auch wenn dasselbe mit dem Glycerin tagelang an feuchter Luft gestanden hatte, zeigte sich niemals eine bemerkbare Abnahme der Zähigkeit. Es liegt dies wohl daran, dass die durch Wasserabsorption verdünnten Schichten leichter sind und infolgedessen an der Oberfläche bleiben. Dazu kommt, dass die grosse Zähigkeit eine Mischung der verschiedenen Schichten sehr erschwert.

Durch Controllversuche wurde am Schlusse einer jeden Beobachtungsreihe nachgewiesen, dass keine Aenderung in dieser Beziehung eingetreten war.

Es ist dann der Versuch gemacht, die Beobachtungen in einheitliche Formeln zusammenzufassen. Dabei empfahl es sich, von vornherein möglichste Annäherung an die Gestalt zu suchen, die Graetz[1]) für andere Flüssigkeiten der Temperaturgleichung gegeben hat: $k = A \, . \, (\vartheta_1 - \vartheta) / (\vartheta - \vartheta_0)$, wo $\vartheta_1$ den absoluten Siedepunkt, $\vartheta_0$ den „absoluten Erstarrungspunkt“ darstellt.

Dass diese einfachste Form bei einer Mischung zweier verschiedener Flüssigkeiten, wie sie in unserem Falle vorliegt, nicht brauchbar sein wird, erscheint ohne weiteres als wahrscheinlich und wurde durch die Beobachtungen bestätigt.

Wohl aber gelingt es, durch ein Zusatzglied ersten Grades eine geeignete Form zu bilden. Ich setze:

---

1) Graetz, Wied. Ann. **34.** p. 25. 1888.

$$k = A \cdot \frac{\vartheta_1 - \vartheta}{\vartheta - \vartheta_0} - B(\bar{\vartheta} - \vartheta).$$

Die Constanten $\vartheta_1$, $\vartheta_0$, $\bar{\vartheta}$ sind ohne Rücksicht auf die beobachteten Werthe $k$ durch allerdings ziemlich willkürliche Annahmen zunächst bestimmt worden.

Die so erhaltenen Formeln haben zwar die Erwartung, dass sie bis hinauf zu hohen Temperaturen den Gang von $k$ ohne physikalische Widersprüche würden darstellen können, nicht bestätigt, wie später des Näheren gezeigt werden wird. Sie sind vielmehr im wesentlichen nur als Interpolationsformeln für das beobachtete Temperaturintervall aufzufassen.

Trotzdem sollen die heuristischen Gesichtspunkte, welche zur Bestimmung der drei Constanten führten, hier kurz angedeutet werden, damit die Wahl gerade dieser Werthe verständlich wird.

Da der kritische Punkt des Glycerins nicht bekannt ist, so wurde die Differenz zwischen der Siedetemperatur des Glycerins und seiner kritischen Temzeratur gleich der entsprechenden Differenz beim Aethylalkohol gesetzt. Darnach ergibt sich für $\vartheta_1$ der Werth 452°.

$\vartheta_0$ wurde versuchsweise gleich 0° gesetzt, also ca. 18° tiefer, als der Schmelzpunkt des reinen krystallisirten Glycerins.

Für $\bar{\vartheta}$ endlich wurde die Temperatur 150° angesetzt, da in der Nähe dieses Punktes das an der Luft erhitzte wasserhaltige Glycerin Spuren von Zersetzung zeigt, man also vermuthen konnte, dass dieser Punkt sich in der Formel für die Reibung auszeichnen würde.

Alle diese Annahmen tragen den Charakter des Willkürlichen in hohem Grade. Der Erfolg indess bei der Einführung der angegebenen Werthe in die Formel für $k$ ist, soweit unsere Beobachtungen sich erstrecken, ein überraschend guter. Unter Festhaltung derselben für alle vier Concentrationen gelingt es durch Verfügung über die Constanten $A$ und $B$, die für jeden Satz nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet wurden, die sämmtlichen Beobachtungen in sehr befriedigender Weise darzustellen.

Das zeigt am besten die im Folgenden gegebene tabellarische Zusammenstellung, sowie Fig. 1 p. 202.

In der Tabelle bedeutet $\lambda$ den oben erläuterten Corrections-

factor. Die Werthe, welche $h_1 - h_2$ für jede einzelne Beobachtung hatte, sind nicht angegeben, dagegen die Grenzen, zwischen denen diese Grösse während des Satzes lag. Eie Ausströmungszeiten sind sämmtlich auf 0,1 g Zusatzgewicht bezogen und meistens auch mit demselben beobachtet. Jede derselben ist das Mittel aus vier einzelnen Beobachtungen, indem bei jeder Ablesung die Zeiten von vier verschiedenen Balkenstellungen bestimmt wurden.

## Tabelle der Resultate.

$L = 71{,}1$ cm. $r_0 = 0{,}03042$ cm.

I. Satz. Glycerin 94,1 Proc.

$\lambda = 0{,}9706$. $h_1 - h_2$ 3,2 cm bis 2,9 cm.

| $\vartheta$ | $t$ | $\sigma$ | $k$ beob. | $k$ ber. | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *14,58 | 2017,8″ | 1,2526 | 10,582 | 10,688 | − 0,106 |
| *16,40 | 1727,4″ | 1,2517 | 9,047 | 8,971 | + 0,076 |
| *17,58 | 1538,9″ | 1,2511 | 8,052 | 8,055 | − 0,003 |
| *18,39 | 1450,5″ | 1,2507 | 7,585 | 7,498 | + 0,087 |
| *21,03 | 1156,5″ | 1,2494 | 6,035 | 5.994 | + 0,041 |
| *22,76 | 997,5″ | 1,2485 | 5,197 | 5,210 | − 0,013 |
| *23,60 | 933,6″ | 1,2481 | 4,856 | 4,874 | − 0,018 |
| *24,60 | 861,1″ | 1,2476 | 4,468 | 4,506 | − 0,038 |
| *25,44 | 814,0″ | 1,2471 | 4,226 | 4,220 | + 0,006 |
| *26,90 | 719,8″ | 1.2464 | 3,728 | 3,775 | − 0,047 |
| *30,20 | 567,4″ | 1,2147 | 2,930 | 2,942 | − 0,012 |

$$k = 0{,}51798 \,.\, \frac{452 - \vartheta}{\vartheta} - 0{,}035830\,(150 - \vartheta).$$

* Die gesternten Werthe hier und in den folgenden Sätzen sind die zur Construction der Fig. 1 verwendeten.

II. Satz. Glycerin 92,7 Proc.

$\lambda = 0{,}9708$. $h_1 - h_2$ 4,8 bis 3,4 cm.

| $\vartheta$ | $t$ | $\sigma$ | $k$ beob. | $k$ ber. | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *13,79 | 1495,7 | 1,2486 | 7,828 | 7,949 | − 0,121 |
| *14,75 | 1372,5 | 1,2480 | 7,312 | 7,228 | + 0,084 |
| *15,98 | 1228,0 | 1,2473 | 6,535 | 6,435 | + 0,100 |
| 16,08 | 1216,3 | 1,2473 | 6,472 | 6,376 | + 0,096 |
| *16,97 | 1110,7 | 1,2466 | 5,794 | 5,883 | − 0,089 |
| *17,24 | 1105,2 | 1,2466 | 5,766 | 5,744 | + 0,022 |
| 18,30 | 977,7 | 1,2459 | 5,191 | 5,239 | − 0,048 |
| *18,43 | 993,1 | 1,2458 | 5,174 | 5,182 | − 0,008 |
| 18,47 | 983,1 | 1.2458 | 5,122 | 5,164 | − 0,042 |
| *20,12 | 853,2 | 1,2448 | 4,438 | 4,503 | − 0.065 |
| *21,49 | 765,6 | 1,2440 | 4,052 | 4,036 | + 0,016 |
| 21,52 | 766,6 | 1,2440 | 4,058 | 4,026 | + 0,032 |
| *22,50 | 712,1 | 1,2434 | 3,766 | 3,730 | + 0,036 |
| 22,55 | 701,6 | 1,2434 | 3,710 | 3,715 | − 0,005 |
| *24,60 | 605,7 | 1,2422 | 3,197 | 3.181 | + 0,016 |
| *27,56 | 493,6 | 1,2404 | 2.550 | 2,561 | − 0,011 |
| *29,83 | 422,2 | 1,2390 | 2,176 | 2,179 | − 0,003 |
| *29,95 | 417,5 | 1,2390 | 2,152 | 2,160 | − 0,008 |

$$k = 0{,}34832\, \frac{452 - \vartheta}{\vartheta} - 0{,}02288\,(150 - \vartheta.)$$

III. Satz. Glycerin 88,4 Proc.
$\lambda = 0,9712$. $h_1 - h_2$ 3,6 bis 3,05 cm.

| $\vartheta$ | $t$ | $\sigma$ | $k$ beob. | $k$ ber. | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *13,54 | 659,9 | 1,2371 | 3,400 | 3,418 | − 0,018 |
| *14,74 | 589,5 | 1,2363 | 3,012 | 3,067 | − 0,055 |
| 14,76 | 585,9 | 1,2363 | 2,994 | 3,062 | − 0,068 |
| *15,96 | 552,8 | 1,2355 | 2,841 | 2,766 | + 0,075 |
| *17,39 | 492,8 | 1,2346 | 2,529 | 2,468 | + 0,061 |
| *18,51 | 462,5 | 1,2338 | 2,353 | 2,267 | + 0,086 |
| *19,68 | 407,9 | 1,2330 | 2,073 | 2,083 | − 0,010 |
| 19,70 | 413,0 | 1,2330 | 2,097 | 2,080 | + 0,017 |
| *19,93 | 408,6 | 1,2329 | 2,083 | 2,047 | + 0,036 |
| *22.37 | 343,6 | 1,2313 | 1,748 | 1,736 | + 0,012 |
| *23,28 | 314,6 | 1,2307 | 1,593 | 1,637 | − 0,044 |
| *24,70 | 289,3 | 1,2298 | 1,468 | 1,499 | − 0,031 |
| 24,62 | 295,4 | 1,2298 | 1,499 | 1,507 | − 0,008 |
| *25,78 | 273,9 | 1,2290 | 1,388 | 1,405 | − 0,017 |
| 25,82 | 271,7 | 1,2290 | 1,376 | 1,402 | − 0,026 |

$$k = 0,13184 \frac{452 - \vartheta}{\vartheta} - 0,006238 (150 - \vartheta).$$

IV. Satz. Glycerin 82,4 Proc.
$\lambda = 0,9718$. $h_1 - h_2$ 3,6 bis 3,1 cm.

| $\vartheta$ | $t$ | $\sigma$ | $k$ beob. | $k$ ber. | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *13,36 | 279,54 | 1,2214 | 1,4051 | 1,4915[1]) | − 0,0864 |
| 13,34 | 283,86 | 1,2214 | 1,4269 | 1,4941 | − 0,0672 |
| *15,58 | 245,54 | 1,2198 | 1,2310 | 1,2405 | − 0,0095 |
| 15,59 | 246,68 | 1,2198 | 1,2367 | 1,2395 | − 0,0028 |
| *17,0 | 223,06 | 1,2189 | 1,1167 | 1,1149 | + 0,0018 |
| 17,0 | 222,55 | 1,2189 | 1,1141 | 1,1149 | − 0,0008 |
| *17,84 | 208,53 | 1,2183 | 1,0429 | 1,0501 | − 0,0072 |
| 17,85 | 209,93 | 1,2183 | 1,0499 | 1,0494 | + 0,0005 |
| *18,97 | 197,11 | 1,2176 | 0,9847 | 0,9724 | + 0,0123 |
| 18,76 | 197,83 | 1,2177 | 0,9884 | 0,9861 | + 0,0023 |
| *19,87 | 184,07 | 1,2170 | 0,9174 | 0,9169 | + 0,0005 |
| 19,88 | 185,07 | 1,2170 | 0,9224 | 0,9163 | + 0,0061 |
| *22,17 | 161,11 | 1,2155 | 0,7967 | 0,7962 | + 0,0005 |
| 22,23 | 160,43 | 1,2155 | 0,7933 | 0,7934 | − 0,0001 |
| *24,40 | 142,48 | 1,2141 | 0,7029 | 0,7018 | + 0,0011 |
| 24,42 | 141,85 | 1,2141 | 0,6998 | 0,7011 | − 0,0013 |
| *25,72 | 131,93 | 1,2133 | 0,6500 | 0,6537 | − 0,0037 |
| 25,72 | 131,09 | 1,2133 | 0,6459 | 0.6537 | − 0,0078 |

$$k = 0,052890 \frac{452 - \vartheta}{\vartheta} - 0,001793 (150 - \vartheta).$$

Der in der Tabelle angegebene Procentgehalt des benutzten Glycerins ist aus dem specifischen Gewichte nach der

1) Die beiden ersten Werthe von $k$ sind zur Berechnung der Constanten $A$ und $B$ der Formel nicht mit verwendet, da bei ihnen ein Beobachtungsfehler vermuthet wurde.

Tabelle von Lenz[1]) bestimmt. Die Einheiten von $k$ sind $[k] = [g, cm^{-1}, sec^{-1}]$.

Wie man aus der Tabelle sieht, schliessen sich in der That die beobachteten Werthe $k$ den berechneten Curven gut an. Dasselbe zeigt Fig. 1, in der die $\vartheta$ als Abscissen, die $k$ als Ordinaten eingetragen sind, und in der die ausgezogenen Curven den berechneten, die gesternten Punkte den beobachteten Werthen $k$ entsprechen.

Diese Curven sind Hyperbeln, deren Centren auf der Axe

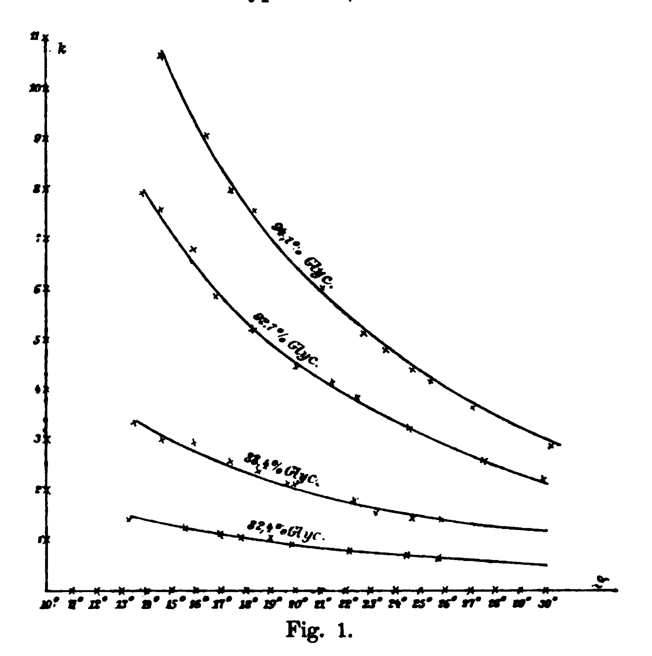



Fig. 1.

der $k$ in den Abständen $-5,89$; $-3,78$; $-1,07$; $-0,32$; vom Nullpunkt liegen, deren eine Asymptote jeweils mit der $k$-Axe zusammenfällt, während die zweite mit der $\vartheta$-Axe die Winkel $2^0 03'$; $1^0 14'$; $0^0 27'$; $0^0 06'$; einschliesst. Die reellen und imaginären Axen der einzelnen Hyperbeln sind angenähert einander gleich und nehmen mit wachsendem Wassergehalt an Grösse ab.

Für sehr grosse Verdünnung würde man also gleichseitige

1) Lenz, Fresenius' Zeitschr. f. analyt. Chemie. **19.** p. 302.

Hyperbeln erwarten müssen, deren Asymptoten mit den Axen zusammenfallen.

Dies stimmt mit den von O. E. Meyer[1]) nach Rosencranz's Beobachtungen gegebenen Formeln für verdünntes Glycerin, nur dass bei ihm nicht die $k$-Axe selbst, sondern eine Parallele zu derselben die eine Asymptote darstellt.

Dazu ist zu bemerken, dass die Annahme $\vartheta_0 = 0$, die in den Formeln gemacht wurde, und durch welche die $k$-Axe zur Asymptote wird, eine rein willkürliche war. Beobachtungen bei niederer Temperatur, als ich sie hier erreichen konnte, müssen diese Constante genauer festlegen.

Dass in der Nähe des Nullpunktes von $\vartheta$, wenigstens für wasserarmes Glycerin, ein singulärer Punkt liegt, geht aus der Beobachtung hervor, nach welcher unter Umständen bei Winterkälte Glycerin in festen Krystallen sich aus der wässerigen Lösung ausscheiden kann.[2])

Auch für hohe Temperaturen können, wie schon oben angedeutet, die gegebenen Gleichungen in ihrer jetzigen Form den Gang von $k$ nicht darstellen. Die erste Hyperbel schneidet nämlich die Axe schon bei $\vartheta = 67^0$ und zum zweitenmal bei $\vartheta = 97^0$. Die anderen drei Hyperbeln schneiden die Axe zwar nicht, geben aber Minimalwerthe für $k$ bei $\vartheta$ gleich $83^0$; $98^0$; $116^0$ respective.

Dass an diesen Unregelmässigkeiten die Willkür in der Wahl der Constanten $\vartheta_0$, $\vartheta_1$, und $\overline{\vartheta}$ allein Schuld sei, ist nicht wahrscheinlich. Es zeigen nämlich auch Versuche mit anderen Curven zweiten Grades, z. B. mit der folgenden:

$$k = (452 - \vartheta)\left(\frac{A}{\vartheta} - B\right)$$

wohl innerhalb des Beobachtungsintervalles Uebereinstimmung mit dem Gang der gefundenen Werthe $k$, ergeben aber ebenfalls für höhere Temperaturen Widersprüche.

Es dürfte vielmehr überhaupt fraglich sein, ob $k$ für ein weites Temperaturintervall sich durch eine einheitliche Formel einfacheren Charakters wird darstellen lassen. Die leicht ein-

1) O. E. Meyer. Wied. Ann. 2. p. 405. 1877.

2) Dingler, Polytechn. Journal 209. p. 145. 1873. Crookes, Zeitschrift f. Chemie. Neue Folge. 3. p. 70. 1867.

tretende Trübung des Glycerins beim Erhitzen, sowie der auftretende Acroleingeruch deuten auf Neigung zu theilweisen Zersetzungen hin, die ihren Einfluss auf $k$ geltend machen müssen.

Zwar soll ganz reines Glycerin von diesen Erscheinungen frei sein. Aber alle Sorten, die ich darauf prüfte, zeigen dieselben deutlich, obgleich fremde Beimengungen sich gar nicht, oder nur in verschwindenden Spuren nachweisen liessen.

Dass eine so einfache Function zweiten Grades, wie wir sie oben benutzten, für hohe Temperaturen den Gang von $k$ nicht mehr darstellt, zeigen auch Versuche von Colson.[1])

Er beobachtete mit Glycerin, dessen Dichte er leider nicht angibt, nach der Transpirationsmethode in ihrer gewöhnlichen Form und fand, dass 5 cbcm Glycerin ausflossen in folgenden Zeiten:

| bei | 21° | 100° | 150° | 250° | 265° |
|---|---|---|---|---|---|
| in | $8^h$ | 360″ | 114″ | 40,5″ | 33″ |

Wasser von 20° gebrauchte 34″. Daraus berechnet sich, wenn man für Wasser den absoluten Werth $k$ nach O. E Meyer's[2]) Formel einführt, die folgenden Werthe $k$ für Glycerin:

| 21° | 100° | 150 | 250 | 265 |
|---|---|---|---|---|
| 8,540 | 0,1058 | 0,0338 | 0,01201 | 0,00979. |

Legt man durch die, diesen fünf Werthepaaren entsprechenden Punkte eine Curve zweiten Grades, so erhält dieselbe die Gleichung:

$$0{,}0000117\,\vartheta^2 + 0{,}1333\,\vartheta k + k^2 - 0{,}00434\,\vartheta - 11{,}341\,k + 0{,}0948 = 0.$$

Man erkennt leicht, dass man es hier auch mit einer Hyperbel zu thun hat. Da aber der Coefficient von $k^2$ einen nicht verschwindenden Werth besitzt, wird $k$ sich hier in complicirterer Weise durch eine Wurzelgrösse ausdrücken, also in einer von unserer Darstellung vollständig abweichenden und aus physikalischen Gründen nicht acceptablen Form.

Der Werth, den Colson bei 21° findet, ist etwas grösser als derjenige, den das concentrirteste Glycerin in meinen Versuchen bei der entsprechenden Temperatur gab. Da indess

1) Colson, Compt. Rend. 113. p. 740. 1891.
2) O. E. Meyer, Wied. Ann. 2. p. 387. 1877.

bei ihm, wie schon bemerkt, eine Angabe der Dichte fehlt, so ist eine Folgerung hieraus nicht zu ziehen.

Barus[1]) gibt in einer Arbeit Werthe von $k$ für Glycerin der Dichte 1,26, die zwischen 5,05 und 5,43 liegen. Hier fehlt nun leider die Angabe der Temperatur, sodass eine Vergleichung wieder unmöglich wird.

Bemerkt muss indess werden, dass die von ihm angewandte Methode gewichtigen theoretischen Bedenken unterliegt,

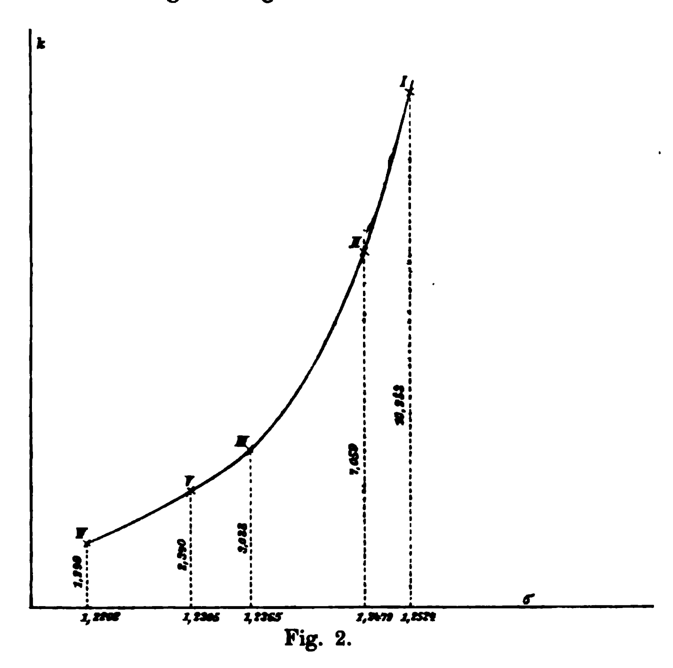


Fig. 2.

die eine ausgedehntere Anwendung derselben nicht als empfehlenswerth erscheinen lassen.

Er beobachtet nämlich die Geschwindigkeit, mit der ein Faden der Flüssigkeit aus einem Reservoir in einer Capillaren hinabsteigt indem er die Strecken misst, die das vordere Ende des Fadens in gewissen Zeiten zurücklegt.

Abgesehen davon, dass bei ihm von einer einigermaassen strengen Ableitung der Formel aus den hydrodynamischen Differentialgleichungen nicht die Rede ist, kommen die Ca-

1) Barus, Phil. Magaz. V. S. Vol. 29. p. 337. 1890.

pillarkräfte zwischen Glas und der Flüssigkeit, sowie Unregelmässigkeiten in der Beschaffenheit der Rohrwand, die eine Benetzung durch die Flüssigkeit erleichtern oder erschweren können, in völlig uncontrollirbarer Weise in's Spiel.

Endlich sei noch angeführt, dass der von mir in einer früheren Arbeit[1]) für Glycerin von der Dichte 1,2305 bei 15° gefundene Werth $k = 2,3395$ sich gut in die hier nach gänzlich verschiedener Methode erhaltenen einreiht.

Berechnet man nach den gegebenen Formeln $k$ 15° für die vier Sätze, so erhält man bei den Dichten:

| $\sigma$ | 1,2524 | 1,2479 | 1,2365 | 1,2202 |
|---|---|---|---|---|
| $k$ | 10,253 | 7,059 | 3,088 | 1,299. |

Stellt man diese Werthe graphisch dar, indem man $\sigma$ als Abscissen, $k$ als Ordinaten aufträgt, so sieht man (vgl. Fig. 2), dass der früher gefundene Werth (in der Zeichnung durch V markirt) sich sehr gut der Curve anpasst, durch welche man die hier gefundenen Werthe I—IV verbinden kann.

Darmstadt, Physikalisches Institut, October 1892.

1) Brodmann, Wied. Ann. **45**. p. 159. 1892. Die Angabe der Dichte, die an der citirten Stelle fehlt, findet sich in meiner Dissertation.

## XVI. *Bemerkung zu der Arbeit von M. Cantor; Ueber Capillaritätsconstanten; von Th. Lohnstein.*

In einem der letzten Hefte dieser Zeitschrift hat Hr. M. Cantor eine Arbeit „über Capillaritätsconstanten" veröffentlicht, die mir zu den nachstehenden Erörterungen Veranlassung gibt. Zur Ermittelung der Capillaritätsconstanten bedient sich der Hr. Verf. verschiedener Methoden, die das gemeinsam haben, dass das Maximum der Spannung der Flüssigkeitsoberfläche in den betreffenden Versuchsanordnungen aufgesucht wird. Die Berechnung der Capillaritätsconstanten hängt demgemäss von einer Gleichung ab, die erhalten wird, indem man den Differentialquotienten des die Spannung der Flüssigkeitsfläche erzeugenden Zuges oder Druckes nach der unabhängigen Variabelen der Versuchsanordnung gleich Null setzt. Hr. M. Cantor schreibt: „Von Sondhauss sowohl, als auch bei der späteren Anwendung seines Verfahrens ist aber eine eingehendere theoretische Untersuchung unterlassen und infolge dessen sind wesentliche Punkte übersehen worden, so z. B. dass der Zug im allgemeinen vom Randwinkel abhängig ist, ferner der Einfluss der Dicke des Ringes etc." Er hat dabei übersehen, dass G. Kirchhoff (Mechanik p. 147 u. 148) das Problem ganz allgemein behandelt hat, wobei auch der Einfluss des Randwinkels berücksichtigt ist. Die Frage, wodurch dass Abreissen eines von der Flüssigkeit benetzten und durch eine entgegengesetzt der Schwere wirkende Kraft über das Niveau derselben emporgehobenen Körpers bedingt sei, hat Kirchhoff allerdings nicht berührt, diesen Gegenstand habe ich, meines Wissens als erster, in meiner Arbeit „Ueber den Einfluss der Capillarität auf die Gleichgewichtsverhältnisse schwimmender Körper"[1]) einer Erörterung unterzogen. In meiner Dissertation (Berlin 1891), als deren Auszug genannte Arbeit erschien, habe ich für den von mir behandelten Fall an mit convexen

---

1) Th. Lohnstein, Wied. Ann. 44. p. 52. 1891.

Meniscus schwimmenden Körpern die dem Untersinken derselben entsprechende Maximalgleichung aufgestellt und allgemein bewiesen, dass dieselbe stets zwischen $\vartheta = 90^0$ und $\vartheta = 180^0$ eine Wurzel hat; ich habe ferner erwähnt, dass dieses Resultat auch auf den analytisch gleichartigen Fall der Adhäsionsplatten angewendet werden kann (p. 28). Nun hat Hr. Cantor allerdings nicht mit Platten, sondern mit Ringen experimentirt; dass ich aber sehr wohl gewusst habe, dass für diese genau dasselbe gilt, dürfte zur Genüge aus der Anmerkung 1 (diese Zeitschrift 44, p. 62) hervorgehen, in der ich Gelegenheit hatte, einige Angaben des Hrn. Prof. Braun — in dessen Laboratorium, beiläufig bemerkt, Hr. Cantor seine Arbeit ausführte — zu berichtigen. Dass ich ferner auch den Einfluss der Dicke eines solchen Ringes gekannt habe, folgt aus meiner Bemerkung daselbst betreffend „den hydrostatischen Theil der dem Gewichte der Körper entgegenwirkenden Kraft". Denselben Gegenstand habe ich ausführlicher im diesjährigen Octoberheft der „Zeitschrift für physikalische Chemie" (Bd. 10, p. 504—508) erörtert, indess will ich darauf hier weiter kein Gewicht legen, denn diese Notiz konnte Hrn. Cantor zur Zeit, als er seine Arbeit abschloss, noch nicht bekannt sein.

Berlin, im November 1892.

## XVII.. *Notiz über Reinigung des Quecksilbers;* *von W. Jaeger.*

(Mittheilung aus der physikalisch-technischen Reichsanstalt. Abgedruckt aus der Zeitschrift für Instrumentenkunde. 1892. p. 354.)

Das in der physikalisch-technischen Reichsanstalt für Präcisionsarbeiten (zur Darstellung von Normal-Quecksilber-Widerständen, Normalbarometern etc.) bestimmte Quecksilber wird einer besonders eingehenden Reinigung unterzogen, über die hier berichtet werden soll.

Als Rohmaterial findet das aus der Grube zu Idria in eisernen Flaschen bezogene Quecksilber Verwendung, welches sich bekanntlich durch besondere Güte auszeichnet und für die meisten Zwecke nach dem Filtriren direct zu verwenden ist.

Um etwa noch vorhandene Schwermetalle zu entfernen, wird das filtrirte und getrocknete Quecksilber zunächst einer zweimaligen Destillation im Vacuum unterworfen, wobei besonders darauf gesehen werden muss, dass jede Spur von Fettdämpfen und sonstigen Verunreinigungen, die aus gefetteten Glashähnen oder Kautschukschläuchen stammen könnten, vermieden wird. Aus diesem Grunde wendet man zum Auspumpen des Destillirapparates eine Quecksilberpumpe ohne Hahn an, bei der auch alle Verschlüsse durch Quecksilberdichtungen hergestellt sind; die Verbindung zwischen der Pumpe und dem Destillirapparat besteht ebenfalls nur aus Glas unter Vermeidung von Hähnen. Nach dem Auspumpen wird das ausgezogene Verbindungsrohr abgeschmolzen.

Da möglicherweise in dem durch Destillation gereinigten Queksilber noch electropositive Metalle (Alkalien, Zink etc.) enthalten sein können, so erschien es rathsam, das Quecksilber durch Electrolyse einer weiteren Reinigung zu unterwerfen, wobei die erwähnten Metalle in Lösung bleiben müssen.

Als Flüssigkeit, aus der das Quecksilber niedergeschlagen wird, wählte man eine Lössung von salpetersaurem Quecksilberoxydul, die durch Einwirkung von Salpetersäure auf überschüssiges Quecksilber erhalten wird.

Um die Stromdichte möglichst klein zu machen, wurde der

Strom auf vier gleich gestaltete Gefässe vertheilt: dieselben bestanden aus einem äusseren Glascylinder *A* (Fig. 1) von etwa 19 cm Durchmesser und 11 cm Höhe, der das als Anode dienende, durch Destillation gereinigte Quecksilber enthielt, und einem kleineren, inneren Glascylinder *B* von 9 cm Durchmesser und 3 cm Höhe.

In dem letzteren steht die als Kathode dienende Platinelectrode *a*, welche in der aus Fig. 1, unten, ersichtlichen Weise zur Spirale gebogen ist.

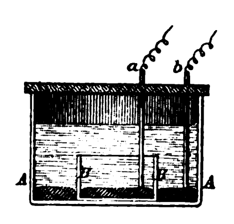





Fig. 1.

Hat sich bereits eine grössere Menge Quecksilber niedergeschlagen, sodass das innere Gefäss damit bedeckt ist, so wirkt die ganze Fläche desselben als Kathode, wodurch die Stromdichte noch verringert wird. In das Quecksilber des äusseren Gefässes ragt ebenfalls ein Platindraht *b*, der zur Stromzuführung dient und von der Flüssigkeit durch ein Glasrohr isolirt ist. Die Gesammtfläche der Kathode beträgt also bei dieser Anordnung etwa 260 qcm, diejenige der Anode etwa 900 qcm.

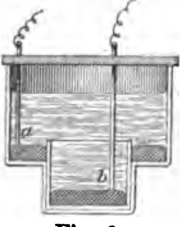


Fig. 2.

Als Stromquelle benutzte man eine Gülcher'sche Thermosäule von J. Pintsch in Berlin, die bei einem inneren Widerstand von nur 0,4 Ohm 3,6 bis 4 Volt Spannung besitzt. Durch Einschaltung eines Widerstandes wurde gewöhnlich der Strom auf etwa 1 Amp. gehalten, während er zeitweise die Stärke von 3 Amp. erreichte. Auch bei dieser Stromstärke ging die Ausscheidung des Quecksilbers noch gut von statten. (Im letzteren Fall beträgt die Stromdichte etwa 0,012 Amp. für 1 qcm an der Kathode, 0,003 an der Anode; im ersteren Fall nur den dritten Theil hiervon.)

Ein Uebelstand bei dieser Anordnung besteht darin, dass sich nach einiger Zeit auf der Anode (z. Th. basisches) Salz auflagert und schliesslich den Strom ganz unterbricht. Die der Anode benachbarte Flüssigkeit wird nämlich durch Auflösen von Quecksilber immer concentrirter und diffundirt nur langsam nach oben hin, während der Ueberschuss des Salzes ausfällt.

Durch eine andere Anordnung, etwa in der Art, wie sie nebenstehende Fig. 2 zeigt, liesse sich dieser Missstand wohl vermeiden. Wenn sich die Anode *a* höher als die Kathode *b* befindet, wird die durch den Strom concentrirte Lösung durch ihre Schwere nach unten fliessen und die an Salz ärmere Lösung bei *b* verdrängen können, sodass in diesem Falle ein fortwährender Flüssigkeitsstrom vorhanden ist. Bei der oben beschriebenen Einrichtung wurde durch zeitweiliges Umrühren der Flüssigkeit dasselbe erreicht.

Die *chemische* Untersuchung des nach der vorstehenden Methode gereinigten Quecksilbers wurde im chemischen Laboratorium der Reichsanstalt von Herrn Dr. Mylius ausgeführt, welcher darüber folgendermaassen berichtet:

„Zur Auffindung schwerer Metalle in dem durch Electrolyse gereinigten Quecksilber wurden folgende Versuche ausgeführt.

1) 200 g des Materials wurden aus einer kleinen Retorte im Sauerstoffstrom destillirt, wobei einige Milligramme krystallisirtes Oxyd hinterblieben. Dasselbe löst sich völlig in Salpetersäure; die entstandene Lösung, in einem Porzellantiegel verdampft und bis zum Verflüchtigen des Quecksilbers erhitzt, hinterliess keine Spur eines Rückstandes.

2) 200 g des Materials wurden bei niedriger Temperatur mit verdünnter Salpetersäure behandelt, sodass noch 2 g Metall ungelöst blieben; diesen Rest, welcher das Platin hätte enthalten können, (das event. aus den Electroden stammte,) wurde isolirt und in einem Porzellantiegel in Salpetersäure gelöst; die Lösung hinterliess bei vorsichtigem Verdampfen und Glühen keinen bemerkbaren Rückstand.

Die Hauptnitratlösung, welche das Quecksilber als Oxydul und Oxyd enthielt, goss man in verdünnte Salzsäure. Das abfiltrirte und mit Wasser ausgewaschene Quecksilberchlorür war vollständig flüchtig; das Filtrat wurde mit Ammoniak versetzt, solange noch ein weisser Niederschlag von Mercuriammoniumchlorid entstand. Dieser wurde abfiltrirt und mit verdünnter Ameisensäure erwärmt; dabei erfolgte eine Umbildung zu Quecksilberchlorür, welches durch Filtration isolirt wurde und sich als vollständig flüchtig erwies. Das ammoniakalische und das ameisensaure Filtrat wurden vereinigt und durch Eindampfen concentrirt; die darin vorhandenen Ammoniaksalze

der Salpetersäure, Salzsäure und Ameisensäure wurden mit Hülfe von Salpetersäure zerstört und verflüchtigt; es hinterblieb ein kleiner Rückstand, welcher Alkalien, Kalk und Kieselsäure enthielt; dieselben stammten aus den angewandten Glasgefässen. Fremde Metalle, welche das Quecksilber verunreinigen, mussten vorwiegend in diesem Rückstande gesucht werden; die systematische Untersuchung desselben ergab jedoch von fremden Metallen nur noch eine Spur Eisen; von dieser ist es wahrscheinlich, dass sie, wie die schon genannten Stoffe, aus verwendeten Geräthen stammt.

In 200 g des gereinigten Quecksilbers konnte daher mit den gebräuchlichen Methoden der Analyse keine Verunreinigung durch Schwermetalle aufgefunden werden; eine Prüfung auf leichte Metalle, für welche der spectroskopische Weg geeigneter erscheinen würde, bleibt noch vorbehalten.

Das in eisernen Flaschen aus Idria bezogene Quecksilber ist zwar sehr rein, es hinterlässt aber doch nach wiederholtem Filtriren bei dem Verdampfen im Porzellantiegel einen sichtbaren Rückstand.“

Charlottenburg, September 1892.

1893. ANNALEN № 2.

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLVIII.

# I. *Ueber den Durchgang der Electricität durch Gase. 4. Entladungspotentiale;*

*von A. Heydweiller.*

1. Es liegen aus älterer und neuerer Zeit so zahlreiche Beobachtungen über Entladungspotentiale, besonders in Bezug auf Funkenentladungen vor, dass es überflüssig scheinen möchte, das Material noch weiter zu vermehren. Nach den älteren Arbeiten, die hauptsächlich die Aufsuchung eines sog. Schlagweitengesetzes, d. h. einer Beziehung zwischen Potential und Funkenstrecke, bezweckten, ist neuerdings die Bestimmung von Entladungspotentialen in absolutem Maass Gegenstand zahlreicher Messungen gewesen.

Betrachtet man indessen diese Messungen näher, so findet man, wie ein Blick auf Tabellen 1—3 lehrt, sehr erhebliche Unterschiede zwischen den Zahlen der einzelnen Beobachter, die bis zu 15 Proc. reichen und bei der Sorgfalt der Messungen und Geschicklichkeit der Beobachter höchst auffallend sind. Ein von Hrn. Jaumann[1]) gemachter Versuch, diese Unterschiede durch Potentialschwankungen zu erklären, ist meines Erachtens in den vorliegenden Fällen nicht stichhaltig.

Schon früher habe ich die verwickelte Beziehung zwischen Entladungspotential bei Kugelelectroden, Schlagweite und Krümmung der Electroden auf eine verhältnissmässig einfache Gesetzmässigkeit zurückgeführt.[2]) Ich zeigte, dass bei gleichen Kugelelectroden das Entladungspotentialgefälle an der isolirten Electrode um so höher steigt, je tiefer es mit zunehmender Schlagweite an der abgeleiteten sinkt, so zwar, dass das arithmetische Mittel aus den Entladungsgefällen an den beiden

1) Jaumann, Wien. Ber. 97 (2). p. 765. 1888.

2) Heydweiller, Wied. Ann. 40. p. 464. 1890.

Tabellen 1—3.

Entladungspotentiale in c. g. s. Einheiten (e. s. Maass) bei gleichen Kugelelectroden vom Radius $r$ cm und der Schlagweite $d$ cm.

| Beobachter | Bstd. | Temp. | $d$=0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 | 1,5 | 2,0 | 2,4 | 3,0 | 4,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$ = 0,25 cm | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Czermak [1] . . . . | — | — | 16,1 | 27,5 | 37,6 | 46,3 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| Freyberg [2] . . . . | — | — | 16,8 | 28,6 | 37,2 | 45,2 | 50,5 | 55,3 | 61,2 | 65,0 | 71,2 | 76,9 | 81,9 | — | 94,6 | 98,6 |
| Paschen 1 [3] . . . | 756 | 15° | 16,5 | 28,7 | 38,7 | 47,7 | 54.0 | 58,9 | 64,8 | 68,7 | 72,4 | 76,5 | — | — | — | — |
| Paschen 2 . . . . | 756 | 15° | — | — | — | — | 55,3 | — | — | 73,9 | 77,6 | — | — | — | — | — |
| Heydweiller . . . | 740 | 16,5° | — | 27,8 | — | 45,4 | — | 57,2 | 63,5 | 67,8 | — | 74,3 | 77,2 | — | 81,2 | 83,3 |
| $r$ = 0,5 cm | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Czermak. . . . . | — | — | 15,8 | 27,2 | 37,8 | 47,8 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| Baille [4] . . . . . | 760 | 15—20° | 15,2 | 26,8 | 37,3 | 46,6 | 54,7 | 65,2 | 77,6 | 83,1 | — | — | — | — | — | — |
| Bichat u. Blondlot [5] | — | — | 16,1 | 27,5 | 38,2 | 47,7 | 56,3 | 64,9 | 77,0 | 84,7 | 91,3 | 97,8 | 104,5 | — | — | — |
| Freyberg . . . . | — | — | 15,5 | 31,7 | 38,9 | 46,6 | 56,0 | 64,2 | 77,4 | 85,9 | 92,0 | 98,4 | 117,9 | 123,9 | — | — |
| Obermayer 1 [6] . . | — | — | 16,0 | 28,2 | 37,8 | 47,8 | 56,7 | 65,4 | 81.1 | 93,2 | — | — | — | — | — | — |
| Obermayer 2 . . . | — | — | — | — | — | — | 56,1 | — | 79,9 | 88,6 | — | — | — | — | — | — |
| Paschen . . . . . | 756 | 15° | 16,4 | 28,1 | 38,9 | 49,4 | 59,2 | 68,2 | 82,6 | — | — | — | — | — | — | — |
| Heydweiller 1. . . | 746 | 15,5° | — | 28,7 | — | 49,3 | — | 67,0 | 81,0 | 90,4 | — | 105,8 | 114,1 | 118,9 | — | — |
| Heydweiller 2. . . | 733 | 18° | — | 27,8 | — | 47,3 | — | 65,3 | 77,6 | 85,4 | — | 97,4 | 104,2 | 109,8 | — | — |
| $r$ = 1,0 cm | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Czermak. . . . . | — | — | 15,1 | 26,6 | 37,5 | 47,7 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| Freyberg . . . . | — | — | 15,2 | 29,0 | 38,5 | 48,0 | 56,8 | 64,9 | 82,1 | 96,8 | 108,9 | — | — | — | — | — |
| Paschen 1 . . . . | 756 | 15° | 16,1 | 27,7 | 38,8 | 49,4 | 60,1 | 69,4 | 87,8 | — | — | — | — | — | — | — |
| Paschen 2 . . . . | — | — | 15,8 | 26,7 | 37,9 | 48,3 | 58,3 | 69,0 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| Quincke [7] . . . . | — | — | 14,8 | 26,4 | 37,3 | 46,7 | 56,3 | 66,6 | 83,9 | — | — | — | — | — | — | — |
| Heydweiller . . . | 744 | 16,5° | — | 27,2 | 38,3 | 48,6 | 58,7 | 68,5 | 87,1 | 104,9 | 119,0 | 134,2 | 151,6 | 161,7 | — | — |

1) **Czermak**, Wien. Ber. (2) **97.** p. 307. 1888. 2) **Freyberg**, Wied. Ann. **38.** p. 250. 1889. 3) **Paschen**, Wied. Ann. **37.** p. 69. 1889. 4) **Baille**, Ann. chim. et phys. (5) **25.** p. 486. 1882. 5) **Bichat u. Blondlot**, Journ. de phys. (2) **5.** p. 457. 1886. 6) **Obermayer**, Wien. Ber. (2) **100.** p. 134. 1889. 7) **Quincke**, Wied. Ann. **19.** p. 545. 1883.

Electroden, von mir zur Abkürzung als *mittleres Entladungsgefälle* bezeichnet, für nicht zu kleine Schlagweite von dieser nahe unabhängig ist.

Auch von dieser Gesetzmässigkeit zeigen die vorliegenden Messungen zum Theil, namentlich bei sehr grossen Schlagweiten, erhebliche Abweichungen, welche eine Erklärung verlangen, wenn sie sich bewähren soll. Eine nähere Untersuchung dieser Abweichungen ist ein Hauptzweck der vorliegenden Arbeit, die zugleich zu einer Erklärung der verschiedenen Messergebnisse der einzelnen Beobachter führte.

Dabei war der Einfluss verschiedener Umstände auf die Entladungsspannung zu berücksichtigen, namentlich der Capacität, des Widerstandes im Schliessungskreise, der Luftdichte, der Oberflächenbeschaffenheit der Electroden, äusserer Influenzwirkungen. Daran schliessen sich Messungen der Entladungspotentiale bei ungleichen Electroden und eine Untersuchung der noch nicht entschiedenen Frage nach einem polaren Unterschied der Entladungspotentiale.

2. *Messmethoden und Apparate.* Zunächst wurde eine Anzahl von Messungen nach der schon früher bei kleinen Funkenstrecken von mir mit Erfolg angewandten galvanometrischen Methode[1]) ausgeführt; es gelang mir indessen bei grösseren Abständen der Electroden nicht, auf diesem Wege die erwünschte Genauigkeit von 1 Proc. zu erreichen. Auch Hrn. Freyberg's Messungen von Funkenpotentialen[2]) auf galvanometrischem Wege ergaben Curven, die bei höheren Potentialen erhebliche Unregelmässigkeiten aufweisen. Ich bin daher zur electrometrischen Methode übergegangen, nach der alle im Folgenden mitgetheilten Messungen ausgeführt sind. Dabei habe ich mich eines schon früher beschriebenen[3]), nach meinen Angaben von Hrn. Universitätsmechaniker Siedentopf hergestellten Spiegelelectrometers bedient. Ueber Einrichtung, Aichung und Graduirung desselben mittels der Kirchhoff-Thomson'schen Electrometerwaage ist a. a. O. das Erforderliche gesagt. Bei den vorliegenden Messungen ergab sich die

1) Heydweiller, Wied. Ann. **43.** p. 310. 1891.

2) Freyberg, Wied. Ann. **38.** p. 250. 1889.

3) Heydweiller, Zeitschr. f. Instrumentenkunde. **12.** p. 377. 1892. Wied. Ann. **48.** p. 110. 1893.

Spannung $v$ aus den auf Bögen reducirten Ausschlägen $n$ nach der Gleichung

$$v = 9{,}215\sqrt{n}.$$

Das Electrometer war durch einen dicken Draht mit dem einen Pol einer Holtz'schen Influenzmaschine (40 cm Scheibendurchmesser), der inneren Belegung einer Leydener Flasche von 0,0075 M. F. Capacität und der einen Electrode des Funkenmikrometers verbunden. Die zweite Electrode des letzteren, die äussere Belegung der Leydener Flasche und der andere Pol der Influenzmaschine waren mit der Wasserleitung verbunden.

An die isolirenden 15—25 cm langen Glasstützen des Funkenmikrometers waren kurze Glasröhrchen oben T-förmig angeschmolzen und in diese die 0,2—0,3 cm dicken, in Richtung der Funkenstrecke liegenden Zuleitungen zu den Electroden eingekittet. Bei vielen Messungen wurde die Glasstütze an der isolirten Electrode entfernt und diese nur durch den hinreichend dicken und festen Verbindungsdraht mit der Leydener Flasche getragen. In diesem Falle erhielten Leydener Flasche und Funkenmikrometer eine gemeinsame feste Aufstellung auf einem Steinpfeiler.

Die Berührungseinstellung der Electroden des Funkenmikrometers (stets Messingkugeln) lässt sich bei geeigneter Beleuchtung (heller Hintergrund) mit blossem Auge ebenso genau erreichen, wie etwa mit dem Mikroskop oder auf electrischem Wege, wovon ich mich durch Controlleinstellungen überzeugte.

Da es mir hauptsächlich auf grössere Funkenstrecken ankam, erfolgte die Messung derselben nur an der mit Nonius versehenen Millimetertheilung, die $^1/_{20}$ mm ziemlich sicher zu schätzen erlaubt. Die kleinsten Funkenstrecken (0,2—0,3 cm) sind daher um einige Procente unsicher; für diese ist auch die Potentialmessung wegen der Kleinheit der Ausschläge nicht genauer.

Die Messungen erfolgten fast alle bei Tageslicht und die Aufstellung des Funkenmikrometers war derart, dass die Entladungsstellen von dem Glimmlicht an der Influenzmaschine nicht bestrahlt wurden.

Bei allmählicher Steigerung des Potentials und langsamem, gleichmässigem Wachsen des Electrometerausschlages war der Augenblick der Entladung beim Funkenübergang durch Zurückspringen des Electrometers scharf zu erkennen.

Gegenstand der vorliegenden Messungen waren aber nicht nur Funkenpotentiale, sondern allgemeiner Entladungspotentiale, d. h. diejenigen Spannungen, bei denen die erste Entladung einsetzt; dieselbe erfolgte bei grösseren Entladungsweiten häufig nicht mehr in Funkenform, sondern als Büschel- oder Glimmentladung; in diesen Fällen war in die Ableitung ein Wiedemann'sches Galvanometer eingeschaltet, mit welchem der Beginn der Entladung in schon früher beschriebener Weise[1]) beobachtet wurde, auch wurden hierbei die akustischen und optischen Begleiterscheinungen der Entladung zu Hülfe genommen.[2]) Die Ablesungen konnten so auf einige Zehntelscalentheile genau erfolgen. Jede der mitgetheilten Zahlen ist der Mittelwerth aus drei bis sechs Einzelmessungen, deren grösste Abweichungen voneinander ein bis zwei Scalentheile betrugen.

Mit Ausnahme der kleinsten Spannungen sind diese Mittelwerthe durchgängig auf 1—2 Proc. genau.

3. *Oberflächenbeschaffenheit der Electroden.* Es wurden stets eine grössere Anzahl von Messungen bei geänderter Entladungsweite unter sonst gleichen Umständen vorgenommen. Nur zu Beginn einer jeden solchen Reihe wurden die Messingelectroden frisch geputzt und polirt; die Entladung fand stets nahe an denselben Stellen, den Zuleitungen diametral gegenüber, statt. Die zunehmende Corrosion beeinflusste die Entladungspotentiale nicht erheblich, wenigstens ergab die Wiederholung einer Reihe in umgekehrter Folge innerhalb der Genauigkeitsgrenzen die gleichen Werthe. Nur für die Büschelentladungen bei kleinen Electroden und grosser Entladungsweite wurde das Entladungspotential durch frisches Putzen der vorher corrodirten Electroden regelmässig ein wenig (1 bis 2 Proc.) herabgesetzt.[3]) Die vorliegenden Messungen beziehen sich also auf corrodirte Electroden.

4. *Widerstand des Entladungskreises.* Es ist von vornherein nicht wahrscheinlich und auch noch niemals festgestellt worden, dass der Widerstand des Schliessungskreises das Entladungspotential beeinflusse. Da indessen von diesem Umstande

1) Heydweiller, Wied. Ann. 48. p. 110. 1893.

2) Die Hrn. Dr. M. Wien und Otto Stern haben mich wiederholt in dankenswerther Weise bei den Beobachtungen unterstützt.

3) Vgl. auch Paschen, Wied. Ann. 37. p. 83. 1889.

die Form der Entladung abhängt, habe ich ihn noch besonders untersucht. Es wurden die Potentiale abwechselnd mit dem meist benutzten Schliessungskreise von kleinem Widerstande (einige Meter Kupferdraht) oder nach Einschaltung eines grossen Jodcadmiumwiderstandes (30—100 Megohm), entweder zwischen Leydener Flasche und Funkenstrecke (Zuleitung) oder in die Ableitung von letzterer, gemessen. Die folgende Tabelle 4 enthält die Ergebnisse einiger solcher Vergleiche mit gleichen Kugelelectroden vom Radius $r$ cm im Abstande $d$ cm.

Tabelle 4.

Entladungspotentiale in c. g. s. Einheiten (e. s. Maass).

26. October 1892. $r = 0,5$ cm.

| | $d=0,4$ | 1,0 | 1,5 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|
| Kleiner Widerstand . . . | 49,7 | 91,1 | 101,5 | 108,3 |
| 100 Megohm in Ableitung | 51,2 | 91,6 | 101,5 | 108,7 |

26. October 1892. $r = 0,5$ cm. Andere Aufstellung der Funkenstrecke.

| | $d=0,4$ | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,5 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 Megohm in Zuleitung . | 49,5 | 68,3 | 81,2 | 89,9 | 103,8 | 111,5 |
| 100 Megohm in Ableitung | 51,4 | 68,6 | 81,1 | 90,1 | 103,9 | 112,1 |

27. October 1892. $r = 1,0$ cm.

| | $d=0,2$ | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 100 Megohm in Ableitung | 27,6 | 38,8 | 49,6 | 59,0 | 69,7 | 88,3 | 105,8 | 120,5 |
| kleine Widerstände . . | 27,8 | 38,6 | 49,4 | 59,4 | 69,0 | 88,0 | 105,7 | 120,5 |

5. *Capacität.* Einen unmittelbaren Einfluss auf das Entladungspotential kann die dem Funkenmikrometer zugefügte Capacität natürlich nicht haben. Nach Hrn. Jaumann[1]) sollte sie aber insofern einen mittelbaren Einfluss ausüben, als die von dem unregelmässigen Gange der Influenzmaschine herrührenden Potentialschwankungen je nach der Grösse der zugeschalteten Capacität mehr oder weniger stark gedämpft wären.

Es wurden nacheinander zwei Beobachtungsreihen angestellt, die sich nur dadurch unterschieden, dass bei der einen die äussere Belegung der Leydener Flasche wie gewöhnlich zur Erde abgeleitet, bei der anderen dagegen isolirt war. Die Capacität wurde dadurch auf einen kleinen Bruchtheil herab-

1) Jaumann, Wien. Ber. (2) **97.** p. 765. 1888.

gesetzt, und das Potential stieg jetzt bei gleichem Gange der Influenzmaschine viel schneller, aber auch viel unregelmässiger an, sodass die Beobachtungen bedeutend erschwert und unsicherer wurden. Die Ergebnisse dieser Messungen enthält Tabelle 5.

Tabelle 5.

26. October 1892. $r$ = 0,5 cm. Entladungspotentiale in c. g. s. Einheiten.

| | | $d$ = 0,4 | 0,6 | 1,0 | 2,0 |
|---|---|---|---|---|---|
| Aeussere Belegung abgeleitet | mit grossem Widerstande | 50,8 | 68,8 | 90,0 | 111,8 |
| Aeussere Belegung isolirt | " " " | 51,3 | 68,7 | 89,6 | 110,4 |
| | " kleinem " | 51,2 | 67,2 | 89,6 | 110,0 |

Die Einzelbeobachtungen zeigen bei der verminderten Capacität weit grössere Abweichungen als sonst; trotzdem sind die Mittelwerthe nur wenig von denen bei grosser Capacität verschieden, und es ist daher dieser Umstand nicht geeignet, die viel erheblicheren Unterschiede der Zahlen in Tab. 1—3 zu erklären.

Auch Hr. Czermak[1]) konnte einen Einfluss der Capacität auf das Entladungspotential nicht feststellen.

6. *Entladungsform.* Die Entladungsform und zwar nicht nur die Art der Funkenentladung (oscillirend, einfach und intermittirend), sondern auch das Auftreten von Büschel- oder Glimmentladung hängt von Umständen ab, z. B. dem Widerstande des Entladungskreises, der Capacität, die nach dem vorigen auf das Entladungspotential ohne Einfluss sind. Durch blosses Einschalten von Widerstand kann man unter Umständen die Funkenentladung in Büschelentladung überführen. So erhielt ich z. B. bei negativer Entladung zwischen einer isolirten Electrode von 0,25 cm Radius und einer abgeleiteten von 2,5 cm bei 0,9 cm Schlagweite noch Funken, bei 0,95 abwechselnd Funken und Büschel, bei 1,0 nur Büschel, solange der Widerstand des Entladungskreises klein war; Zuschaltung von 100 Megohm ergab auch bei 0,9 cm ausschliesslich Büschelentladung; für positive Entladung zwischen denselben Electroden erhielt ich mit dem kleinen Widerstande bei 1,7 cm Schlagweite noch ausschliesslich Funken, darüber hinaus Büschel,

1) Czermak, Wien. (2) 97. p. 307. 1888.

mit dem grossen Widerstande aber schon bei 1,5 cm Büschel. Das Entladungspotential, d. h. diejenige Spannung, bei der die erste Entladung einsetzt, wird aber auch in diesen Fällen durch Einschaltung von Widerstand nicht beeinflusst. Auch zeigen die Curven, welche seine Abhängigkeit von der Entladungsweite darstellen, durchaus keine Unstetigkeit beim Uebergange von der einen Entladungsform in die andere. *Es ist also die Entladungsform ohne Einfluss auf das Entladungspotential*, sofern sich dieses auf den ersten Beginn der Entladung bezieht.

Dagegen kann man nach Beginn der Büschel- oder Glimmentladung das Potential durch stärkere Electricitätszufuhr (schnelleres Drehen der Influenzmaschine) noch weiter steigern, und es wird dann unter Umständen die Büschelentladung noch von einem Funken durchsetzt; in diesem Falle ist das Funkenpotential höher als das Entladungspotential, was bei den Messungen wohl zu beachten ist. So erhielt ich z. B. zwischen zwei gleichen Kugeln vom Radius $r = 0{,}25$ cm in 3 cm Abstand beim Potential 87,5 c. g. s. E. Büschelentladung, die bei schnellerem Drehen der Influenzmaschine unter Zunahme des Potentials stärker wurde, bis beim Potential 91,4 c. g. s. E. ein Funken übersprang.

Im allgemeinen erhielt ich bei negativer Entladung (— isolirter Electrode) schon in kleineren Abständen Büschel als be positiver, wenn die abgeleitete Electrode gleich oder grösser, als die isolirte war, im Gegensatz zu den Angaben von Paschen und Baille, aber in Uebereinstimmung mit Faraday.[1]) Die Umstände, unter denen die eine oder andere Entladungsart auftritt, sind trotz mancher bezüglicher Angaben noch nicht genügend festgestellt.

7. *Luftdichte* (*Barometerstand und Temperatur*). Schon Hr. v. Obermayer[2]) hat darauf aufmerksam gemacht, dass auch bei Beobachtungen von Entladungspotentialen in normaler Luft die Aenderungen des Luftdruckes nicht zu vernachlässigen sind; das Gleiche gilt von den Temperaturänderungen. Für kleine Schwankungen der Luftdichte darf man das Entladungspotential

1) Faraday, Exp. Res. in Electr. Art. 1482, 1487.

2) v. Obermayer, Wien. Ber. (2) 100. p. 134. 1889.

derselben proportional setzen, woraus folgt, dass es sich für eine Aenderung von 8 mm des Barometerstandes, oder für 3° Temperaturunterschied um je 1 Proc. ändert. Leider ist dieser Einfluss von früheren Beobachtern fast gar nicht berücksichtigt worden — nur bei Baille und Paschen finden sich wenigstens allgemeine Angaben über mittleren Luftdruck und mittlere Temperatur bei den Versuchen — und so darf man sich über Unterschiede von mehreren Procenten nicht wundern.

Bei meinen eigenen Versuchen habe ich diesen Einfluss stets feststellen können. So erhielt ich bei nahe gleicher Temperatur (17°) für die Entladungspotentiale zwischen gleichen Kugeln von 1 cm Radius im Abstande *d* cm als Mittel aus mehreren Reihen bei den Barometerständen 739, bez. 748 mm folgende Werthe:

Tabelle 6.

| *d* | Bstd. 739 | 748 |
|---|---|---|
| 0,2 | 27,0 | 27,6 |
| 0,3 | 37,7 | 39,0 |
| 0,4 | 47,7 | 49,6 |
| 0,5 | 58,3 | 59,2 |
| 0,6 | 67,9 | 69,2 |
| 0,8 | 86,6 | 87,6 |
| 1,0 | 104,1 | 105,8 |
| 1,2 | 118,8 | 119,2 |

Bei Reduction auf gleiche Luftdichte stimmen die unter sonst gleichen Umständen erhaltenen Entladungspotentiale in den meisten Fällen auf 1—2 Proc. miteinander überein; ebenso finde ich unter Vornahme der gleichen Reduction eine gute Uebereinstimmung zwischen den Messungen von Hrn. Paschen und den meinigen. Dass die von Hrn. Baille erheblich kleinere Werthe ergeben, liegt meines Erachtens an seiner Beobachtungsmethode, da er die Entladungspotentiale direct mit der Kirchhoff-Thomson'schen Electrometerwaage ohne Vermittelung durch ein Instrument mit continuirlicher Ablesung maass; hierdurch wird die Ausführung der Messungen bedeutend erschwert.

8. *Influenzwirkungen.* Dass Influenzwirkungen fester Leiter und Nichtleiter auf die Entladungspotentiale einen sehr bedeutenden Einfluss haben, ist bekannt; kann man doch die

Schlagweite einer Influenzmaschine durch Annäherung einer Ebonitplatte an die Funkenstrecke um ein Beträchtliches vergrössern. Besonders werden solche Einflüsse bei grösseren Entladungsweiten merklich.

Als influirende Körper kommen namentlich in Betracht: 1. die Influenzmaschine; 2. andere Apparate (Leydener Flaschen Electrometer); 3. leitende oder nichtleitende Hüllen um die Entladungsstrecke; 4. die Zuleitungen zu den Electroden; 5. Theile des Funkenmikrometers (Fussgestell, isolirende Stützen); 6. Stative und Tische.

Was die Einflüsse unter 1 und 2 betrifft, so kann man die Einrichtung leicht so treffen, dass sie unmerklich werden. Bei meinen Versuchen stand die Funkenstrecke nahe in der Scheibenebene der Influenzmaschine mehr als 1 m von derselben entfernt, es hatte keinen Einfluss auf die Entladungspotentiale, ob die eine oder die andere Belegung der Influenzmaschine erregt wurde. Auch von den anderen Apparaten war der Abstand genügend gross.

Der Einfluss von Schutzhüllen um die Funkenstrecke geht aus den Versuchen von Baille und Paschen hervor. Ersterer findet, dass die Schutzhülle das Potential bis zu Schlagweiten von 0,3 cm vermehrt, erheblich, wenn sie von Glas, weniger wenn von Metall. Hr. Paschen fand den Einfluss einer Glasglocke bei kleinen Funkenstrecken gering, bei grossen erheblich im Sinne einer Verkleinerung der Entladungspotentiale. Bei meinen Versuchen war keine Schutzhülle vorhanden; ebensowenig bei den übrigen in Tab. 1—3 angeführten Messungen.

Dass die Zuleitungen die Entladungspotentiale beeinflussen falls sie nicht diametral in Richtung der Entladungsstrecke geführt und nicht hinreichend dünn sind, haben Hr. Paschen und Hr. v. Obermayer gezeigt. Die Zahlen von Paschen in Tab. 1, von Obermayer in Tab. 2 unter 1 und 2 beziehen sich lediglich auf eine verschiedene Dicke bez. Anordnung der Zuleitungen. Auch dieser Einfluss kam bei meinen Versuchen nicht in Betracht.

Wichtiger und schwieriger zu vermeiden sind die Einflüsse 5 und 6 namentlich bei grösseren Electroden und bei Entladungsstrecken, die ihren Durchmesser übertreffen. Meine Messungen unter 1 und 2 in Tab. 2 unterscheiden sich ausser durch die Luftdichte auch durch die Anordnung der Ent-

ladungsstrecke, insbesondere durch ihren Abstand von dem das Funkenmikrometer tragenden Stativ.

Noch deutlicher tritt dieser Einfluss in den folgenden vier, auf gleiche Luftdichte (740 mm, 17°) reducirten Messungsreihen hervor, die sich auf gleiche Electroden von 0,5 cm Radius beziehen.

Tabelle 7.

Entladungspotentiale in c. g. s. Einheiten.

| | $d = 0{,}2$ | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 22. October 1892 | 28,2 | 47,9 | 66,1 | 78,6 | 86,5 | 98,7 | 105,0 | 111,2 |
| 24. „ 1892 | 28,3 | 50,1 | 67,1 | 80,0 | 87,6 | 101,0 | 108,2 | 114,1 |
| 26. „ 1892 | — | 49,2 | 68,0 | 80,8 | 89,4 | 103,4 | 111,0 | 115,1 |
| 11. „ 1892 | 28,4 | 48,7 | 66,2 | 80,0 | 89,3 | 104,5 | 112,8 | 117,5 |

Die ersten drei Reihen unterscheiden sich nur durch die Höhe der Funkenstrecke über dem Stativ (bez. 25, 35 und 43 cm); bei der vierten Reihe war die Anordnung eine andere. Weitere Beispiele werden im folgenden Abschnitt noch gegeben werden.

Ich habe ferner, ähnlich wie früher schon Hr. Righi[1]), viele Versuche über die Influenzwirkung in der Weise angestellt, dass ich bei ungeänderter Aufstellung der Entladungsstrecke influirende Körper (ein Messingblech oder eine Ebonitscheibe) in verschiedenen Lagen und verschiedenen Abständen näherte: Bei Electroden von 1 cm Radius in 1 cm Abstand war kein merklicher Einfluss auf das Entladungspotential zu erkennen, solange der influirende Körper mindestens 10 cm von den Electroden entfernt war. Bei Electroden von 0,5 cm Radius in 2 cm Abstand hingegen war bei viel grösserer Entfernung des influirenden Körpers die Wirkung auf das Entladungspotential noch sehr erheblich.

Namentlich macht sich aber die Influenzwirkung geltend, wenn es sich darum handelt, das Entladungspotential an einer frei in der Luft als Ende einer Zuleitung befindlichen Kugel zu bestimmen, und zwar um so mehr, je grösser der Halbmesser einer solchen Kugel ist. So ergab sich bei einer Kugel von 0,5 cm Radius, wenn auf den der Zuleitung abgewandten Seiten auf mehrere Meter Entfernung kein influirender Körper

1) Righi, N. Cim. (2) **16.** p. 103. 1876.

sich befand, das Entladungspotential 161 c. g. s. Einheiten; durch seitliche Annäherung eines Tisches oder Stativs bis zu Abständen von 100, 60, 40 cm wurde dasselbe nacheinander auf 152, 131, 127 herabgesetzt.

Es lässt sich berechnen, dass das Entladungspotential an einer Kugel vom Radius $r_i$ durch Annäherung einer anderen abgeleiteten Kugel vom Radius $r_a$ bis zum Abstand $d$ um die in der Tabelle 8 enthaltenen Procentzahlen herabgesetzt wird.

Tabelle 8.

Herabsetzung des Entladungspotentiales in Procenten.

| $\frac{d}{r_i}$ | $\frac{r_a}{r_i} = 0,1$ | 0,25 | 1 | 4 | 10 | $\infty$ | concentrische Hohlkugel |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 48,1 | 19,4 | 5,4 | 2,2 | 2,2 | 3,0 | 5,5 |
| 40 | 24,5 | 9,8 | 2,7 | 0,9 | 0,8 | 1,4 | 2,1 |
| 100 | 9,8 | 3,9 | — | — | — | — | — |
| 200 | 5,0 | 2,0 | — | — | — | — | — |

Es geht daraus hervor, dass man namentlich die Influenzwirkungen kleiner Körper, sowie scharfer Ecken und Kanten zu fürchten hat, und dass solche Einflüsse um so schwerer zu vermeiden sind, je grösser die isolirte Kugel ist.

9. *Polare Unterschiede des Entladungspotentials.* Ueberblickt man die verschiedenen Angaben in der Literatur bezüglich des polaren Unterschiedes beim Entladungspotential, so scheint die Existenz eines solchen, bei der grossen Zahl der Beobachter, die ihn festgestellt haben, zweifellos zu sein. Bei eingehender Betrachtung aber findet man so viel Widersprüche in den Angaben, dass die Sache einer weiteren Prüfung bedarf.

Bei Entladung in normaler Luft zwischen gleichen Kugelelectroden, von denen die eine abgeleitet ist, fanden Paschen[1]) und Wesendonck[2]) keinen Unterschied für + und — Entladung, Baille[3]) und Freyberg[4]) nur bei kleinen Electroden und grossen Entladungsstrecken ein grösseres + Entladungs-

1) Paschen, Wied. Ann. **37.** p. 69. 1889.

2) Wesendonck, Wied. Ann. **30.** p. 43; **31.** p. 308. 1887; **38.** p. 222. 1889; **41.** p. 463. 1890.

3) Baille, Ann. chim. et phys. (5) **25.** p. 486. 1882.

4) Freyberg, Wied. Ann. **38.** p. 250. 1889.

potential, ich selbst gelegentlich ein grösseres —, Jaumann[1]) bei kleinen Funkenstrecken ein grösseres +, bei grossen das Umgekehrte, während Righi[2]) zu dem entgegengesetzten Resultate kam. Mach und Doubrava[3]) endlich fanden scheinbar ein grösseres + Entladungspotential; *es stellte sich aber heraus, dass ihr Electrometer infolge von Influenz einer Glaswand für + Spannung einen grösseren Ausschlag gab, als für gleiche — Spannung.*

Bei Entladung zwischen Spitze und abgeleiteter Platte in normaler Luft erhielt Macfarlane[4]) bei kleineren Schlagweiten ein grössers + Entladungspotential, ebenso de la Rue und Müller[5]) und v. Obermayer, während Wesendonck für seine Funken keinen Unterschied feststellen konnte; für Kugel und abgeleitete Platte in normaler Luft, fand Macfarlane bei kleinen Schlagweiten ein grösseres — Potential, bei grossen Schlagweiten keinen Unterschied. Righi ein grösseres +, auch wenn statt der Platte die Kugel abgeleitet war; für zwei verschiedene Kugeln in normaler Luft erhielt ich ein grösseres — Entladungspotential, wenn die grössere Kugel, ein grösseres +, wenn die kleinere Kugel abgeleitet war.

In verdünnter Luft finden zwar G. Wiedemann und Rühlmann[6]), Röntgen[7]) sowie Wesendonck übereinstimmend ein grösseres + Entladungspotential, aber die Untersuchungen des letzteren zeigen auch, *dass die Glaswand der Vacuumgefässe im Sinne einer Erleichterung des Austretens der negativen Electricität wirkt.*

Die Angaben über die Grösse der polaren Unterschiede sind sehr verschieden und schwanken zwischen 1 und 12 Proc.

Wie bereits bemerkt, ergaben nun meine eigenen Versuche ebenfalls gelegentliche polare Unterschiede von übrigens geringer Grösse (1—3 Proc.); es zeigte sich aber auch, dass dieselben um so mehr zurücktraten, je mehr der influirende

---

1) Jaumann, Wien. Ber. (2) **97.** p. 765. 1888.
2) Righi, N. Cim. (2) **16.** p. 97. 1876.
3) Mach u. Doubrava, Wied. Ann. **9.** p. 61. 1880.
4) Macfarlane, Phil. Mag. (5) **10.** p. 389, 1880.
5) de la Rue u. Müller, Phil. Trans. **169.** p. 55. 1878.
6) G. Wiedemann u. Rühlmann, Pogg. Ann. **145.** p. 235. 1872.
7) Röntgen, Göttinger Nachr. 1878 p. 390.

Einfluss, namentlich von Nichtleitern auf die Entladungsstrecke vermieden war. Die beiden in der folgenden Tabelle 9 enthaltenenen Messungsreihen zeigen dies deutlich; sie beziehen sich auf Entladungen zwischen einer isolirten Kugel vom Radius $r_i = 0{,}25$ cm und einer abgeleiteten vom Radius $r_a = 1{,}0$ cm, die sich hauptsächlich dadurch unterschieden, dass bei der zweiten die Glasstütze an der isolirten Electrode entfernt war, und die Entladungsstrecke höher über dem Stative lag.

### Tabelle 9.

Entladungspotentiale in c. g. s. Einheiten.

$r_i = 0{,}25$ cm; $r_a = 1$ cm. 7. October 1892. Bstd. 739. Temp. 16,5°.

| | $d$=0,3 | 0,5 | 0,7 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 6,0 | 20,0 cm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + Entladung | 33,6 | 45.2 | 52,3 | 60.6 | 69,3 | 75,3 | 82,3 | 86,6 | 91,0 | 95,0 |
| − Entladung | 34,1 | 46,1 | 53,7 | 62,3 | 71,3 | 77,4 | 84,6 | 88,4 | 94,0 | 100,1 |
| 13. October 1892. Bstd. 741. Temp. 16°. | | | | | | | | | | |
| + Entladung | 34,5 | 44,2 | 51.0 | 57.9 | 66,0 | 71,7 | 77,9 | 81,2 | 85,3 | 90,9 |
| − Entladung | 33,7 | 45,0 | 52,0 | 60,4 | 68,3 | 72,9 | 78,8 | 81,9 | 85,8 | 90,6 |

Es sind also in der ersten Reihe durch die Influenzwirkung nicht nur die Potentiale überhaupt gesteigert, sondern auch die negativen stärker, als die positiven; während in der zweiten Reihe die positiven Entladungspotentiale im Mittel um 1,3 Proc. kleiner sind, als die negativen, beträgt der Unterschied in der ersteren 2,7 Proc.

Ganz Aehnliches ergibt sich bei gleichen Electroden; die beiden in Tabelle 10 enthaltenen Reihen beziehen sich auf solche von 0,5 cm Radius, und auch hier ist in der ersten die Influenzwirkung die grössere.

### Tabelle 10.

Entladungspotentiale in c. g. s. Einheiten.

$r = 0{,}5$ cm. 10. October 1892. Bstd. 743. Temp. 16°.

| | $d$=0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| + Entladung | 48,9 | 66.5 | 79,4 | 88,0 | 102,3 | 110,9 | 114,6 |
| − Entladung | 49,0 | 66,8 | 80,3 | 89.9 | 103,9 | 112,3 | 117,0 |
| 11. October 1892. Bstd. 746. Temp. 15,5°. | | | | | | | |
| + Entladung | 49,4 | 67,4 | 80,9 | 90,3 | 105,7 | 114,3 | 119.0 |
| − Entladung | 49,2 | 66,6 | 81,1 | 90,5 | 105,9 | 114,2 | 118,8 |

Hier treten polare Unterschiede nur noch in der ersten Reihe und nur bei grösseren Funkenstrecken auf, bei denen sich die Influenzwirkungen auch durch Herabsetzung des Entladungspotentials bemerklich machen. Es ist daher wohl wahrscheinlich, dass die polaren Unterschiede in allen Fällen ganz verschwinden, in denen es gelingt, die Influenzwirkungen fester Dielectrika zu beseitigen oder doch unmerklich zu machen,

In der That findet man auch bei einer frei in der Luft endenden Electrode keinen merklichen polaren Unterschied des Entladungspotentials, sobald man alle influirenden Körper nach Möglichkeit entfernt.[1])

Von diesem Gesichtspunkte aus erklären sich dann auch die widersprechenden Angaben der verschiedenen Beobachter, da der Einfluss der Influenzwirkungen je nach der Natur und Lage des influirenden Körpers sehr verschieden ausfällt.

10. *Das Entladungsgefälle.* Bei meinen früheren Berechnungen des Entladungsgefälles an gleichen Kugelelectroden[2]) hatte ich nach Formeln von W. Thomson und G. Kirchhoff zunächst die mittleren Dichten auf den Kugeln und aus diesen die Gefälle an den Entladungsstellen nach Gleichungen von Plana berechnet.

G. Kirchhoff hat nun auch Reihen angegeben[3]), um die letzteren Grössen direct aus den geometrischen Verhältnissen und den Potentialen zu berechnen, Reihen, die in der ursprünglichen Form zwar den Nachtheil einer schwachen Convergenz haben, sich aber ohne Schwierigkeit in stärker convergirende Reihen umformen lassen.

Es bezeichne $r_i$ den Halbmesser der isolirten, $r_a$ den der abgeleiteten Electrode, $v$ das Potential der ersteren (das Entladungspotential), $d$ die Entladungsweite, $c = d + r_i + r_a$ den Centralabstand der beiden Electroden. Es sind dann die Potentialgefälle an den Entladungsstellen der isolirten und abgeleiteten Electrode nach G. Kirchhoff bez.:

$$g_i = \frac{v\,y_i}{4\pi r_i} \text{ und } g_a = \frac{v\,y_a}{4\pi r_a},$$

1) Vgl. Heydweiller, Wied. Ann. 48. p. 110. 1893.

2) Heydweiller, Wied. Ann. 40. 464. 1890.

3) G. Kirchhoff, Wied. Ann. 27. p. 673. 1886. Ges. Abh. Nachtrag p. 131.

wobei

$$y_i = \frac{(1+\xi_i)^2}{1-\xi_i}\left\{\frac{1}{1-q^2} - \frac{3\,\xi_i}{1-q^6} + \frac{5\,\xi_i^2}{1-q^{10}} - + \ldots\right\}$$

$$y_a = \frac{(1+\xi_a)^2}{1-\xi_a}\left\{\frac{q^2}{\xi_a(1-q^2)} - \frac{3\,q^6}{\xi_a^2(1-q^6)} + \frac{5\,q^{10}}{\xi_a^3(1-q^{10})} - + \ldots\right\}$$

$$q^2 = \frac{2\,r_i\,r_a}{c^2 - r_i^2 - r_a^2 + \sqrt{(c^2 - r_i^2 - r_a^2)^2 - 4\,r_i^2\,r_a^2}}$$

$$\xi_i = \frac{c\,q^2}{r_a + r_i\,q^2} = \frac{1}{2r_i}\left\{\frac{c^2 + r_i^2 - r_a^2}{c} - \sqrt{\left(\frac{c^2 + r_i^2 - r_a^2}{c}\right)^2 - 4r_i^2}\right\}$$

$$\xi_a = \frac{c\,q^2}{r_i + r_a\,q^2} = \frac{1}{2\,r_a}\left\{\frac{c^2 + r_a^2 - r_i^2}{c} - \sqrt{\left(\frac{c^2 + r_a^2 - r_i^2}{c}\right)^2 - 4r_a^2}\right\}$$

Durch einfache Umformungen lassen sich die Reihen für $y_i$ und $y_a$ in die nachstehenden, besser convergirenden verwandeln:

$$y_i = \frac{(1+\xi_i)^2}{1-\xi_i}\left\{\frac{1}{1-q^2} + f(\xi_i) + q^2 f(\xi_i\,q^4) + q^4 f(\xi_i\,q^8) + \ldots\right\},$$

$$y_a = \frac{(1+\xi_a)^2}{1-\xi_a}\frac{q^2}{\xi_a}\left\{\frac{1}{1-q^2} + f\left(\frac{q^4}{\xi_a}\right) + q^2 f\left(\frac{q^8}{\xi_a}\right) + q^4 f\left(\frac{q^{12}}{\xi_a}\right) + \ldots\right\},$$

wobei:

$$\frac{5\,x^2 - 3\,x - x^3 - x^4}{(1-x^2)^2} = f(x)$$

gesetzt ist.

Für zwei gleiche Kugelelectroden $r_i = r_a = r$ ergibt sich:

$$\xi_i = \xi_a = q = \frac{1}{2}\left\{\frac{c}{r} - \sqrt{\frac{c^2}{r^2} - 4}\right\}$$

$$y_i = \frac{(1+q)^2}{1-q}\left\{\frac{1}{1-q^2} + f(q) + q^2 f(q^5) + q^4 f(q^9) + \ldots\right\}$$

$$y_a = \frac{(1+q)^2}{1-q}\,q\left\{\frac{1}{1-q^2} + f(q^3) + q^2 f(q^7) + q^4 f(q^{11}) + \ldots\right\}.$$

Für kleine Werthe von $\delta = d/r$ (bis 0,2) kann man nach Schuster[1]) setzen:

---

1) Schuster, Phil. Mag. (5) **29.** 1890. p. 182, woselbst sich auch Berechnungen des Entladungsgefälles, aber nur für die isolirte Electrode, finden. Die Schuster'sche Gleichung für kleine Schlagweiten ist genauer,

$$g_i = g_a = \frac{v}{d}\left\{1 + \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{45}\delta^2 + \frac{73}{53760}\delta^3 + \ldots\right\}.$$

Für eine Kugel gegenüber einer abgeleiten Platte ($r_a = \infty$) im Abstande $d$ ist, falls die letztere so gross, dass man den Einfluss ihres Randes vernachlässigen kann:

$$q^2 = \frac{r_i + d - \sqrt{(r_i + d)^2 - r_i^2}}{r_i}, \ \xi_i = q^2, \ \xi_a = 1$$

und

$$y_i = \frac{(1 + q^2)^2}{1 - q^2}\left\{\frac{1}{1 - q^2} + f(q^2) + q^2 f(q^6) + q^4 f(q^{10}) + \ldots\right\},$$

$$y_a = \frac{4 q^2 r_a}{\sqrt{(r_i + d)^2 - r_i^2}}\left\{\frac{1}{1 - q^2} + f(q^4) + q^2 f(q^8) + q^4 f(q^{12}) + \ldots\right\}.$$

Die gleichen Dichten auf Kugel und Platte, wie im vorigen Fall, erhält man, wenn erstere abgeleitet und letztere isolirt ist.

In Tabelle 11 ist eine Anzahl Werthe von $g_i r / v$, $g_a r / v$ und $(g_i + g_a) r / v$ für gleiche Kugelelectroden zusammengestellt. Dieselbe enthält gegenüber der Tabelle 3 der früheren Arbeit [1]) einige Erweiterungen und Verbesserungen.

Berechnet man mit Hülfe dieser Zahlen für gleiche Kugelelectroden das „mittlere Entladungsgefälle“ $^1/_2 (g_i + g_a)$, so erhält man, wie ich früher gezeigt habe, von kleinen Schlagweiten abgesehen, nahezu den gleichen von der Schlagweite unabhängigen Werth, der sich nur mit der Grösse der Electroden ändert. Umgekehrt kann man aus diesem Werthe des mittleren Entladungsgefälles und dem Kugelradius $r$ mit Hülfe der Tabelle 11 auch die Entladungspotentiale berechnen. Dies habe ich für drei Electrodengrössen $r = 1,0$, $0,5$ und $0,25$ cm ausgeführt, und die so erhaltenen Werthe unter $v$ ber. mit den beobachteten unter $v$ beob. in den Tabellen 12—14 zusammengestellt.

---

als die früher von mir benutzte Plana'sche Näherungsformel, daher meine früheren Zahlen einige kleine Correcturen erfahren haben. Auch Hr. Lera (Rend. Linc. (4) 7. (2) p. 385, 1891) hat Berechnungen des Entladungsgefälles angestellt; in seinen Schlussfolgerungen verwechselt er dieses („forza elettrica“) mit der im Dielectricum wirkenden Spannung, die dem Quadrat desselben proportional ist.

1) Heydweiller, Wied. Ann. 40. p. 474. 1890.

## Tabelle 11.

**Zur Berechnung der Entladungsgefälle $g_i$ und $g_a$ bei gleichen Kugelelectroden vom Radius $r$ im Abstad $d$.**

| $\delta = \frac{d}{r}$ | $\frac{g_i r}{v}$ | $\frac{g_a r}{v}$ | $\frac{(g_i + g_a) r}{v}$ | $\delta = \frac{d}{r}$ | $\frac{g_i r}{r}$ | $\frac{g_a r}{v}$ | $\frac{(g_i + g_a) r}{v}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,02 | 50,33 | | 100,66 | 1,50 | 1,272 | 0,806 | 2,078 |
| 0,03 | 33,67 | | 67,34 | 1,60 | 1,245 | 0,755 | 2,000 |
| 0,04 | 25,34 | | 50,68 | 1,80 | 1,201 | 0,671 | 1,872 |
| 0,05 | 20,34 | | 40,68 | 2,00 | 1,170 | 0,601 | 1,771 |
| 0,06 | 17,00 | | 34,00 | 2,20 | 1,145 | 0,544 | 1,689 |
| 0,07 | 14,61 | | 29,22 | 2,40 | 1,124 | 0,497 | 1,621 |
| 0,08 | 12,84 | | 25,68 | 3,00 | 1,084 | 0,392 | 1,476 |
| 0,09 | 11,44 | | 22,88 | 4,00 | 1,050 | 0,288 | 1,338 |
| 0,10 | 10,34 | | 20,68 | 4,80 | 1,036 | 0,237 | 1,273 |
| 0,20 | 5,346 | 5,338 | 10,684 | 6,00 | 1,024 | 0,186 | 1,210 |
| 0,30 | 3,687 | 3,658 | 7,345 | 8,00 | 1,016 | 0,137 | 1,153 |
| 0,40 | 2,876 | 2,810 | 5,686 | 10,00 | 1,009 | 0,108 | 1,117 |
| 0,50 | 2,398 | 2,292 | 4,690 | 12,00 | 1,006 | 0,089 | 1,095 |
| 0,60 | 2,089 | 1,940 | 4,029 | 16,00 | 1,004 | 0,066 | 1,070 |
| 0,80 | 1,723 | 1,485 | 3,208 | 20,00 | 1,002 | 0,052 | 1,054 |
| 1,00 | 1,517 | 1,200 | 2,717 | 24,00 | 1,002 | 0,043 | 1,045 |
| 1,20 | 1,390 | 1,006 | 2,396 | 40,00 | 1,001 | 0,026 | 1,027 |
| 1,40 | 1,305 | 0,864 | 2,169 | | | | |

Die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen ist im allgemeinen eine befriedigende. Nur bei den grösseren Electroden und grossen Entladungsweiten sind erheblichere Abweichungen vorhanden.

## Tabelle 12—14.

**Entladungspotentiale in c. g. s. Einheiten bei gleichen Kugelelectroden vom Radius $r$ cm im Abstande $d$ cm.**

| $r = 1{,}0$ Bstd. 744 mm, Temp. 17° $\frac{1}{2}(g_i + g_a) = 140$ | | | $r = 0{,}5$ Bstd. 746 mm, Temp. 15,5° $\frac{1}{2}(g_i + g_a) = 160$ | | | $r = 0{,}25$ Bstd. 744 mm, Temp. 16,5° $\frac{1}{2}(g_i + g_a) = 182$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d$ | $v$ beob. | $v$ ber. | $d$ | $v$ beob. | $v$ ber. | $d$ | $v$ beob. | $v$ ber. |
| 0,2 | 27,2 | 26,2 | 0,2 | 28,7 | 28,1 | 0,2 | 27,8 | 28,3 |
| 0,3 | 38,3 | 38,2 | 0,4 | 49,3 | 49,8 | 0,4 | 45,4 | 45,5 |
| 0,4 | 48,6 | 49,3 | 0,6 | 67,0 | 66,9 | 0,6 | 57,2 | 56,1 |
| 0,5 | 58,7 | 59,7 | 0,8 | 81,0 | 80,0 | 0,8 | 63,5 | 63,1 |
| 0,6 | 68,5 | 69,5 | 1,0 | 90,4 | 90,3 | 1,0 | 67,8 | 68,0 |
| 0,8 | 87,1 | 87,4 | 1,5 | 105,8 | 108,3 | 1.5 | 74,3 | 75,2 |
| 1,0 | 104,9 | 103,2 | 2,0 | 114,2 | 119,6 | 2,0 | 77,7 | 78,9 |
| 1,2 | 119,0 | 117,0 | 2,4 | 118,9 | 125,7 | 3,0 | 81,2 | 83,1 |
| 1,5 | 134,2 | 184,7 | ∞ | 159,4 | 160,0 | 4.0 | 83,3 | 85,0 |
| 2,0 | 151,6 | 158,1 | | | | 6,0 | 86,0 | 87,1 |
| 2,4 | 161,7 | 172,7 | | | | 20,0 | 92,1 | 89,9 |

Dies ist aber auch nicht anders zu erwarten, da in diesen Fällen infolge von Influenzwirkungen die Vertheilung der Electricität auf den Kugeln eine andere ist, als bei der Berechnung vorausgesetzt wurde. Vergleicht man in der That die Zahlen von Tab. 13 mit denen in Tab. 7, p. 223, so sieht man, dass die Unterschiede zwischen beobachteten und berechneten Werthen um so grösser sind, je stärker die auftretenden Influenzwirkungen waren. Ich betone ferner, dass das Gesetz von der Constanz des mittleren Entladungsgefälles sich nur für den Beginn der ersten Entladung, nicht für Funkenpotentiale bestätigt (vgl. p. 220). Bemerkenswerth ist, dass die vorliegenden Messungen die Schlussfolgerung, welche ich schon früher in Bezug auf das Maximalpotential frei in der Luft befindlicher Kugeln gezogen hatte[1]), für Kugeln von 0,5 und 0,25 cm Radius bestätigen. Die Zahlen, welche meine Messungen jetzt ergeben haben, weichen nur um wenige Procente von den früher berechneten ab (vgl. die Zahlen für $d = \infty$ in Tab. 13, für $d = 20$ in Tab. 14).

Es geht daraus hervor, dass das wahre Schlagweitengesetz weder parabolische, noch hyperbolische oder logarithmische Form haben kann, da alle solche Formen ein mit der Schlagweite ins Unendliche wachsendes Entladungspotential ergeben, während in Wirklichkeit das letztere sich mit zunehmender Schlagweite asymptotisch einem Maximalwerthe nähert. Jene Schlagweitengesetze können daher lediglich die Bedeutung empirischer Interpolationsformeln haben, und es ist durchaus unzulässig, mit ihrer Hülfe durch Extrapolation hohe Spannungen aus den Schlagweiten zu bestimmen. Solche Schätzungen können Werthe ergeben, die nicht einmal der Grössenordnung nach richtig sind.

So ist es eine gewaltige Ueberschätzung, wenn Hr. E. Thomson[2]) bei seinen Versuchen mit hochgespannten Wechselströmen aus Schlagweiten von 80 cm Länge zwischen mässig grossen Electroden (etwa 1—2 cm Krümmungsradius nach der Zeichnung) auf eine Spannung von 500 000 Volt schliesst. Bei einer solchen Spannung würden sich Kugeln

1) Heydweiller, Wied. Ann. **40.** p. 478. 1890.

2) E. Thomson, Electrotechn. Zeitschr. **13.** p. 415. 1892; Lum. él. **44.** p. 240. 1892.

von 16 cm Durchmesser in beliebigem Abstande von jedem influirenden Körper frei in die Luft entladen, in geschlossenen Räumen aber noch weit grössere Kugeln. In Wirklichkeit dürfte eine Spannung von etwa 100 000 Volt zur Erzielung der Thomson'schen Entladungen mehr als genügend sein; wahrscheinlich ist auch das noch zu hoch gegriffen.

Wenngleich, wie schon bemerkt, die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und berechneten Potentialwerthen in Tab. 12—14 im allgemeinen eine befriedigende ist, so treten doch Abweichungen von einigen Procenten auf, die nicht auf Beobachtungsfehlern zu beruhen scheinen, und die eine gewisse von der Entladungsstrecke und dem Radius der Electroden abhängige Periodicität zeigen. Besser als aus den obigen ist dieselbe aus den früher mitgetheilten Tabellen[1]) ersichtlich. Das mittlere Entladungsgefälle in der vorletzten Spalte dieser Tabellen weist in allen ein ausgesprochenes Minimum auf, das für den Radius $r = 1,0$ bei der Entladungsstrecke 0,6 cm, für $r = 0,5$ bei 0,3 cm, für $r = 0,25$ bei 0,15 cm liegt; darauf steigt dasselbe bis zu einem Maximum, dem für die kleinsten Electroden ein zweites Minimum bei 0,9 cm Entladungsstrecke folgt. Mir scheinen hierin Andeutungen von Schwingungen zu liegen, die, etwa durch den unregelmässigen Gang der Influenzmaschine veranlasst, in der isolirten Electrode entstehen und sich mit einer bei wachsender Schlagweite zunehmenden Phasenverschiebung auf die abgeleitete Electrode übertragen; die Wirkung derselben muss eine Herabsetzung des Entladungspotentials sein, die um so stärker ist, je mehr die Phasenverschiebung einer halben Periode entspricht; bei der Kleinheit der letzteren würde es sich nur um Eigenschwingungen der kugelförmigen Electroden handeln können, womit übereinstimmt, dass die Wellenlänge dem Radius derselben proportional zu sein scheint.

11. *Entladungen zwischen ungleichen Kugelelectroden.* Das mittlere Entladungsgefälle bei gleichen Kugelelectroden wächst mit der Krümmung derselben. Es liegt die Frage nahe, wie es sich bei Electroden von verschiedener Krümmung verhält; es ist nicht anzunehmen, dass es auch hier von der Schlag-

1) Heydweiller, Wied. Ann. 40. p. 475. Tab. 4—6. 1892.

weite unabhängig ist. Zur Untersuchung dieser Frage habe ich eine Anzahl Entladungspotentiale für Kugelelectroden von 0,25 cm und 1,0, bez. 2,5 cm Radius gemessen und die Entladungsgefälle nach den Gleichungen des vorigen Abschnittes berechnet. Tab. 15—18 enthalten die Ergebnisse. $r_i$ ist wieder der Radius der isolirten, $r_a$ der der abgeleiteten Electrode in Centimetern; ebenso sind $g_i$ und $g_a$ die Entladungsgefälle an der isolirten, bez. abgeleiteten Electrode. Auch bei diesen Messungen machten sich Influenzwirkungen bemerklich. Das mittlere Entladungsgefälle liegt zwischen den Werthen, die der Krümmung jeder der Electroden entsprechen würden und nähert sich erst für grosse Entladungsweiten allmählich dem für die isolirte Electrode geltenden Werthe.

Tabellen 15—18.

**Entladungspotentiale $v$ in c. g. s. Einheiten und Entladungsgefälle $g$ bei ungleichen Electroden.**

13. October 1892.
$r_i = 0{,}25$, $r_a = 1{,}0$, Bstd. 741, Temp. 16°

| $d$ | $v$ | $g_i$ | $g_a$ | $\frac{1}{2}(g_i + g_a)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,3 | 34,1 | 213,4 | 98,2 | 155,8 |
| 0,5 | 44,6 | 226,7 | 63,1 | 144,9 |
| 0,7 | 51,5 | 240,6 | 46,5 | 143,5 |
| 1,0 | 59,2 | 260,6 | 32,9 | 146,7 |
| 1,5 | 67,1 | 283,2 | 21,4 | 152,3 |
| 2,0 | 72,3 | 299,4 | 15,6 | 157,5 |
| 3,0 | 78,3 | 319,1 | 9,9 | 164,5 |
| 4,0 | 81,5 | 329,9 | 7,1 | 168,5 |
| 6,0 | 85,5 | 343,0 | 5,7 | 174,3 |
| 20,0 | 90,7 | 362,8 | — | 181,4 |

8. October 1892.
$r_i = 1{,}0$, $r_a = 0{,}25$, Bstd. 741, Temp. 16°.

| $d$ | $v$ | $g_i$ | $g_a$ | $\frac{1}{2}(g_i + g_a)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,3 | 35,8 | 106,1 | 205,7 | 155,9 |
| 0,5 | 48,8 | 91,5 | 205,2 | 148,3 |
| 0,7 | 59,3 | 88,3 | 201,7 | 144,0 |
| 1,0 | 73,4 | 92,1 | 196,8 | 144,9 |
| 1,5 | 93,7 | 104,7 | 187,4 | 146,0 |
| 2,0 | 111,1 | 118,5 | 177,6 | 148,0 |

3. October 1892.
$r_i = 0{,}25$, $r_a = 2{,}5$, Bstd. 745, Temp. 17°

| $d$ | $v$ | $g_i$ | $g_a$ | $\frac{1}{2}(g_i + g_a)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,5 | 43,0 | 225,0 | 52,4 | 138,7 |
| 0,75 | 50,0 | 236,6 | 33,7 | 135,1 |
| 1,0 | 55,1 | 248,4 | 24,0 | 136,2 |
| 1,5 | 62,6 | 269,0 | 14,6 | 141,8 |
| 2,0 | 67,7 | 284,4 | 10,1 | 147,2 |
| 3,0 | 74,3 | 305,5 | 6,0 | 155,7 |
| 4,0 | 78,8 | 321,0 | 4,1 | 162,5 |
| 5,0 | 81,7 | 331,2 | 3,1 | 167,1 |
| 7,0 | 85,0 | 342,7 | 2,0 | 172,3 |
| 15,0 | 90,1 | 360,4 | | 180,2 |

4. October 1892.
$r_i = 2{,}5$, $r_a = 0{,}25$, Bstd. 745, Temp. 17°.

| $d$ | $v$ | $g_i$ | $g_a$ | $\frac{1}{2}(g_i + g_a)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,25 | 30,8 | 96,6 | 210,9 | 153,7 |
| 0,5 | 44,1 | 60,6 | 216,4 | 138,5 |
| 0,75 | 53,0 | 47,5 | 216,5 | 134,7 |
| 1,0 | 60,9 | 42,5 | 219,6 | 131,0 |
| 1,5 | 73,3 | 39,5 | 219,0 | 129,2 |
| 2,0 | 86,3 | 41,3 | 222,1 | 131,7 |
| 3,0 | 107,7 | 47,2 | 219,0 | 133,1 |

12. *Schlussbemerkungen.* Werfen wir einen Blick zurück auf die Zahlen in Tab. 1—3, so ist es zweifellos, dass ein guter Theil der Unterschiede im Betrage von mehreren Procenten auf Rechnung verschiedener Luftdichte zu setzen ist. Leider finden sich nur bei Baille und Paschen summarische Angaben über Barometerstand und Temperatur.

Die Beobachtungen von Baille und Freyberg dürften der angewandten Methoden halber (directer Vergleich mit der absoluten Electrometerwaage, bez. galvanometrische Bestimmung) mit grösserer Unsicherheit behaftet sein; dafür sprechen die erheblichen Unterschiede, die Hr. Baille mit verschiedenen Electrometerjustirungen erhielt (bis zu 5 Proc.), sowie der unregelmässige Verlauf von Freyberg's Curven (vgl. p. 215). Was insbesondere Hrn. Freyberg's Messungen mit kleinen Electroden und grossen Schlagweiten betrifft, so beziehen sich dieselben vielleicht nicht auf Entladungspotentiale, da möglicherweise dem Funkenübergange eine Büschelentladung vorausgegangen ist; für die Entladung zwischen Spitzen gibt Hr. Freyberg dies ausdrücklich an.

Die Entladungspotentiale für grosse Entladungsstrecken hängen ausserdem wesentlich von der Anordnung und Aufstellung des Funkenmikrometers ab; Influenzwirkungen können hier Unterschiede von 10 Proc. und mehr bedingen.

Sehr gut ist die Uebereinstimmung zwischen Hrn. Paschen's Messungen und den meinigen; die Unterschiede betragen unter Berücksichtigung der verschiedenen Luftdichte nur in einzelnen Fällen mehr als 1 Proc., im Mittel aber nur 0,7 Proc.

Zum Schlusse gebe ich in Tab. 19 für den Gebrauch bei Aichungen noch eine Reihe von Werthen des Entladungspotentials zwischen gleichen Kugelelectroden vom Radius $r$ cm für Schlagweiten $d$ cm, bei denen unter Verwendung eines zweckmässig angeordneten Funkenmikrometers (vgl. p. 216) merkliche Influenzwirkungen nicht zu fürchten sind. Dieselben beziehen sich auf eine Dichte der Luft von 745 mm Barometerstand und 18° C. und sind für je 8 mm Druckvermehrung oder 3° Temperaturverminderung um je 1 Proc. zu erhöhen.

Tabelle 19.

Entladungspotentiale $v$ in c. g. s. Einheiten (e. s. M.) bei gleichen Kugelelectroden vom Radius $r$ cm.

Bstd. 745 mm, Temp. 18°.

| $r$ = 2,5 cm | | $r$ = 1,0 cm | | $r$ = 0,5 cm | | $r$ = 0,25 cm | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d$ cm | $v$ | $d$ cm | $v$ | $d$ cm | $v$ | $d$ cm | $v$ |
| 0,5 | 61,2 | 0,1 | 15,7 | 0,1 | 16,0 | 0,1 | 16,1 |
| 0,6 | 72,0 | 0,2 | 27,0 | 0,2 | 27,9 | 0,2 | 27,9 |
| 0,7 | 81,8 | 0,3 | 37,9 | 0,3 | 37,9 | 0,3 | 37,8 |
| 0,8 | 91,1 | 0,4 | 48,3 | 0,4 | 48,5 | 0,4 | 45,9 |
| 0,9 | 100,3 | 0,5 | 58,3 | 0,5 | 57,7 | 0,5 | 52,4 |
| 1,0 | 109,5 | 0,6 | 67,9 | 0,6 | 66,4 | 0,6 | 57,3 |
| 1,1 | 118,6 | 0,7 | 77,5 | 0,7 | 73,5 | 0,7 | 61,0 |
| 1,2 | 127,7 | 0,8 | 86,8 | 0,8 | 80,3 | 0,8 | 63,4 |
| 1,3 | 136,7 | 1,0 | 104,3 | 0,9 | 85,3 | 1,0 | 67,3 |
| 1,4 | 145,6 | 1,2 | 118,3 | 1,0 | 90,0 | 1,5 | 74.4 |
| 1,5 | 154,1 | 1,4 | 128,8 | | | | |
| 1,6 | 162,2 | 1,6 | 137,6 | | | | |

Mit der Genauigkeit von 1 Proc., mit der sich diese Werthe aus den Beobachtungen Paschen's und den meinigen ergeben, dürften sie den praktischen Anforderungen in den meisten Fällen genügen und auch an der Grenze angelangt sein, welche bei derartigen Messungen erreichbar ist.

Würzburg, December 1892.

## II. *Modificirtes astatisches Galvanometer; von H. E. J. G. du Bois und H. Rubens.*

### § 1. Einleitung.

Obwohl die constructive Entwickelung empfindlicher Galvanometer eine weit fortgeschrittene ist, findet man doch unter den bisher üblichen Constructionstypen nur wenige, die der Grenze der mit den jetzigen Mitteln erreichbaren Empfindlichkeit nahekommen und gleichzeitig eine mannigfache Verwendung zulassen. Es erschien uns daher wünschenswerth, die Construction eines neuen Modells in allen Einzelheiten durchzuführen, wobei uns langjährige Erfahrungen mit den verschiedensten Galvanometerformen zu statten kamen. Da das Resultat unserer auf dieses Ziel gerichteten Bemühungen ein über unser Erwarten günstiges war, gestatten wir uns das Instrument an dieser Stelle zu beschreiben und einige damit ausgeführte Versuchsreihen mitzutheilen.[1] Die Eigenschaften, die zu erreichen wir in erster Linie anstrebten, waren möglichste Empfindlichkeit, Erschütterungslosigkeit, bequeme Handhabung, allgemeine Verwendbarkeit.

Von den Hrn. Ayrton, Mather und Sumpner[2] ist vor einiger Zeit eine werthvolle Abhandlung nebst tabellarischer Uebersicht über die Leistungen der verschiedensten Galvanometer erschienen, welche uns von grossem Nutzen war. Wir haben einige der von jenen Physikern gemachten Vorschläge verwerthet und werden uns auch bei der Besprechung der Leistungen unseres Instrumentes an die dort innegehaltene Betrachtungsweise anschliessen.

Noch wollen wir erwähnen, dass neuerdings im hiesigen Institute von Hrn. Snow ein Galvanometer von hoher Empfindlichkeit (nach der später § 7 zu gebenden Definition, ausgedrückt durch die Zahlen $\mathfrak{S}_s = 600$[3] bis $\mathfrak{S}_s = 900$[4]) eigenhändig angefertigt worden ist. Dieser Apparat ist naturgemäss für

1) Das Galvanometer wurde der physik. Gesellsch. zu Berlin in der Sitzung vom 17. Juni 1892 beschrieben und vorgeführt (Verhandl. p. 54, 1892).

2) Ayrton, Mather und Sumpner, Phil. Mag. (5). **30.** p. 58. 1890.

3) Nach Rubens und Snow, Wied. Ann. **46.** p. 531. 1892.

4) Nach Snow, Wied. Ann. **47.** p. 213. 1892.

die fabrikmässige Herstellung, geschweige denn für den Transport, weder beabsichtigt noch geeignet; man hat eben für diesen Fall ganz andere constructive Anforderungen zu berücksichtigen. Wir haben die Empfindlichkeit des Snow'schen Galvanometers nur eben erreicht. Letzteres ist also immerhin ein bemerkenswerthes Beispiel dafür, wie man sich im Laboratorium selbst helfen kann, wofern es an Geschicklichkeit und verfügbarer Zeit nicht mangelt.

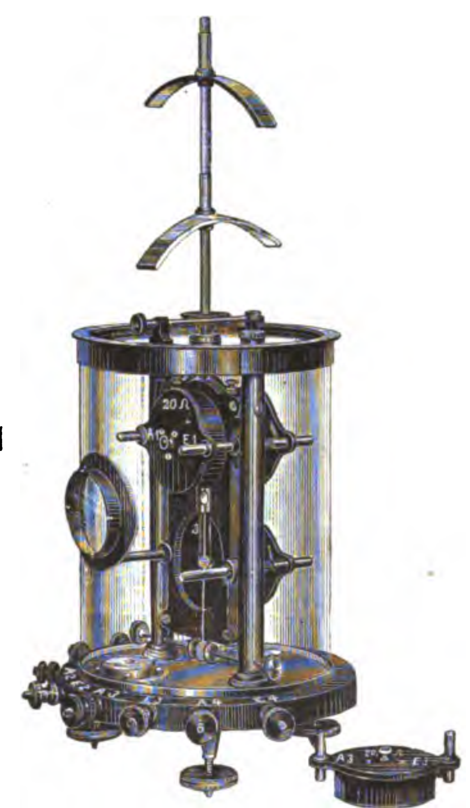


Fig. 1.

§ 2.

**Allgemeine Anordnung.**

Unser Instrument lehnt sich in seiner Anordnung (siehe Fig. 1) an die Form an, die seit den astatischen Galvanometern Lord Kelvin's typisch geworden ist. Wir haben uns dabei nicht bemüht dem Apparate eine besonders compendiöse Form zu verleihen, wie sie etwa bei tragbaren Galvanometern erwünscht sein könnte. Durch geringe Aenderungen liesse sich aber auch diese Bedingung erfüllen, da die wesentlichen Theile nur geringen Raum beanspruchen. Die Basis bildet eine dicke matt geschliffene Hartgummischeibe auf drei Stellschrauben; sie trägt acht Doppelklemmschrauben, welche der Reihenfolge nach mit $A_1$ $E_1$ $A_2$ $E_2$ $A_3$ $E_3$ $A_4$ $E_4$ bezeichnet sind; sie entsprechen den acht Anfängen und Enden der vier Spulen. Durch geeignete Verbindungen lassen sich alle denkbaren Schaltcombinationen mit

oder ohne Nebenschlüsse bewerkstelligen. Nebst einer Libelle und einem Schwefelsäure- (oder Chlorcalcium-) Gefäss trägt die Grundplatte zwei hohe Messingsäulen. Auf diese ist die Deckplatte mit je einer kurzen, leicht zu entfernenden Kordenschraube befestigt.

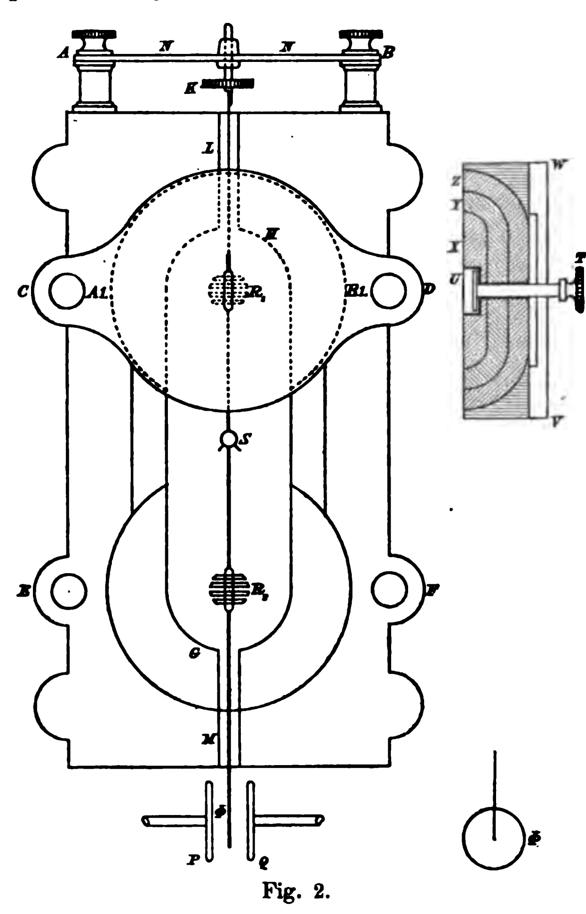


Fig. 2.

Auf einem in der Mitte des Deckels emporragenden kurzen Stift lässt sich eine längere verticale Hülse schieben, auf der zwei Richtmagnete, ein schwererer und ein leichterer, drehbar sich entlang bewegen lassen. [1]) Die feinere Azimuthstellung der Magnete wird, wie üblich, mittels anfedernder Tangentialschraube bewirkt. Ein Glascylinder mit geneigtem Fenster lässt sich aufstülpen bezw. abheben, ohne die Richtmagnete zu berühren, d. h. die Astasirung und Einstellung zu gefährden, ein Vortheil gegenüber der üblichen Construction,

1) Bei den Richtmagneten sowie bei denen der einzuhängenden Magnetsysteme ist das nach Norden [resp. Süden] zeigende Ende roth [resp. blau] lackirt, in Uebereinstimmung mit der in England herrschenden Gewohnheit.

bei welcher Glasglocke, Deckel und Richtmagnete starr verbunden sind.

Zwischen den Tragsäulen befindet sich eine verticale dicke Hartgummiplatte von der in Fig. 2 dargestellten Gestalt, welche den Htheilen des Instrumentes Halt gewährt. Sie ist in der Mitte von dem verticalen Schlitze $\overline{GH}$ durchbrochen; dieser lässt dem hängenden Magnet-Systeme freien Spielraum und seine Ränder sind von demselben so weit entfernt, dass eine Einwirkung etwaiger electrostatischer Ladungen nicht zu befürchten ist.[1] Bei $L$ und $M$ ist der Hartgummi ungefähr bis zur Mitte eingefurcht, sodass die übrig bleibenden Verbindungsstücke dem Ganzen noch genügenden Halt geben. Ferner sind zu beiden Seiten der Platte je zwei kreisförmige Einsenkungen offen gelassen, welche den Windungen der Spulen Raum gewähren. Zwischen diesen beträgt die Dicke des Hartgummis nur noch 2 mm; es ist dies daher die Minimaldistanz der Windungen.

Auf der Hartgummiplatte befinden sich zwei Ansätze $A$ und $B$; um letzteren dreht sich eine kleine Querbrücke $N$. In ihrer Mitte lässt sich das Knöpfchen $K$ von der unteren Seite her mit etwas Reibung einstecken; an das untere Ende von $K$ wird der das Magnetsystem tragende Suspensionsfaden befestigt. Indem man die Schraube bei $A$ löst, und $N$ um $B$ nach vorne dreht, kommt das ganze System in eine freie leicht zugängliche Lage, eine Einrichtung die sich als sehr praktisch bewährt hat.

Sämmtliche Theile der Galvanometer werden nach Leeren oder Schablonen angefertigt, sodass Zusatz oder Ersatz neuer sofort passender Theile ermöglicht ist. Die Instrumente werden lackirt oder vernickelt; die magnetischen Eigenschaften des äusserst dünnen Nickelüberzuges sind nicht hinderlich, solange er nur feste Theile bedeckt, wofür Sorge getragen ist.

Endlich trägt die Platte bei $C$, $D$, $E$ und $F$ acht Gleitcontactstifte, die mit den oben erwähnten acht Klemmschrauben einzeln verbunden sind, und von denen nach hinten und vorne je vier horizontal herausragen.

1) Uebrigens kann man sich vor solchen Wirkungen schützen, indem man die betreffenden dielectrischen Flächenstücke leicht broncirt und die Broncirung mit den übrigen Metalltheilen leitend verbindet.

### § 3. Spulen.

Die Spulen sind an jeder Seite mit einer, ihrer Axe parallelen federnden Hülse versehen, welche auf die zuletzt erwähnten Contactstifte geschoben werden kann; die Einzelheiten dürften aus Fig. 1 und 2 zur Genüge ersichtlich sein. Da die beiden Hülsen ihrerseits mit den Enden der Windungen verbunden sind, wird durch das Aufschieben auf die Stifte der Contact ohne Weiteres vermittelt. Dieser Gleitcontact vernickelter Flächen ist ein völlig genügender, da er sich selbst rein hält; sein Widerstand wird gegen denjenigen der Spulen, der mindestens 20 Ohm beträgt, stets verschwinden. Zum Ueberfluss können die Hülsen noch mit geeigneten Muttern versehen werden, welche sie fest um die Stifte pressen; nöthig ist dies nicht.[1])

Die beschriebene Art, die Spulen einfach aufzuschieben, bietet das bequemste Mittel sie auszutauschen oder zu entfernen. Ausserdem kann man die Empfindlichkeit auf den zehnten Theil verringern, indem man die Spulen nicht ganz an ihren Platz schiebt, sondern möglichst entfernt voneinander belässt. Auch für die Justirung bei Differentialschaltung bietet die beschriebene Befestigungsart naheliegende Vorzüge.

In Fig. 2 rechts oben ist eine Spule im Querschnitt dargestellt. Wir haben uns bei der Wahl der äusseren und inneren Begrenzungsflächen der Windungen, sowie der Grenzflächen zwischen Windungslagen verschiedener Drahtdicke soweit an die Vorschriften der Theorie[2]) gehalten, als dies mit einer rationellen Windungstechnik vereinbar war. Die Windungen bestehen danach aus drei bis vier Lagen $X$, $Y$, $Z$ von zunehmender Drahtdicke; sie werden durch einen geeigneten Isolirkitt zusammengehalten; nur die Aussenfläche lehnt sich an eine Hartgummiplatte $\overline{VW}$ an, welche auch die obenerwähnten Contacthülsen trägt. Etwaige electrostatische La-

1) Als Beleg für die Güte derartiger Contacte mag hier angeführt werden, dass sie bei Bolometerwiderständen häufig benutzt werden. Auch dort erweisen sie sich als durchaus zuverlässig, obwohl Aenderungen des Uebergangswiderstandes um weniger als ein Mikrohm ihre Verwendung ausschliessen würden.

2) Vgl. Maxwell, Treatise 2. Ed. 2. §§ 717—720. Ayrton, Mather & Sumpner, l. c. p. 66.

dungen des Hartgummis können durch die metallischen Windungen hindurch störende Wirkungen auf das bewegliche System nicht ausüben. Mit Rücksicht auf dieselbe Art der Störung ist die übrige Oberfläche der im Isolirkitt eingebetteten Windungen mit Calicotstoff, einem Halbleiter, beklebt.

Den Widerstand der Spulen haben wir für gewöhnlich auf 20 oder 2000 Ohm normirt. Ein Galvanometer mit je einem Spulensatz niedrigen und hohen Widerstandes lässt sich daher durch Anwendung der drei möglichen Schaltungsarten eines jeden vollständigen Satzes von vier Spulen mit 5, 20, 80, 500, 2000 oder 8000 Ohm Widerstand benutzen; dies genügt für die meisten Zwecke vollkommen. In Anbetracht des relativ niedrigen Maximalwiderstandes von 8000 Ohm ist von der Anwendung der äussersten Isolirmaassregeln Abstand genommen; werden doch diese erst bei weit höheren Spulenwiderständen erforderlich.[1])

In dem für die Bewegung des Magnetsystems frei gelassenen Raume *v* lässt sich ein Dämpferscheibchen nähern oder entfernen. Zu diesem Zwecke ist es mittels durchgehenden Stiftes mit dem von aussen zu handhabenden Knöpfchen *T* verbunden. Die zuletzt genannten Theile bestehen aus eisenfreiem electrolytischem Kupfer; indessen spielt die Luftdämpfung eine weit grössere Rolle als die durch Inductionsströme in jenen Scheibchen bedingte. Mittels der beschriebenen regulirbaren Dämpfungsvorrichtung lässt sich jedes beliebige Decrement bis zur Aperiodicität leicht erhalten.

### § 4. Zur Erschütterungslosigkeit hängender Systeme.

Die wenigsten Physiker sind in der Lage, über völlig erschütterungslose Laboratorien zu verfügen und bekanntlich ist ein solcher idealer Zustand innerhalb eines städtischen Weichbildes überhaupt ausgeschlossen. Wir haben uns daher, wie schon anfangs bemerkt, besonders bemüht, den Einfluss der unvermeidlichen äusseren Erschütterungen auf das geringste Maass zu beschränken, wenigstens insoweit er den Beobachtungen nachtheilig werden kann. Letzteres nun ist offenbar nur dann der Fall, wenn der Spiegel sich um die Verticalaxe dreht. Drehungen um eine der Scale parallele Horizontalaxe

1) Vgl. Ayrton, Mather & Sumpner l. c. p. 71.

äussern sich nur als das bekannte Auf- und Abzittern, welches die Zahlen im Fernrohre zwar etwas verwaschen macht, sonst aber unschädlich ist. Drehungen um die Spiegelnormale sowie beliebig gerichtete rein translatorische Bewegungen eines Planspiegels spielen überhaupt keine Rolle.

Um zunächst über die hier in Betracht kommenden theoretischen Bedingungen einen elementaren Ueberblick zu gewinnen, denken wir uns ein beliebiges starres System an einem merklich torsionslosen Faden $\overline{OA}$ aufgehängt (Fig. 3). $M$ sei der Massenmittelpunkt, $\overline{TT'}$ die durch ihn gehende Hauptträgheitsaxe, welche einem Minimum des Trägheitsmoments entspreche. Es ist nun zu untersuchen, inwiefern das hängende System durch die Erschütterungen von $K$ beeinflusst wird.

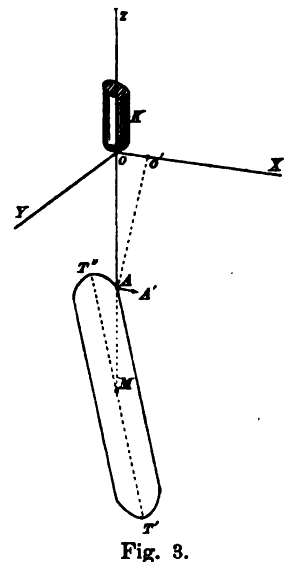


Fig. 3.

Translationen von $K$ nach der $Z$-Axe würden entsprechende unschädliche Hebungen oder Senkungen des Systems erzeugen.

Rotationen von $K$ um die $Z$-Axe sind nicht oder nur um äusserst geringe Winkel zu gewärtigen und würden dann durch den nahezu torsionslos gedachten Faden auf das System nur in unmerklichem Maasse übertragen werden können.

Translationen von $K$ in der horizontalen $\overline{XY}$-Ebene lassen sich nach den beiden Axenrichtungen zerlegen. Fassen wir nun eine plötzliche Verschiebung in's Auge, welche bewirkt, dass der Punkt 0 nach 0' kommt, der Faden also im ersten Augenblicke ungefähr die Lage $\overline{AO'}$ einnimmt. Die in ihm herrschende Spannung und die nach $\overline{AM}$ gerichtete Schwere setzen sich dann folgendermaasen zusammen.

Erstens zu einem Kraftimpulse $\overline{AA'}$, welcher in $A$ angreift. Dieser wird im allgemeinen drehende Schwingungen um die Trägheitsaxe $\overline{TT''}$ erzeugen, von um so grösserer Amplitude, je geringer das Trägheitsmoment, ausgenommen nur, wenn $\overline{AA'}$ die Axe $\overline{TT'}$ schneidet. Zur Vermeidung der Möglichkeit solcher

allein schädlichen drehenden Schwingungen durch Innehaltung dieser letzten Bedingung ist es daher nothwendig und ausreichend, dass der „Suspensionspunkt" $A$ in der Hauptträgheitsaxe $TT'$ liege. Dieses wiederum lässt sich folgendermaassen erreichen:

I. *Das System muss völlige „Trägheitssymmetrie" um die Verlängerung des Suspensionsfadens aufweisen.*

Zweitens wird die Verschiebung $\overline{OO'}$ Pendelschwingungen erzeugen, die uns nur mittelbar interessiren. Denn wir haben ausser den reinen Trägheitswirkungen, wie sie im Vacuum ausschliesslich auftreten würden, auch den Einfluss der umgebenden Luft zu berücksichtigen.

Befinden sich nämlich am System Theile, deren Bewegung durch die Luft ein seitlich unsymmetrischer Widerstand sich entgegengesetzt, so werden bei Pendelschwingungen jene Theile danach streben, sich mit der Richtung des Minimalwiderstandes der Schwingungsebene parallel zu stellen; dieses Bestreben kann sich dann unter Umständen als eine Drehung um die Verticale äussern. Umgehen können wir diese Tendenz durch folgende constructive Bedingung:

II. *Am System befestigte dünne fläche Gebilde müssen in zwei senkrechten Ebenen in ungefähr gleicher Flächenausdehnung vertheilt sein.*

Dadurch werden die Pendelschwingungen nebenbei viel rascher gedämpft, was nur nützlich sein kann. Die Art der Anwendung dieser Grundsätze auf die Construction der Magnetsysteme, zu deren Beschreibung wir nunmehr schreiten, wird sich aus dem Folgenden ergeben. Vorher möchten wir noch bemerken, dass es uns durchaus nicht ausgeschlossen erscheint, dass andere in ähnlichen Fällen von ähnlichen constructiven Gesichtspunkten aus vorgegangen sind. Da uns aber von einer Veröffentlichung hierüber nichts bekannt ist, so schien es uns von genügendem praktischen Interesse, der Frage nach erschütterungslosen Systemen einige Betrachtungen zu widmen, zumal diese nicht nur für die Construction von Galvanometern, sondern auch mancher anderer Apparate von Wichtigkeit ist.

## § 5. Magnetsysteme.

Die Construction dieses wichtigsten Theiles eines Galvanometers ist in Anlehnung an die übliche Anordnung und unter

Berücksichtigung der oben aufgestellten Forderungen durchgeführt. Bei sämmtlichen Systemen befinden sich die Magnetbündel in $R_1$ und $R_2$, der Spiegelhalter dagegen in der Mitte $S$. (Fig. 2). Wir haben drei verschiedene Methoden ausgearbeitet, welche je nach dem Zwecke, den das Galvanometer augenblicklich erfüllen soll, Verwendung finden; wir werden sie gesondert beschreiben.

A. „*Schweres Magnetsystem.*“ (Gewicht ohne Spiegel 1400 bis 1500 mg). Ein 0,7 mm starker Messingdraht bildet den Träger; der Spiegelhalter ist um denselben drehbar. An jeder Seite fünf 0,6 mm starke Magnete.[1]) Am unteren Ende eine zur Bildebene (Fig. 2) senkrechte runde Fahne $\Phi$ von 15 mm Durchmesser. Auf diese lässt sich zur Vergrösserung des Trägheitsmomentes einer von drei zugehörigen Aluminiumbügeln hängen. Zugehöriger Spiegel circa 12 mm Durchmesser.

B. „*Mittleres Magnetsystem*“ (200—250 mg). Der ganze Träger sammt dem nicht drehbaren Spiegelhalter besteht aus Aluminium. An jeder Seite vier dünnere Magnete. Fahne $\Phi$ von 12 mm Durchmesser. Zugehöriger Spiegel circa 9 mm Durchmesser.

C. „*Leichtes Magnetsystem*“ (100—125 mg). Der Aluminiumträger ist möglichst leicht zugeschnitten und endet unmittelbar unter $R_2$, sodass die Fahne fehlt. An jeder Seite drei dünne nur 5 mm lange Magnete; diese sind etwas gebogen und wenden die convexen Seiten einander zu, sodass die Magnetbündel von oben wie zwei voneinander abgewendete Klammern )( aussehen; hierdurch wird die gegenseitige entmagnetisirende Tendenz verringert. Zugehöriger Spiegel circa 7 mm Durchmesser.

Die zu benutzenden versilberten Planspiegel haben ein Gewicht von 20 bis 100 mg und können lose in den Spiegelhalter eingehängt bezw. aus demselben ausgehoben werden. Jedem Magnetsysteme ist ein eigenes Knöpfchen $K$ beigegeben. an das es mittels eines 40 bis 45 mm langen dünnen Quarzfadens[2]) befestigt wird und in diesem Zustande in einem geeigneten Holzkästchen verwahrt und verwahrt werden kann.

1) Sämmtliche Magnete bestehen aus bestem englischen Gussstahl („special magnet steel“) und werden nach dem bekannten Strouhal-Barus'schen Verfahren gehärtet und magnetisirt.

2) Die Boys'schen Quarzfäden werden von der „Cambridge Scientific Instrument Company“ geliefert. Mit gütiger Zustimmung seitens

Was nun die oben abgeleiteten Hauptbedingungen für die Erschütterungslosigkeit betrifft, so wird der Bedingung I. genügt, indem die Magnetsysteme sorgfältig symmetrisch angefertigt und namentlich etwaige Verbiegungen des Trägers corrigirt werden. Sodann muss der Quarzfaden genau centrisch angekittet werden, zu welchem Zwecke die geeignete Stelle mit einem Strich markirt ist. Wir haben uns durch Versuche überzeugt, dass schon ein geringes Abweichen von diesen Vorschriften die Ruhelage des Systems wesentlich beeinträchtigt.

Zur Erfüllung der Bedingung II. ist bei den flachen Magnetsystemen $A$ und $B$ die Fahne $\Phi$ senkrecht zu den Magnetbündeln angebracht. Ebenso wie letztere der regulirbaren Luftdämpfung in $U$ unterliegen, befinden sich auch zu beiden Seiten der Fahne die Kupferscheibchen $P$ und $Q$, deren Abstand sich ebenfalls von aussen durch Knöpfchen reguliren lässt (Fig. 1 u. 2). Bei dem leichten Magnetsysteme $C$ ist diese Fahne ihrer Trägheit wegen weggelassen. Infolgedessen ist die Ruhelage desselben auch eine etwas weniger vollkommene, als diejenige der beiden übrigen Magnetsysteme.

### § 6. Gebrauch des Galvanometers.

Um das Galvanometer möglichst bequem auf jede vorgeschriebene Periode astasiren zu können, empfiehlt es sich von vornherein das Instrument so aufzustellen, dass die Spulenebene parallel dem magnetischen Meridiane des Arbeitsraumes steht. Da es aber nicht immer angeht, die Scale östlich oder westlich aufzustellen, so ist wenigstens beim schweren Magnetsysteme der Spiegelhalter drehbar angeordnet. Bei den anderen Magnetsystemen war dies nicht angängig; wenn dies auch unter Umständen die allerbequemste Aufstellung verhindert, so sei hier doch bemerkt, dass wenigstens das Fernrohr fast an jeder beliebigen Stelle Platz finden kann, wofern man noch einen festen Hülfsspiegel anwendet.[1])

---

Hrn. Vernon Boys haben ferner auf unsere Veranlassung die Firmen Hartmann & Braun-Bockenheim und Keiser & Schmidt-Berlin die Anfertigung derselben übernommen.

1) Vgl. du Bois, Wied. Ann. 38. p. 494. 1889; R. Sissingh, Wied. Ann. 42. p. 124. 1891.

Die verschiedenen Magnetsysteme werden, wie bemerkt, mit daran befestigtem Quarzfaden verwahrt; das Knöpfchen *K* des zum Versuch auserlesenen Systems wird dann möglichst ohne Tordiren des Fadens in die Querbrücke *N* eingesteckt. Durch Drehung des Knöpfchens lässt sich der Faden vollends detordiren; durch dessen Hebung oder Senkung das Magnetsystem in die richtige Höhe bringen. Bei frisch aufgehängtem Systeme empfiehlt es sich einige Zeit zu warten, bis der Quarzfaden sich „ausgehängt" hat; im Anfang zeigen sich meistens Nullpunktswanderungen, welche aber alsbald abnehmen.

Was die Wahl des Magnetsystemes anbelangt, so empfiehlt sich das schwere *A* für Versuche, wo es weniger auf Empfindlichkeit als auf sicheres Arbeiten (feste Nulllage, völlige Erschütterungslosigkeit) ankommt; ferner für alle ballistischen Beobachtungen, die kaum weniger wichtig sind wie diejenigen mit stationärem Strom. Selbst wenn alle Dämpferscheibchen zurückgezogen sind, zeigt jenes Magnetsystem *A* immerhin noch ziemliche Dämpfung. Bekanntlich kommt es aber für die ballistische Methode, sofern es nur relativen, nicht absoluten Messungen gilt, durchaus nicht darauf an, dass das logarithmische Decrement Null sei; sondern nur, dass die Ausschläge den durchfliessenden Electricitätsmengen noch proportional bleiben. Dass letzteres der Fall ist, haben wir durch den Versuch festgestellt (vgl. §. 7). Zur Beruhigung des schwingenden Systems empfiehlt es sich, zwischen den einzelnen zu messenden Entladungen die Spulen kurz zu schliessen, weil hierdurch die Dämpfung erheblich grösser wird.[1])

Das mittlere Magnetsystem *B* ist das wohl am häufigsten zu benutzende; er besitzt bei bereits hoher Empfindlichkeit noch genügende Erschütterungslosigkeit. Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass man im allgemeinen auf eine solche Periode astasiren wird, dass unter Berücksichtigung sämmtlicher momentan obwaltender Bedingungen des Versuches wie der Einwirkungen von aussen (Variationen des Erdfeldes, andere magnetische Störungen der verschiedensten Art) das

---

1) Falls höhere Empfindlichkeit gewünscht wird, lassen sich übrigens auch die beiden anderen Magnetsysteme ballistisch verwenden. Die Dämpfung lässt sich durch Zurückschieben der Spulen längs der Contactstifte beliebig verringern.

Verhältniss des Ausschlages zu seinem wahrscheinlichen Fehler (durch Aenderung der Nulllage wie der Einstellungen) ein Maximum wird.[1])

Das leichte Magnetsystem $C$ endlich ist dann einzuhängen, wenn die Empfindlichkeit ganz ausgenutzt werden soll. Im hiesigen Institute, welches äusseren Erschütterungen sowie magnetischen Störungen verschiedener Art besonders ausgesetzt ist, hängt dieses System, wie schon bemerkt, tagsüber weniger ruhig als zu wünschen wäre. Abends sind aber die Ablesungen auf einen Scalentheil sicher, selbst wenn die Scale sich in einem Abstande von 5000 solcher Theile befindet.

Die fabrikmässige Herstellung noch empfindlicherer Systeme ist nicht empfehlenswerth, da der Transport schwierig ist und ihre Benutzung bei unruhiger Aufstellung doch illusorisch wird. Indessen bietet es keine allzugrossen Schwierigkeiten dort, wo Ruhe gesichert ist, auch leichtere Systeme für das Galvanometer passend anzufertigen. Als Träger nimmt man am besten ein Capillarröhrchen oder einen dickeren Quarzfaden, an den der möglichst leichte Spiegel geklebt wird. Die Magnete sind nur wenige mm lang zu nehmen, um das der dritten Potenz der Länge proportionale Trägheitsmoment herabzudrücken. Dabei müssen sie entsprechend dünn sein, damit die Selbstentmagnetisirung nicht zu grosse Werthe annehme[2]); man kittet daher am besten eine grössere Anzahl auf. Es dürfte in dieser Weise leicht gelingen, Systeme von einem Centigramm Gewicht und dementsprechend höherer Empfindlichkeit herzustellen.[3])

Bei der Auswahl der Widerstände, welche man dem Galvanometer durch verschiedene Schaltung zweier Spulensätze verleihen kann, sowie bei der durch Zurückschieben der Spulen zu erreichenden Empfindlichkeitsverringerung, ist die Benutzung von Nebenschlüssen im allgemeinen nicht vorgesehen; deren Zugabe kann aber immerhin leicht erfolgen.

1) Vgl. Lummer u. Kurlbaum, Wied. Ann. **46.** p. 207. 1892.

2) Vgl. du Bois, Wied. Ann. **46.** p. 498. 1892 (Tabelle der Entmagnetisirungsfactoren von Stäben).

3) Nach gefälliger Mittheilung von Hrn. Vernon Boys hat dieser Magnetsysteme von nur 2 mg Gewicht angefertigt.

## § 7. Versuchsreihen.

Um die Leistungen eines Galvanometers zu kennzeichnen, hat man sich früher mit verschiedenen Zahlenangaben begnügt, welche jedoch einer rationellen Grundlage entbehrten. So findet man z. B. häufig einen „Reductionsfactor“ oder eine „Gütezahl“ (Figure of merit, nombre de mérite) angegeben. Es ist das der Strom pro Einheitsausschlag ohne irgend weitere Angaben; diese Zahl nimmt ab, wenn die Empfindlichkeit wächst, ist also schon deswegen ein wenig geeigneter Maassstab für die Leistungsfähigkeit. Es haben nun die Herren Ayrton, Mather und Sumpner (l. c. p. 82 ff.) die vorliegende Frage einer eingehenden Erörterung gewürdigt, der wir uns in Folgendem anschliessen, schon um den Vergleich unserer Resultate mit der dort gegebenen tabellarischen Uebersicht zu erleichtern. Wir definiren daher folgendermaassen:

*Die Stromempfindlichkeit* $S_s$ ist der Ausschlag in Scalentheilen pro Mikroampère, wenn der Scalenabstand 2000 Theile, die (volle $\sim$) Periode 10″ beträgt.

Die *ballistische Empfindlichkeit* $S_b$ ist der Ausschlag in Scalentheilen pro Mikrocoulomb, wenn der Scalenabstand 2000 Theile, die (volle $\sim$) Periode 10″ beträgt.

Um den Widerstand $R$ der Spule zu eliminiren, führen wir dann die *normale Empfindlichkeit* $\mathfrak{S}$ ein, definirt durch die Gleichungen

$$\mathfrak{S}_s = S_s / \sqrt{R}$$

bezw.

$$\mathfrak{S}_b = S_b / \sqrt{R}$$ [1])

Bei der gewählten normalen Periode von 10″ und unter der Annahme, dass die Dämpfung zu vernachlässigen ist, hängen diese beiden zusammen durch die Gleichung

$$\mathfrak{S}_b = \frac{2\pi}{10} \mathfrak{S}_s.$$

1) In einer jüngst erschienenen Arbeit führen die Hrn. Lummer und Kurlbaum (Wied. Ann. **46.** p. 206. 1892) eine „normale Empfindlichkeit“ ein, bezogen auf einen Scalenabstand 1000, eine (volle) Periode 20″, einen Widerstand 1 Ohm. Jene Zahl ist daher

$$= \frac{1000 \cdot 20^2}{2000 \cdot 10^2} \mathfrak{S}_s = 2\,\mathfrak{S}_s.$$

Die höchsten in der Ayrton'schen Tabelle (l. c. p. 91) angegebenen Werthe von $\mathfrak{S}_s$ betragen:

| | | |
|---|---|---|
| Ein Spulenpaar: | Elliott's Tripod (Specially light needles) | 248 / 413 |
| Zwei Spulenpaare: | Elliott's Stock pattern (Special form) | 231 |

Tabelle 1.

A. Schweres Magnetsystem.

(Ohne Aluminiumbügel.)

(Dünne Drahtspulen 1 n. 4 h.[1]); 8000 Ohm.)

I. Ballistische Empfindlichkeit.

| Electricitätsmenge | Ausschlag | $S_b$ |
|---|---|---|
| 0,10 Mikrocoulomb | Rechts 293,0 / Links 293,5 | 2933 |
| 0,05 „ | Rechts 146,5 / Links 147,5 | 2940 |
| 0,02 „ | Rechts 58,0 / Links 59,0 | 2925 |
| | | $S_b$ = 2933 |

Daher

$$\mathfrak{S}_b = \frac{2933}{\sqrt{8000}} = 33.$$

II. Stromempfindlichkeit.

| Strom | Ausschlag | $S_s$ |
|---|---|---|
| 0,05 Mikroampère | Rechts 305,5 / Links 306,0 | 6115 |

Daher

$$\mathfrak{S}_s = \frac{6115}{\sqrt{8000}} = 68.$$

B. Mittleres Magnetsystem.

(Dicke Drahtspulen 4 n. 1 h.; 5 Ohm.)

| Strom | Ausschlag | $S_s$ |
|---|---|---|
| 0,40 Mikroampère | Rechts 186,6 / Links 186,8 | 467 |

Daher

$$\mathfrak{S}_s = \frac{467}{\sqrt{5}} = 209.$$

1) *n* bedeutet: nebeneinander, *h* bedeutet: hintereinander.

C. Leichtes Magnetsystem.
(Dicke Drahtspule 4 n. 1 h.; 5 Ohm.)

| Strom | Ausschlag | $S_s$ |
|---|---|---|
| 0,20 Mikroampère | Rechts 352,7<br>Links 352,7 | 1764 |
| 0,10 „ | Rechts 176,0<br>Links 175,7 | 1759 |
| 0,05 „ | Rechts 87,7<br>Links 87,7 | 1754 |
| | | $S_s$ = 1759 |

Daher

$$\mathfrak{S}_s = \frac{1759}{\sqrt{5}} = 785.\,^{1)}$$

Desgleichen

(Dünne Drahtspulen 4 n. 1 h.; 500 Ohm.)

| Strom | Ausschlag | $S_s$ |
|---|---|---|
| 0,02 Mikroampère | Rechts 230,0<br>Links 229,5 | 11490 |

Daher

$$\mathfrak{S}_s = \frac{11490}{\sqrt{500}} = 515.\,^{1)}$$

Wir stellen nun in Tab. 1 einige Resultate der an unserem Galvanometer angestellten Messungen zusammen: es wurde dabei stets auf eine (volle) Periode von 10″ astasirt und bei einem Scalenabstande von 2000 Theilen (Millimetern) beobachtet.

Bei den angeführten ballistischen Versuchen wurden die Electricitätsmengen dadurch abgemessen, dass ein Mikrofarad-Condensator auf eine bekannte Potentialdifferenz geladen und sofort durch das Galvanometer entladen wurde. Die Ausschläge sind die direct beobachteten, wegen Dämpfung nicht corrigirten. Letztere war immer noch eine erhebliche, beeinflusste aber die Proportionalität der Ausschläge mit den Electricitätsmengen nicht, wie aus den angeführten Zahlen hervorgeht. Dagegen ist durch die Dämpfung der gemessene Werth $\mathfrak{S}_b = 33$ um

1) Der 35 proc. Unterschied dieser beiden Werthe für $\mathfrak{S}_s$ rührt daher, dass bekanntlich wegen des vom Isolirmittel eingenommenen Raumes und wegen der verschiedenen in einer Spule verwendeten Drahtdicken die Empfindlichkeit thatsächlich langsamer wächst, als die Wurzel aus dem Widerstande.

22 Proc. unter seinen theoretischen Werth $\mathfrak{S}_b = (2\,\pi/10)\,.\,68 = 43$, herabgedrückt.

Zur besseren Uebersicht geben wir schliesslich in Tab. 2 für verschiedene Schaltungsarten die Constanten $S_s$ und $\mathfrak{S}_s$. Ausserdem sind für die dünnen Drahtspulen die theoretischen Werthe $\mathfrak{S}_b = (2\,\pi\,/\,10)\,.\,\mathfrak{S}_s$ angeführt, die nach dem Vorhergehenden in Wirklichkeit je nach dem Betrage der Dämpfung bis zu etwa 30 Proc. geringer ausfallen können. Es sind runde Zahlen angeführt, da selbstverständlich verschiedene nach demselben Muster gefertigte Magnetsysteme nie genau identische Leistungen aufweisen.

Tabelle 2.

| | Dicke Drahtspulen | | | | Dünne Drahtspulen | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\mathfrak{S}_s$ | $S_s$ | | | $\mathfrak{S}_b$ | $\mathfrak{S}_s$ | $S_s$ | | |
| **Schaltung** | — | 4 n. 1 h. | 2 n. 2 b. | 1 n. 4 h. | — | — | 4 n. 1 h. | 2 n. 2 h. | 1 n. 4 h. |
| Widerstand (Ohm) | 1 | 5 | 20 | 80 | 1 | 1 | 500 | 2000 | 8000 |
| **Schweres Magnetsystem** | **100** | 225 | 450 | 900 | 42 | 67 | 1500 | 3000 | 6000 |
| **Mittleres** " | **200** | 450 | 900 | 1800 | 84 | 134 | 3000 | 6000 | 12000 |
| **Leichtes** " | **800** | 1800 | 3600 | 7200 | 336 | 536 | 12000 | 24000 | 48000 |

Die Anfertigung der beschriebenen Galvanometer hat die Firma Keiser & Schmidt hierselbst übernommen.

Berlin, physik. Institut der Univ., Weihnachten 1892.

## III. *Theorie des remanenten Magnetismus; von A. Föppl.*

---

Ein Eisenring sei mit Hülfe einer umgewickelten Spirale durch einen gleichgerichteten Strom magnetisirt. Wenn der Strom allmählich auf Null abnimmt, bleibt im Ringe, auch wenn er aus dem weichsten Eisen angefertigt ist, eine beträchtliche remanente Magnetisirung zurück. Sie würde nur dann ganz verschwinden, wenn das Eisen magnetisch ebenso absolut weich wäre wie etwa die Luft. Man pflegt die magnetische Remanenz in diesem Falle damit zu erklären, dass im Ringe als einem pollosen Magneten keine selbstentmagnetisirende Kraft auftreten könne.

Die magnetische Kraft $H$ ist dagegen nach der Theorie der magnetischen Fluida im Eisen überall gleich Null, denn denkt man sich im Eisenringe eine conaxiale ringförmige Höhle ausgespart, so ist in der Höhle das Linienintegral von $H$ und daher $H$ selbst gleich Null, weil die vom Integrationswege begrenzte Kreisfläche nach Voraussetzung von keinem electrischen Strome mehr durchsetzt wird. Man erkennt hieraus, dass selbst beim weichsten Eisen, über das wir verfügen können, die Gleichung $B = \mu H$ zwischen Induction, Kraft und Permeabilität unter gewissen Umständen (und zwar innerhalb weiter Grenzen bei jeder beliebigen Feldstärke) zu durchaus falschen Resultaten führen kann.

Nach der Theorie, die ich hier in ihren Umrissen darlegen werde, erklärt sich dieser Widerspruch sehr einfach. Es sei vorweg erwähnt, dass nach ihr die Induction $B$ an der äusseren Begrenzungsfläche des Eisenringes thatsächlich gleich Null zu setzen ist, wie es der Gleichung $B = \mu H$ entspricht, und dass sie anwächst, je weiter man nach innen geht. — Ferner folgt z. B. aus ihr, dass in der Mitte eines langen cylindrischen Stahlmagneten die an der Oberfläche gelegenen Schichten gleichfalls nur schwach magnetisirt sind, dass auf sie, wenn man weiter nach innen zu geht, stärker magnetisirte folgen, bis ein Maximum erreicht ist; weiter nach innen zu nimmt das remanente magnetische Moment dann wieder ab.

— Auf den ersten Blick scheint es, als wenn dieses Ergebniss jenen bekannten Versuchsresultaten von Jamin u. a., wonach gerade die äussersten Schichten eines Stahlmagneten das stärkste remanente Moment hätten, direct widerspräche. Es wird sich aber zeigen, dass es zwar mit der Deutung, die man diesen Versuchsergebnissen gab, nicht aber mit diesen selbst im Widerspruche steht.

Zur Ableitung dieser Schlüsse bediene ich mich der Darstellungsweise der Kraftlinienlehre, deren Annahmen ich gleichfalls zu Grunde lege, *ohne irgend eine neue hinzuzufügen.* Besonders setze ich also voraus, dass bei isotropen Körpern stets ein einziger Vector (nämlich $B$) zur Beschreibung des magnetischen Zustandes genügt, dass ferner alle magnetischen Kraftlinien geschlossene Linien sind und dass daher nirgends „wahrer" Magnetismus (nach der Hertz'schen Bezeichnungsweise) als Quelle des Kraftflusses auftreten kann. Als primäre Quelle des magnetischen Kraftflusses bleibt dann nur der electrische Strom bestehen. Mit dem Erlöschen des Stromes verschwinden alle Kraftlinien, wenn in der Umgebung ausschliesslich magnetisch weiche Körper sind; im anderen Falle bleibt dagegen ein gewisser Kraftfluss zurück. Dieser st es, der zu den Erscheinungen des remanenten Magnetismus Veranlassung gibt. Zur Erklärung dieser Erscheinungen bedarf man aber weder der Fernkräfte noch der Pole oder der magnetischen Massen überhaupt. Sie ergibt sich vielmehr in einfachster Weise aus der blossen Verfolgung des Polarisationszustandes des Mediums, wie er geometrisch durch die Kraftlinien, analytisch durch die Induction $B$ dargestellt wird. — Pole und Fernkräfte schliesse ich grundsätzlich von der Betrachtung aus, da die Einführung dieser Begriffe die Erfassung des causalen Zusammenhanges nur nutzlos erschweren würde. In den Rahmen der Kraftlinienlehre passen sie ebensowenig hinein, wie die Begriffe des magnetischen Momentes, der Susceptibilität und der Intensität der Magnetisirung ($J$).

### Der Kraftfluss in der Luft oder in anderen magnetisch weichen Körpern.

Der Kraftfluss an einer bestimmten Stelle des magnetischen Feldes, die etwa von Luft ausgefüllt sein mag, muss, wenn wir von der Einführung von Fernkräften absehen, aus-

schliesslich durch ein Gesetz geregelt werden, das die Abhängigkeit unmittelbar benachbarter Gebietstheile voneinander zum Ausdrucke bringt. Wir müssen durch die Kenntniss dieses Gesetzes befähigt werden, wenn die Vertheilung der durch irgend einen Querschnitt fliessenden Kraftlinien gegeben ist, daraus den weiteren Verlauf dieser Kraftlinien zu berechnen, ohne jede Bezugn... ıe auf irgend eine Fernewirkung. Dieses Gesetz ist als das ***Differentialgesetz des magnetischen Kraftflusses*** zu bezeichnen, im Gegensatze zu jenem Integralgesetze, das analog dem Ohm'schen Gesetze die Gesammtzahl aller Kraftlinien des ganzen Feldes kennen lehrt.

Bezeichnen wir die Componenten der Induction $B$ nach den Coordinatenaxen mit $B_{,}$, $B_{,,}$, $B_{,,,}$, so wird durch den Verein der Gleichungen:

$$(1) \qquad \frac{dB_{,,,}}{dy} - \frac{dB_{,,}}{dz} = \frac{dB_{,}}{dz} - \frac{dB_{,,,}}{dx} = \frac{dB_{,,}}{dx} - \frac{dB_{,}}{dy} = 0,$$

und

$$(2) \qquad \frac{dB_{,}}{dx} + \frac{dB_{,,}}{dy} + \frac{dB_{,,,}}{dz} = 0$$

jenes Differentialgesetz ausgesprochen. Es gilt innerhalb jedes magnetisch weichen Mediums, innerhalb dessen die Permeabilität $\mu$ sich nicht ändert und das frei von electrischen Strömen ist. An der Grenze von zwei solchen Medien ist die Normalcomponente $B_N$ für beide von gleicher Grösse und die Tangentialcomponente $B_T$ ändert sich sprungweise, sodass $B_T' : B_T'' = \mu' : \mu''$ ist.

Grenzen wir durch eine geschlossene Fläche einen Raum ab, innerhalb dessen nur magnetisch weiche Medien, also solche sich befinden, für die die Gleichungen (1) und (2) erfüllt sind, in dem ferner keine electrischen Ströme bestehen und in den durch die Grenzfläche keine Kraftlinien von aussen eintreten, so muss $B$ im ganzen Raume gleich Null sein. Man beweist dies leicht mit Hülfe einer Form des Satzes von Green, die ich hier nach einer Abhandlung von Molenbroek[1]) mit den dort gebrauchten Bezeichnungen citire:

$$(3) \qquad \int K^2 d\tau = -\int K_n \varphi \, dO + 4\pi \int \varphi \varrho \, d\tau.$$

Ist der Raum zunächst nur von einem Medium erfüllt und verstehen wir unter $K$ hier $B$, unter $\varphi$ das Potential von $B$

1) Molenbroek, Wied. Ann. **40.** p. 157. 1890.

in diesemMedium (d. i. das $\mu$fache des magnetischen Potentials) und unter $\varrho$ die Dichte des „wahren“ Magnetismus, die nach der Grundlage der Theorie gleich Null sein muss, so folgt sofort $\int K^2 d\tau = 0$, d. h. $K$ ist überall Null. Zu demselben Resultate gelangen wir bei zwei Medien, wenn wir beachten, dass das Oberflächenintegral über die Grenzfläche der Medien in dem einen Medium negativ würde, wenn es im anderen positiv wäre, während $\int K^2 d\tau$ nur positiv für beide Medien oder Null sein kann. In derselben Weise lässt sich für beliebig viele Medien weiter schliessen.

Die vorher erwähnte geschlossene Fläche möge jetzt den ganzen unendlichen Raum einschliessen. Aus dem vorher bewiesenen ergibt sich dann, dass ohne das Vorhandensein von Strömen überhaupt kein magnetisches Feld möglich wäre, falls alle im Raume vorhandenen Körper zu den magnetisch weichen gehörten. Da wir nun remanente Magnete besitzen, müssen diese solche Körper sein, die in dem hier definirten Sinne nicht magnetisch weich sind, d. h. *für die das durch die Gleichungen (1) ausgesprochene Differentialgesetz des Kraftflusses nicht erfüllt ist.*

Für einen magnetisch weichen Körper, der von electrischen Strömen durchzogen ist, treten an die Stelle der Gleichungen (1) bekanntlich die Gleichungen:

$$(1\text{a})\quad \begin{cases} \dfrac{d B_{\prime\prime\prime}}{d y} - \dfrac{d B_{\prime\prime}}{d z} = 4\pi\mu C_1, \quad \dfrac{d B_{\prime}}{d z} - \dfrac{d B_{\prime\prime\prime}}{d x} = 4\pi\mu C_2, \\ \dfrac{d B_{\prime\prime}}{d x} - \dfrac{d B_{\prime}}{d y} = 4\pi\mu C_3, \end{cases}$$

in denen $C_1$, $C_2$, $C_3$ die Componenten der Stromintensität $C$ bedeuten. Sie sprechen das Differentialgesetz des magnetischen Kraftflusses in allgemeinerer Form aus, sind aber ebensowenig wie die Gleichungen (1) für magnetisch harte Körper anwendbar.

Bevor ich die Behandlung der magnetisch weichen Körper abbreche, möchte ich noch einem einfachen speciellen Falle, auf den ich nachher zurückkommen werde, einige Worte widmen. Sie betreffen das magnetische Feld, das sich um einen geradlinigen Strom ausbildet. Für das den Draht umgebende Medium bildet die Drahtoberfläche die Erregerin des Kraftflusses. Wenn der Strom anwächst, treten neue Kraftlinien aus der Drahtoberfläche ins äussere Medium über und die vorhandenen erweitern sich, bis an jeder Stelle des Mediums die Gleichungen (1)

aufs neue erfüllt sind. Erzeugt werden diese nach aussen übertretenden Kraftlinien im Querschnitte des Drahtes selbst, entsprechend den Gleichungen (1 a). Wenn der Strom abnimmt, lässt der Zwang an der Drahtoberfläche, der den ganzen Kraftfluss aufrecht erhielt, nach, die Kraftlinien verengern sich und die hierbei in den Drahtquerschnitt zurücktretenden lösen sich dort auf, indem sie die in ihnen angehäufte Energie an den electrischen Strom zurückgeben. Es würde nur einen quantitativen Unterschied ausmachen, ob wir uns den Draht von Luft oder von absolut weichem Schmiedeeisen umgeben denken. Die vorher angegebene Grenzbedingung zwischen der Kupferoberfläche des Drahtes und der Oberfläche des Schmiedeeisens bewirkt, dass sich in dem letzteren die Dichte des Kraftflusses im Verhältniss der Permeabilitäten erhöht.

Ganz anders vermag sich dagegen das Phänomen zu gestalten, wenn das den Draht umgebende Medium nicht mehr absolut weich ist. Sobald die Gleichungen (1) nicht mehr streng erfüllt sind, tritt eine von der vorigen nicht nur quantitativ, sondern vor allem qualitativ verschiedene Vertheilung der Kraftlinien ein. Während ein über den Draht geschobener absolut weicher eiserner Hohlcylinder die sich aussen anschliessende Luft vor dem Kraftflusse nicht zu schützen vermag, kann dies ein magnetisch harter Körper thun. Von einem solchen ist in dem erwähnten Falle eine mehr oder weniger vollkommene Schirmwirkung zu erwarten, indem die durch die Gleichungen (1) ausgesprochene transversale Fortpflanzungsart der Kraftlinien in dem magnetisch harten Medium mehr oder weniger gehemmt ist.

Es könnte scheinen, als wenn hier eine neue Hypothese mit unterliefe. Aber man beachte, dass oben streng bewiesen ist, dass es Körper geben muss (Stahl etc.), für die das Elementargesetz des magnetischen Kraftflusses in der normalen Form der Gleichungen (1) nicht erfüllt ist. Eine neue Hypothese macht sich erst dann nöthig, wenn man über die Art der Abweichung des Elementargesetzes von der normalen Form Näheres festsetzen will. Die Thatsache der Abweichung selbst muss als streng erwiesen angesehen werden und aus ihr folgt unmittelbar die Möglichkeit einer Schirmwirkung in dem erwähnten Falle, die absolut weiches Material nicht besitzen könnte.

Den Hergang bei der Magnetisirung, falls der Draht von Stahl umgeben ist, hat man sich specieller wohl so vorzustellen, dass der Stahl an der Grenzfläche mit Kraftlinien in demselben Maasse gesättigt wird, wie weiches Eisen, dass aber die transversale Fortleitung des Polarisationszustandes (im Gegensatze zu der durch Gleichung (2) ausgesprochenen longitudinalen Fortpflanzung, die auch für magnetisch harte Körper als streng erfüllt anzusehen ist) durch die Eigenschaft der magnetischen Härte abgemindert wird. In einigem Abstande von der Grenzfläche ist daher $B$ kleiner, als es für weiches Eisen wäre, und vielleicht vermag sich weiterhin die Polarisation ganz zu verlieren: es hängt dies von der Art der Abweichung des Elementargesetzes des Kraftflusses von dem normalen ab.

### Der Kraftfluss in magnetisch harten Körpern.

Magnetisch harte Körper sind, wie ich nachwies, dadurch charakterisirt, dass die Gleichungen (1) bez. (1a) für sie nicht erfüllt sind. Das Differentialgesetz für den Kraftfluss lässt sich für sie daher in der Form anschreiben:

$$(4) \quad \frac{dB_{'''}}{dy} - \frac{dB_{''}}{dz} = A_1, \quad \frac{dB_{'}}{dz} - \frac{dB_{'''}}{dx} = A_2, \quad \frac{dB_{''}}{dx} - \frac{dB_{'}}{dy} = A_3,$$

während die Gleichung (2) auch für sie gültig bleibt.

Die von Null verschiedenen Grössen $A_1$, $A_2$, $A_3$ lassen sich als Componenten eines Vectors $A$ ansehen, dessen Grösse im einzelnen Falle als ein Maass der magnetischen Härte oder wenigstens als ein Maass dafür angesehen werden kann, in welchem Grade sich in dem betrachteten Falle die Eigenschaft der magnetischen Härte geltend macht. Ueber diesen Vector selbst vermögen die vorausgegangenen allgemeinen Betrachtungen keinen Aufschluss zu geben, sie beweisen nur sein Vorhandensein im allgemeinen. Es könnte sein, dass er in einem gegebenen Materiale nur eine bestimmte maximale Grösse, die unabhängig von der Induction $B$ wäre, anzunehmen vermöchte. Diese maximale Grösse wäre dann unmittelbar durch den Härtegrad des Materials bestimmt. Die Aufgabe, das Eindringen des Kraftflusses aus dem Kupferdrahte in die ihn umgebende Stahlmasse in dem vorher betrachteten Falle zu ermitteln, wäre durch diese Annahme und die Festsetzung eines Maasses für die maximale Grösse von $A$ völlig bestimmt.

Die Richtung des Vectors wäre dann überall parallel zur Drahtaxe und der Kraftfluss würde nur um eine leicht zu berechnende, vom Härtegrade abhängige Tiefe in die Stahlhülle eindringen. Ueber diese Tiefe hinaus wäre die Schirmwirkung eine vollständige.

Wahrscheinlich ist die maximale Grösse des Vectors $A$ indessen nicht ausschliesslich vom Härtegrade, sondern zugleich auch von der Grösse der Induction $B$ abhängig. Die nächstliegende Annahme würde sein, dass $A_{max}$ proportional mit $B$ ist. Unter dieser Annahme würde die Induction in jenem früheren Falle bis zu unbegrenzter Tiefe in die Stahlmasse eindringen und die magnetische Schirmwirkung eines den Draht umgebenden, vorher unmagnetischen Hohlcylinders aus Stahl in Bezug auf den sich aussen anschliessenden Luftraum wäre eine unvollständige. Da diese Schirmwirkung für absolut weiches Eisen vollständig verschwinden müsste, ergibt sich aus dieser Betrachtung leicht das Mittel zur experimentellen Prüfung und weiteren Erforschung dieser Beziehungen.

Wenn der magnetisch harte Körper zugleich von electrischen Strömen durchflossen wird, treten an die Stelle der Gleichungen (4) die den Gleichungen (1a) analogen

$$(4a)\quad \begin{cases} \dfrac{dB_{'''}}{dy} - \dfrac{dB_{''}}{dz} = 4\pi\mu C_1 + A_1; \quad \dfrac{dB_{'}}{dz} - \dfrac{dB_{'''}}{dx} = 4\pi\mu C_2 + A_2; \\ \dfrac{dB_{''}}{dx} - \dfrac{dB_{'}}{dy} = 4\pi\mu C_3 + A_3. \end{cases}$$

Man erkennt daraus, dass der Vector $A$ für die Fortleitung des Kraftflusses dieselbe Bedeutung hat, wie eine Stromintensität von gleicher Richtung und der Grösse $A/4\pi\mu$. Diese fingirten Ströme $A/4\pi\mu$ sind von gleicher Art wie die von Ampère zur Erklärung des Magnetismus eingeführten. Von einem anderen, leicht ersichtlichen Unterschiede abgesehen, sind die Grössen $A/4\pi\mu$ hier aber keineswegs als wirkliche Ströme eingeführt; sie dienen hier vielmehr nur zur Charakterisirung der unvollkommenen transversalen Fortpflanzung des Kraftflusses in den magnetisch harten Körpern und haben mit wirklichen electrischen Strömen nur die Aehnlichkeit der Wirkung, keineswegs aber eine Gleichheit des Wesens gemein.

Ich komme jetzt auf den schon wiederholt besprochenen Fall der Stahlhülle zurück, die einen geraden Strom umgibt.

Wenn der Strom bis auf Null abnimmt, muss auch die Induction $B$ an der dem Kupferdrahte benachbarten Grenzfläche der Stahlmasse bis auf Null abnehmen, wenn der Vector $A$ nicht unendlich gross werden kann. Diesen Fall müssen wir aber ausschliessen, weil der Stahl sonst „absolut hart“ wäre und vorher auch ein Eindringen des Kraftflusses in seine Masse nicht gestattet hätte. Der Vector $A$ kehrt sich jetzt überall um, und so wie er vorher das Eindringen der Kraftlinien in die Stahlmasse beschränkte, widersetzt er sich jetzt dem Rückwärtsfliessen der Kraftlinien in den Draht. *Der Stahlmantel bleibt remanent circular magnetisirt.* An seiner inneren Grenzfläche ist die Induction $B$ gleich Null, sie wächst, je tiefer wir eindringen (während sie vorher, solange der Strom noch floss, in dieser Richtung abnahm), bis wir zu einer Tiefe gelangen, in der sie ihren vorigen Werth behalten konnte. Von da an nimmt sie dann wieder ab. Aus dieser Betrachtung ergibt sich zugleich leicht, warum die permanente circulare Magnetisirung kleiner ist, als die temporäre.

Die vorhergehenden Betrachtungen sind unabhängig von jeder besonderen Annahme über die Natur des Vectors $A$. Eine solche Annahme wäre nur erforderlich, um das Phänomen quantitativ zu verfolgen. Sie beruhen vielmehr ausschliesslich auf der Existenz dieses Vectors überhaupt, die als streng bewiesen anzusehen ist, solange man die heute allgemein angenommenen Grundlagen der magnetischen Theorie als eine richtige Formulirung der Thatsachen betrachtet.

Auf Grund der hier gewonnenen Anschauung erklärt sich nun auch das Verhalten des im Eingange der Abhandlung erwähnten Ringmagneten. Sobald der Strom in der ihn umgebenden Spule erlischt, ziehen sich die der Oberfläche benachbarten Kraftlinien in die Spule zurück, der sie ihre Energie zurückerstatten, bis sich ein Inductionsgefälle in der Eisenmasse ausgebildet hat, das mit den zugleich entstehenden Vectoren $A$ im Gleichgewichte ist. Die Vectoren $A$ sind in diesem Falle überall circular gerichtet.

Auch in der conaxialen ringförmigen Höhle, von der früher die Rede war, bleibt in diesem Falle ein Kraftfluss zurück, der gleich $B(\mu_1 / \mu_2)$ ist, wenn die Induction in der angrenzenden Eisenmasse mit $B$ und die Permeabilitäten der Luft und des

Eisens mit $\mu_1$ und $\mu_2$ bezeichnet werden. Dieser Kraftfluss entspricht der magnetischen Kraft $H$ der älteren Theorie. Es könnte nun scheinen, als wenn der soeben gezogene Schluss im Widerspruche mit dem ersten Hauptsatze wäre und daher die ganze hier aufgestellte Theorie zu verwerfen wäre. In der That hat ja nach den vorhergehenden Darlegungen das Linienintegral der Kraft $H$ in der ringförmigen Höhle einen von Null abweichenden Werth, obschon gar keine electrischen Ströme mehr vorhanden sind. Man würde daher ein Perpetuum mobile erhalten, wenn man einen Magnetpol in die Höhle versetzte, und die durch die Bewegung dieses Pols gewonnene Arbeit wäre nicht durch die Arbeit einer electrodynamischen Induction des Pols auf vorhandene Ströme compensirt.

Dies alles ist zuzugeben und die hier entwickelte Theorie wäre ad absurdum geführt, wenn man wirklich über einen einzelnen Magnetpol, überhaupt über ein isolirtes Partikelchen magnetischen Fluidums vom positiven oder negativen Vorzeichen, wie es die ältere Theorie zum Ausgangspunkte nahm, verfügen könnte. Der wesentliche Unterschied der magnetischen von den electrischen Erscheinungen, die sich sonst in so hohem Grade gleichen, besteht aber gerade darin, dass nach allen bisherigen Erfahrungen „wahrer" Magnetismus überhaupt nicht in der Natur vorkommt. Somit fällt auch die Möglichkeit der Realisirung eines Perpetuum mobile in dem vorher erwähnten und in ähnlichen Fällen und der sich darauf stützende Einwand. Ich glaube überhaupt, dass der Fortschritt in der Erkenntniss des remanenten Magnetismus bisher in erster Linie dadurch aufgehalten wurde, dass man auf Grund der Theorie der magnetischen Fluida annahm, die magnetische Kraft $H$ müsse in allen Körpern, auch in den magnetisch harten, solange sie nicht von electrischen Strömen durchflossen werden, ein Potential besitzen. Und ich betrachte es als das wesentliche Unterscheidungsmerkmal der Kraftlinienlehre, wie sie sich in den letzten Jahren entwickelt hat, dass sie zu einem solchen Schlusse keineswegs nöthigt.

Auch über die magnetischen Verhältnisse eines langen geradlinigen Magneten geben die vorhergehenden Betrachtungen einen hinreichenden qualitativen Aufschluss. Quantitativ würden sie sich nur auf Grund besonderer Annahmen über den Vector $\mathfrak{A}$

verfolgen lassen. Ich habe es mir aber hier zur Aufgabe gemacht, mich von jeder besonderen Hypothese dieser Art fern zu halten, um die streng gezogenen Folgerungen dieser Abhandlung nicht mit unsicheren Rechnungsergebnissen zu vermengen.

Die Mitte eines solchen langen Stabmagneten kann mit einem Stücke eines Ringmagneten von unendlich grossem Halbmesser verglichen werden. Wie bei jenem müssen wir daher schliessen, dass die äussersten an die Luft angrenzenden Schichten ziemlich frei von magnetischer Induction sind, wie es bereits im Eingange der Abhandlung gesagt war bez. selbst in entgegengesetzter Richtung magnetisch sein können, als die darunterliegenden. Bohrt man durch einen Stabmagneten ein ihn völlig durchsetzendes Loch, so bildet dieses mit dem äusseren Raume einen zweifach zusammenhängenden Raum, für den dieselben Bemerkungen gelten, wie für die conaxiale Höhle im Ringmagneten.

Aetzt man schliesslich, wie bei den Versuchen von Jamin, die äusseren Schichten des Magneten ab, so wird der Kraftfluss sehr vermindert, aber nicht etwa deshalb, weil die weggeätzten Schichten selbst vorwiegend die Träger des Kraftflusses gewesen wären, sondern weil nun die tiefer liegenden Schichten nicht mehr vor der Nähe der angrenzenden Luft geschützt sind. Es bildet sich ein neues Inductionsgefälle aus und die in Wegfall kommenden Kraftlinien stammen in der Hauptsache gerade aus den ursprünglich etwas weiter zurückliegenden Schichten. Mit den Versuchsergebnissen von Jamin steht daher die hier vorgetragene Theorie keineswegs im Widerspruch.

Ich habe nicht nöthig, besonders darauf hinzuweisen, dass diese Theorie die einfachste Erklärung dafür liefert, dass harte Stahlmagneten nur schwer bis in die tiefsten Schichten magnetisirt werden können, sodass man genöthigt ist, grössere Stahlmagneten aus einzelnen Lamellen zusammenzusetzen. Auch die Verhältnisse beim Magnetisiren eines Stahlstabes durch Streichen mit einem remanenten Magneten ergeben sich ungezwungen aus ihr, obschon auch hier ein tieferes Eingehen eine Hypothese über die Umstände, die den Werth des Vectors $A$ bestimmen, erforderlich machen würde.

Leipzig, im December 1892.

## IV. *Ueber die Bewegung eines electrisirten Körpers in einem Dielectricum; von Ludwig Silberstein.*

Das Studium der Abhandlungen von J. H. Poynting über die Bewegung der Energie in einem electromagnetischen Felde[1]) veranlasste mich, vom Standpunkte der in diesen Abhandlungen entwickelten Theorie aus das Problem der Bewegung eines electrisirten Körpers in einem Dielectricum zu behandeln. Angesichts der Bestätigung, welche die diesbezüglichen Erscheinungen in Hrn. H. Rowland's Versuchen[2]) finden, sollte das erwähnte Problem nicht ohne Interesse sein.

Es bewege sich der Mittelpunkt $O$ einer gleichmässig electrisirten Kugel längs einer Geraden mit der Geschwindigkeit $\omega$ in einem Dielectricum, dessen specifische inductive Capacität gleich $K$ sei. Macht man für's Nächste die Annahme, dass die Kugel *sammt* den von ihrer Oberfläche ausgehenden Inductionsröhren sich wie ein *starres* System bewegt[3]), so wird die in ihnen aufgespeicherte electrische Energie überall im Felde in Richtung des Vectors $\omega$ mit der Geschwindigkeit $\omega$ strömen.

Das Poynting'sche Gesetz der Energiebewegung, welches man sofort aus der von Hertz benutzten Form der Maxwell'schen Gleichungen ablesen kann, besagt, dass überall im Felde, wo die Richtungen der electrischen und magnetischen Kräfte einen von $o$ und $\pi$ verschiedenen Winkel $\theta$ einschliessen, electro-magnetische Energie strömt, und zwar senkrecht zur Ebene, welche die beiden Richtungen enthält. Bezeichnet man die electrische Kraft in einem Punkte mit $\mathfrak{E}$, die magnetische mit $\mathfrak{H}$, so beträgt der Energiestrom, auf Flächen- und Zeiteinheit bezogen, $\mathfrak{E}\,\mathfrak{H} \sin\theta / 4\pi$[4]), und seine positive Richtung

1) J. H. Poynting, Phil. Trans. Roy. Soc. (2) **175**. p. 343. 1885; (2) **176**. p. 277. 1886.

2) Vgl. v. Helmholtz' Ber.; Abhandl. **1**. p. 791 ff.

3) Vgl. die Anm. weiter unter p. 268.

4) Unter $\mathfrak{E}$ ist hierbei der von den Geschwindigkeiten bewegter Materie unabhängige Theil der resultirenden electrischen Kraftintensität

fällt mit der Richtung der fortschreitenden Bewegung einer von $+\mathfrak{E}$ nach $+\mathfrak{H}$ hingedrehten rechtshändigen Schraube zusammen. Unmittelbar gegeben sind dabei im Allgemeinen die electrischen und magnetischen Kräfte, während die entsprechende Energieströmung ein mathematisch fingirter, nicht wahrnehmbarer Vorgang ist. Wo dies der Fall ist, kann also von der Umkehrung des obigen Satzes auch gar keine Rede sein. In denjenigen Ausnahmefällen aber — und zu diesen gehört der zu untersuchende Fall der electrischen Convection —, in welchen man die Existenz einer Energiebewegung anticipiren kann, wird man wohl zu einer Umkehrung des obigen Satzes berechtigt sein und hoffen dürfen, dass, wo electromagnetische Energie strömt, dort auch eine electrische *und* magnetische Kraft sich auffinden lassen wird. Und wenn man die Existenz dieser Kräfte in einem gewissen Falle, sei es nur qualitativ, bestätigt hat (und dies that Rowland in unserem Beispiele), so wird man sicher in diesem Falle zur quantitativen Bestimmung der Kräfte aus der gegebenen Energieströmung sich der Poynting'schen Formel bedienen können.

Darnach wird man voraussehen können, dass durch die Bewegung unserer geladenen Kugel ein magnetisches Feld erzeugt werden wird. Ich habe nun unter Benutzung des oben erwähnten Poynting'schen Gesetzes bei gewissen Annahmen für die erzeugte magnetische Kraft $\mathfrak{H}$ die weiter unten folgende Formel abgeleitet. Weil mir aber diese Ableitungsweise nicht ohne Einwurf zu sein scheint, so übergehe ich dieselbe und lasse hier eine andere, viel befriedigendere und auch viel einfachere, im Grunde aber der eben angedeuteten äquivalente Ableitung folgen.

Wir gehen von dem in der zweiten der oben citirten Abhandlungen Poynting's vorgeschlagenen „modificirten dritten Principe der Maxwell'schen Theorie" aus. Diese Modification sieht folgendermaassen aus: „Wird magnetomotorische Kraft[1])

zu verstehen; die Componenten von $\mathfrak{E}$ sind also nach Maxwell's Bezeichnungsweise:

$$P = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad Q = -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad R = -\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

1) J. H. Poynting, l. c. p. 281; eine von Hrn. Bosanquet herrührende Bezeichnung für das Linienintegral der magnetischen Kraft; vgl. electromotorische Kraft.

durch eine Aenderung des electrischen Feldes oder durch Bewegung von Materie in demselben erzeugt, so ist der Werth der auf eine Längeneinheit berechneten magnetomotorischen Kraft gleich der mit $4\pi$ multiplicirten Zahl der electrischen Inductionsröhren (Einheitsröhren der Induction), welche diese Länge in einer Zeiteinheit durchschneiden oder von derselben durchschnitten werden; dabei sucht die magnetomotorische Kraft magnetische Induction in derselben Richtung zu erzeugen, in welcher eine rechtshändige Schraube sich bewegt, wenn man dieselbe von der Richtung der electrischen Induction nach der Richtung der Bewegung der Längeneinheit, gegen die electrischen Inductionsröhren, hin dreht."[1])

In unserem Beispiel beträgt die electrische Induction durch ein zum Radiusvector $OP = r$ senkrechtes durch den Endpunkt $P$ desselben gelegtes Flächenelement $d\sigma$:

$$\frac{K}{4\pi}\,\mathfrak{E}\,d\sigma = \frac{K}{4\pi}\,\frac{e}{r^2}\,d\sigma,$$

wo $e$ die scheinbare Ladung der Kugel bedeutet. Die Inductionslinien fallen mit den von $O$ ausgehenden Strahlen zusammen, schneiden also $d\sigma$ unter einem rechten Winkel. Bezeichnet man den Winkel $(\omega, r)$ mit $\varepsilon$, so wird $d\sigma$ mit $\omega$ den Winkel $\pi/2 - \varepsilon$ bilden; folglich wird eine in $P$ senkrecht zur Ebene $(\omega, r)$ construirte Längeneinheit in einer Zeiteinheit in Richtung des Vectors $\omega$ von

$$\omega\,\frac{K}{4\pi}\,\frac{e}{r^2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \omega\,\frac{K}{4\pi}\,\frac{e}{r^2}\sin\varepsilon$$

Einheitsröhren der electrischen Induction geschnitten. Diese Zahl nun, mit $4\pi$ multiplicirt, gibt $K e\,\omega \sin\varepsilon / r^2$ für die längs der abgetragenen Längeneinheit wirkende magnetomotorische Kraft, oder, was dasselbe ist, die zu $(r, \omega)$ oder $(\mathfrak{E}, \omega)$ senkrechte Componente $\mathfrak{H}\sin\theta$ der erzeugten magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ (wobei $\theta$ den Winkel zwischen $\mathfrak{H}$ und der Ebene $(\mathfrak{E}, \omega)$ bedeuten soll). Dies ist aber zugleich die *resultirende* magnetische Kraft; denn trägt man die Längeneinheit von $P$ aus längs einer Geraden, die mit der Ebene $(\mathfrak{E}, \omega)$ einen von $90^0$ verschiedenen Winkel bildet, ab, so wird sie von weniger als $e\,\omega\,K \sin\varepsilon / (4\pi r^2)$ Inductionsröhren geschnitten und folglich eine

1) Vgl. Note auf p. 263.

kleinere magnetische Kraft ergeben. Das erlangte Resultat lautet also:

Durch die Bewegung einer mit der scheinbaren Electricitätsmenge $e$ gleichmässig geladenen Kugel in einem Dielectricum wird ein magnetisches Feld:

$$\mathfrak{H} = K \varepsilon \omega \sin \varepsilon / r^2 \tag{1}$$

erzeugt, wo $\omega$ die augenblickliche Translationsgeschwindigkeit der Kugel, $\varepsilon$ den zwischen der augenblicklichen Bewegungsrichtung derselben und dem Radiusvector $r$ enthaltenen Winkel bedeutet; die magnetische Kraft wirkt in jedem Punkte des Feldes, wo $\varepsilon$ von $o$ und $\pi$ verschieden ist, senkrecht zur Ebene dieses Winkels in dem in der beistehenden Figur angedeuteten Sinne.

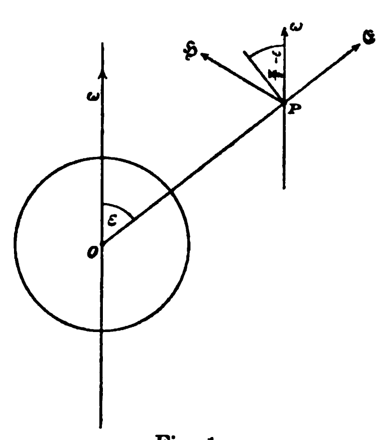



Fig. 1.
($\mathfrak{H}$ erscheint in der Zeichnung gedreht; es soll die Ebene des Papiers von der oberen nach der unteren Seite senkrecht durchsetzen.)

Die bewegte electrisirte Kugel ist also in Bezug auf die magnetischen Effecte —, nach Ampère's electromagnetischem Gesetze —, einem 1 cm langen Stücke eines gewöhnlichen electrischen in Richtung $\omega$ durch $O$ fliessenden Leitungsstromes von der Intensität $K e \omega$ ebenbürtig. Dies Resultat wird noch anschaulicher, wenn man bedenkt, dass $K e$ die mit der Geschwindigkeit $\omega$ fortgeführte wahre electrische Ladung der Kugel ist. Das erzeugte magnetische Feld wird zu jeder Zeit nur von der augenblicklichen Geschwindigkeit und Richtung der Bewegung der Kugel, also nicht etwa von der Krümmung der Bahn oder von der Beschleunigung etc., abhängen. In Bezug auf ein festes Coordinatensystem wird offenbar das magnetische Feld auch bei constantem $\omega$ mit der Zeit sich ändern. Ein unveränderliches Feld, wie das einen ruhenden stationären electrischen Leitungsstrom umgebende, würde man erhalten, wenn man eine Reihe sehr kleiner gleicher und gleich geladener Kügelchen eine nach der anderen in unmittelbarem

Anschluss dieselbe Bahn mit denselben Geschwindigkeiten durchlaufen liesse, so dass das Complex der maassgebenden Beziehungen eines beliebigen Punktes $P'$ im Felde zur Gesammtheit dieser Kügelchen sich mit der Zeit nicht ändere.

Es darf hier nicht unerwähnt bleiben, dass Hr. J. J. Thomson schon vor einer langen Zeit das obige Problem behandelte[1]) und auf einem (wenigstens mathematisch) verschiedenen und mühsamen Wege zu demselben Resultat [Gleichung (1)] gelangte, nur dass bei ihm an Stelle von $K$ die magnetische inductive Capacität $\mu$ des Mediums tritt; seine Gleichung lautet: $\mathfrak{H} = \mu e \omega \sin \varepsilon / \varrho^2$, also nach der obigen Bezeichnungsweise: $\mathfrak{H} = \mu K e \omega \sin \varepsilon / r^2$, weil Thomson unter $e$ die oben mit $Ke$ bezeichnete wahre Ladung der Kugel versteht.[2]) Dies aber musste auch nur durch einen Rechnungsfehler geschehen; denn sein Ausdruck für die magnetische Energie $T$ enthält den Factor $\mu K^2$, und weil $T = \mu / (8\pi) \int \mathfrak{H}^2 d\tau$ ist, müsste $\mathfrak{H}$ nur den Factor $K$, ebenso wie in unserer Gleichung (1) enthalten.

Ein Blick auf die Maxwell'sche Tafel der Dimensionen[3]) lehrt, dass $e \omega \sin \varepsilon / r^2$ im electrostatischen Systeme die Dimensionen $[\mathfrak{L}^{3/2} M^{1/2} T^{-1} . \mathfrak{L} T^{-1} . \mathfrak{L}^{-2}] = [\mathfrak{L}^{1/2} M^{1/2} T^{-2}]$ und im electromagnetischen $[\mathfrak{L}^{1/2} M^{1/2} . \mathfrak{L} T^{-1} . \mathfrak{L}^{-2}] = [\mathfrak{L}^{1/2} M^{1/2} T^{-1}]$, also sowohl in dem einen als in dem anderen Maasssystem die Dimensionen einer magnetischen Kraft hat. Es muss also $K$ in (1) von der Dimension 0, d. h. eine Zahl sein und folglich im electrostatischen Systeme genommen werden.

Bezeichnet man den Radius der bewegten Kugel mit $R$, das Potential derselben mit $V$, so ist $e = R V$, und man hat noch:

$$\text{1a)} \qquad \mathfrak{H} = K V \omega \sin \varepsilon \frac{R}{r^2}.$$

Bewegt sich z. B. die Kugel in trockener Luft, so ist im electrostatischen Systeme $K = 1$ und $\mathfrak{H}$ gleich $V \omega \sin \varepsilon R / r^2$ electrostatischer oder $\omega / v \sin \varepsilon V R / r^2$ electromagnetischer Ein-

1) J. J. Thomson, Phil. Mag. **11.** p. 229. 1881.

2) Denn er schreibt (p. 234):

$$\frac{e^2}{a} = \left(\frac{e}{a}\right)^2 a = K^2 V^2 a,$$

wo $a$ der Radius, $V$ das Potential der Kugel ist.

3) Maxwell, Electr. u. Magn., deutsche Ausg. **2.** p. 319.

heiten, wo $v$ die in einer electromagnetischen Electricitätseinheit enthaltene Zahl electrostatischer Electricitätseinheiten bedeutet.

Bei sonst gleichen Umständen ist also $\mathfrak{H}$ dem Verhältnisse der Translationsgeschwindigkeit der Kugel zur Geschwindigkeit des Lichtes (correcter: der Fortpflanzungsgeschwindigkeit electromagnetischer Störungen von einer sehr grossen Wellenlänge) in dem gegebenen Dielectricum direct proportional.

Quadrirt man die Gleichung (1), multiplicirt mit $\mu / 8\pi$ und integrirt über das ganze magnetische Feld, so erhält man die durch Bewegung der Kugel erzeugte, zur gegebenen Zeit vorhandene magnetische Energie:

$$T = \frac{\mu}{8\pi}\int d\tau\, \mathfrak{H}^2 = \frac{\mu}{8\pi}\int\limits_{\eta=o}^{\eta=2\pi}\int\limits_{\varepsilon=o}^{\varepsilon=\pi}\int\limits_{r=R}^{r=\infty} K^2 e^2 \omega^2 \frac{\sin^2\varepsilon}{r^4} . r^2 \sin\varepsilon\, d\varepsilon\, d\eta\, dr,$$

oder

$$(2) \qquad T = \frac{1}{3}\mu K^2 \frac{e^2_1}{R} . \omega^2 = \frac{1}{3}\mu K^2 V^2 R . \omega^2,$$

wo $V$ das Potential der Kugel ist. Um also der Kugel (ihre Masse sei $m$) die Geschwindigkeit $\omega$ zu ertheilen, muss man, nach dem Gesetze der Erhaltung der Energie und von Reibungserscheinungen abgesehen, auf derselben anstatt der Arbeit $^1/_2\, m\, \omega^2$ die $^1/_2\, m\, \omega^2 + T = {^1/_2}(m + {^2/_3}\mu K^2 V^2 R)\, \omega^2$ verrichten; dieser Arbeitsüberschuss wird nämlich ganz in magnetische Energie umgesetzt. Die Masse der Kugel wird also scheinbar um

$$\frac{2}{3}\mu K^2 V^2 R = \frac{2}{3}\frac{1}{v^2} K V^2 R$$

zugenommen haben[1]), ganz so wie dies bei der Bewegung eines festen Körpers in einer reibungslosen Flüssigkeit geschieht. Bewegt sich die Kugel in einem krystallinischen Medium, so wird die scheinbare Zunahme ihrer Masse je nach der augenblicklichen Richtung der Bewegung verschieden sein.

Wie bemerkt, ist das magnetische Feld in unserem Falle mit der Zeit veränderlich; es wird also in einem in Nachbarschaft der sich bewegenden electrisirten Kugel befindlichen

1) Nach J. J. Thomson's Berechnung beträgt diese scheinbare Massenzunahme $4/15\mu\, K^2\, V^2\, R$. l. c.

unbeweglichen Leiter eine electromotorische Kraft inducirt, weil derselbe, im Allgemeinen, von einer mit der Zeit sich ändernden Zahl magnetischer Inductionsröhren geschnitten werden wird. Hier kommen auch die Beschleunigung der Bewegung und die Krümmung der Bahn der Kugel, welche auf $\mathfrak{H}$ zu jeder Zeit ohne Einfluss waren, in Betracht. Die diesbezüglichen Gleichungen wird der Leser, ebenfalls unter Benutzung der Conception der Bewegung der Inductionsröhren ohne Schwierigkeit ableiten können. — Ebenso wird man das Problem der Bewegung mehrerer Electricitätsträger in einem Dielectricum behandeln können.

Der Vorzug der oben angewandten Conceptionen scheint uns darin zu bestehen, dass man mit Hülfe derselben das Wie? und Wieviel? der electromagnetischen Erscheinungen eher unmittelbar anschaut als berechnet.

---

Es wurde oben die Annahme gemacht, dass die Inductionsröhren mit dem electrisirten Körper sich wie ein *starres* System bewegen.[1]) Nun aber ergiebt sich daraus im Falle der *Rotation* eines electrisirten Körpers ein der Erfahrung widersprechender Schluss, wodurch wir gezwungen werden, die obige Annahme als eine grobe Annäherung (und dies auch nur im Falle rotationsloser Bewegung) aufzufassen und dieselbe nachträglich zu modificiren. Bezeichnet man nämlich —, um an den einfachsten concreten Fall zu denken, — die *Rotations*geschwindigkeit unserer geladenen Kugel um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Axe mit $\omega$, so ist das erzeugte magnetische Feld, nach dem Obigen, durch die Gleichung:

$$\mathfrak{H} = 4\pi \cdot \frac{K\mathfrak{E}}{4\pi} r \sin \varepsilon\, \omega = K \frac{e}{r} \omega \sin \varepsilon$$

gegeben, wo $\varepsilon$ jetzt den Winkel zwischen der Drehungsaxe und dem Radiusvector $r$ bedeutet. Integrirt man nun $\mu\,\mathfrak{H}^2 / 8\pi$ über das ganze magnetische Feld, so erhält man:

1) Damit wollen wir natürlich nur gesagt haben, dass der durch den Verlauf der Inductionslinien charakterisirte Zwangszustand in dem Dielectricum sich so fortpflanzt, dass die Inductionslinien ihre Form und Lage in Bezug auf den bewegten Körper ungeändert beibehalten; wir denken also keineswegs an eine wirkliche Bewegung des Dielectricums oder des lichttragenden Aethers selbst, denn eine solche würde sich in unserem Falle mit dem fest-elastischen Charakter desselben nicht vertragen.

$$\frac{\mu}{8\pi} K^2 e^2 \omega^2 \int\limits_{\eta=0}^{\eta=2\pi} \int\limits_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\pi} \int\limits_{r=R}^{r=\infty} \frac{\sin^2\varepsilon}{r^2} r^2 \sin\varepsilon\, d\eta\, d\varepsilon\, dr = \frac{1}{3}\mu K^2 e^2 \omega^2 \int\limits_{R}^{\infty} dr,$$

und es ergiebt sich also für die erzeugte magnetische Energie, folglich auch für die scheinbare Massenzunahme der Kugel ein unendlich grosser Werth. Anders ausgedrückt, würde aus unserer Annahme folgen, dass ein electrisirter Körper in einem Dielectricum keine Drehungen, sondern nur reine Translationen erfahren kann, was offenbar mit der Erfahrung im vollsten Widerspruche steht.

In dieser Hinsicht muss also die Theorie der Bewegung electrisirter Körper corrigirt werden. Dies kann nun erzielt werden durch die Einführung in den Ausdruck der erzeugten magnetischen Kraft $\mathfrak{H}$ einer, bis zu einem gewissen Grade beliebigen, Function von $r$, die, quadrirt und von $R$ bis $\infty$ integrirt einen *endlichen* Werth ergiebt, oder — physikalisch — durch die Annahme, dass die Inductionslinien nicht starr (im obigen Sinne des Wortes) sind, sondern bei Bewegung des electrisirten Körpers desto mehr *zurückbleiben,* je weiter wir uns von der Oberfläche des letzteren entfernen. Dazu bieten sich mehrere Wege dar; es scheint mir aber naturgemäss und am einfachsten, die Annahme zu machen, dass die Inductionslinien nicht instantan in ihrer ganzen Länge ausgebildet werden, sondern dass 1) der ihnen entsprechende Zwangszustand von einem jeden electrischen Theilchen aus radial mit einer *endlichen* Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in dem Dielectricum fortgepflanzt wird, und dass 2), wenn das electrische Theilchen sich bewegt, die Geschwindigkeit $u'$ irgend eines Elements einer Inductionslinie kleiner ist als die Geschwindigkeit $u$ des daselbst befindlichen Elements einer starren mit dem electrischen Theilchen fest verbundenen Geraden in dem Verhältnisse $u' : u = 1 / (1 + \tau)$, wo $\tau$ die Zeit ist, während welcher der Zwangzustand von

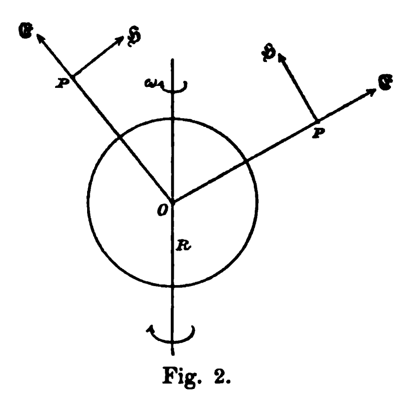


Fig. 2.

dem electrischen Theilchen bis zu dem betrachteten Elemente fortgepflanzt wird.

Ist das Dielectricum ein vollkommener Isolator, so werden die einmal gebildeten Inductionsröhren ungeändert bleiben, solange das dieselben erzeugende electrisirte Theilchen ruht. Bewegt sich aber das electrische Theilchen, so wird Induction fortwährend zerstört und neugebildet, sodass die Inductionslinien in einem von der Geschwindigkeit des Theilchens abhängigen Maasse sich ausbiegen. Um die Vorstellungskraft zu unterstützen, denke man dabei an ein bewegtes Gefäss, von dem Wasser ausströmt.

Wenden wir das Obige auf unsere rotirende electrisirte Kugel an, so haben wir für die Geschwindigkeit eines von der Kugeloberfläche um $r - R$ entfernten Elements einer Indnctionslinie den Ausdruck:

$$\frac{r\,\omega}{1 + \frac{r - R}{\mathfrak{v}}} \cdot \sin \varepsilon\,,$$

also für die erzeugte magnetische Kraft:

$$\mathfrak{H} = K \frac{e}{r} \frac{1}{1 + \frac{r - R}{\mathfrak{v}}} \cdot \omega \sin \varepsilon. \tag{3}$$

Daraus ergiebt sich für die scheinbare Massenzunahme der Kugel oder für die doppelte magnetische Energie:

$$\bar{m} = 2\,T = \frac{2}{3} \mu K^2 e^2 \omega^2 \int\limits_R^\infty \frac{d\,r}{\left(1 + \frac{r - R}{\mathfrak{v}}\right)^2} = -\frac{2}{3} \mu K^2 e^2 \omega^2 \left[\frac{\mathfrak{v}}{1 + \frac{r - R}{\mathfrak{v}}}\right]_{r=R}^{r=\infty};$$

$$\bar{m} = 2\,T = \frac{2}{3} \mu\, K^2\, e^2\, \omega^2 . \mathfrak{v}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{v}}{v^2} . K e^2 . \omega^2; \tag{4}$$

$\bar{m}$ wird also einen endlichen Werth haben, so lange $\mathfrak{v}$ endlich ist. — Findet keine Rotation statt und ist $\omega$ die Translationsgeschwindigkeit der Kugel, so haben wir:

$$\mathfrak{H} = K \frac{e}{r^2} . \frac{1}{1 + \frac{r - R}{\mathfrak{v}}} \omega \sin \varepsilon \tag{5}$$

an Stelle von (1) zu setzen.

Setzt man $\mathfrak{v} = \infty$, so erhält man für $\mathfrak{H}$ und $\overline{m}$ die früheren Formeln; unsere letzteren Annahmen sind also allgemeiner als die früheren. Würde man durch verfeinerte Experimentalmethoden $\mathfrak{H}$ oder $\overline{m}$ genau bestimmt haben, so könnte man $\mathfrak{v}$, die hypothetische Fortpflanzungsgeschwindigkeit der electrischen Induction, also die der electrischen Anziehungs- und Abstossungskraft in einem gegebenen Dielectricum, aus den obigen Gleichungen berechnen. Ist $\mathfrak{v}$ wirklich eine endliche Grösse, so wird auch die Richtung der electrischen Kraft in einem gegebenen Punkte des Feldes und die Induction durch ein festes Flächenstück sowohl durch Translation also auch durch blosse Rotation der electrisirten Kugel fortwährend geändert; man könnte also die hypothetische Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ vielleicht auch durch Beobachtung dieser Aenderungen berechnen. —

Warschau, September 1892.

## V. *Bolometrische Untersuchungen im Gitterspectrum; von F. Paschen.*

(Hierzu Taf. I Fig. 1—9.)

---

Das ursprüngliche Ziel meiner Arbeit war die bolometrische Ausmessung der normalen Spectra glühender fester Körper. Die Kenntniss der Spectra fester Körper ist von Langley sehr erweitert worden. Dieser Forscher hat mit dem Steinsalzprisma solche Spectren entworfen und die entsprechenden Energiecurven veröffentlicht.[1] Aber seine Curven stellen keine normalen Spectren dar. Die Umrechnung mit Hülfe der Dispersionscurve des Steinsalzes ist mit grossen Unsicherheiten behaftet. Sie erscheint vielfach nicht lohnend, weil Langley's Angaben doch z. B. für 300° sehr untereinander differiren. Es kommt noch die Absorption durch die Substanz des Prisma und der Linsen und die Reflexion an deren Flächen hinzu, welche nicht immer gleich bleibt, da der Incidenzwinkel der Strahlung für das Prisma sich ändert. Ferner ist es nicht möglich, im Ultraroth eine Focusdifferenz zu vermeiden, wenn man mit Linsen das Spectrum entwirft. Die hierdurch entstehenden Fehler können viel ausmachen. Die Curven für 178°, 100° und 0° stellte Langley nach der normalen Scala dar, musste aber dazu die Dispersionscurve des Steinsalzes viel weiter extrapoliren, als es statthaft ist.[2] Neuere theoretische Abhandlungen über diesen Gegenstand zeigen, dass in der That die Langley'schen Messungen als Grundlage für theoretische Schlüsse nicht genügen, und dass es wünschenswerth ist, diesen wichtigen Gegenstand mit grösserer Genauigkeit zu behandeln. Mit dem Beugungsgitter hat Langley nur die Strahlung der Sonne und des electrischen Kohlebogens untersucht. Desains und Curie[3]) haben mit einem Gitter die Strahlung berussten Kupfers von 300° und 150° C. und diejenige glühenden Platins untersucht. Aber ihre Dispersion

---

1) Langley, Ann. de chim. et de phys. VI. **9.** p. 433. 1886.

2) H. Rubens u. B. W. Snow, Wied. Ann. **46.** p. 536. 1892.

3) Desains u. Curie, Compt. rend. **90.** p, 1506. 1880.

war viel zu gering ($^1/_8$ mm Gitterconstante) im Verhältniss zur Breite ihrer Thermosäule, als dass sie brauchbare Resultate hätten finden können.

Wesentlich bessere Resultate schienen in Aussicht, wenn es gelang, diese Messungen mit einem der vorzüglichen Rowland'schen Reflexionsgitter zu machen.

Mir stand ein Plangitter aus Spiegelmetall zur Verfügung. Es hält 568 Striche auf 1 mm und ist 42 mm breit. Mit einem ähnlichen Exemplar hat Langley das Sonnenspectrum durchforscht. Mit dem gleichen Gitter hat F. Kurlbaum[1]) absolute Wellenlängen gemessen. Ich habe ferner bolometrische Apparate, welche erheblich empfindlicher, als diejenigen Langley's sind. Mit diesen Hülfsmitteln wollte ich bei einer 20 bis 100 mal grösseren Dispersion, als unter Benutzung des Prisma das normale Spectrum glühender fester Körper festlegen.

Mein Ziel habe ich nicht erreichen können. Der Grund war unerwartet und liegt an einem eigenthümlichen Verhalten des Gitters.

Ich erhielt mit dem obigen Gitter eine mit merkwürdigen Discontinuitäten behaftete Energiecurve. Die Abweichungen vom continuirlichen Verlaufe waren so erheblich, dass ich grobe Versehen in der Anordnung vermuthete. Allein es hat sich herausgestellt, dass das Gitter die Ursache ist, dass andere Gitter andere Curven ergeben, jede mit anderen eigenthümlichen Discontinuitäten behaftet, und dass es unmöglich ist, mit dem Gitter den genannten Gegenstand zu behandeln. Trotzdem habe ich einige Messungen bei verschiedenen Temperaturen mit zwei Gittern gemacht und will zuletzt auch diese Resultate mittheilen, einmal, weil man an den Curven eine ganz anschauliche Veränderung der Intensitätsvertheilung im Spectrum mit wachsender Temperatur sieht, zweitens, weil meine Curven sich auf Temperaturen von 500 bis 1400° beziehen, während Langley's Zeichnungen die Temperaturen 0° bis 815° umfassen.

Ich beginne zunächst mit der Beschreibung meiner Apparate, und zwar in der Weise, wie ich sie zu der ursprünglich beabsichtigten Untersuchung verwandte.

---

1) F. Kurlbaum, Wied. Ann. **33.** p. 159. 1888.

Die Spectralanordnung

ist derjenigen ähnlich, welche Hr. E. Pringsheim[1]) beschrieben hat. Ein silberner Hohlspiegel $S_1$ (Fig. 1) von 20 cm Brennweite und 10 cm Oeffnung macht die den Spalt *s* durchsetzenden Strahlen möglichst parallel und sendet sie zum Gitter *G*. Ein zweiter gleicher Hohlspiegel $S_2$ vereinigt die zu ihm gelangenden Strahlen zu einem Stück scharfen Spectrums. In der Mitte des scharfen Theiles befindet sich der Streif des Bolometer *B*. Alles ist fest in einer Kiste aufgestellt, an deren einer Wand sich der Spalt befindet. Die Lichtquellen bleiben draussen. Die Kiste ist inwendig geschwärzt. Ausserdem verhüten geeignet angebrachte Blenden und Spiegel, dass diffuses Licht zum Bolometer gelangt. Die Kiste lässt sich ganz verhüllen. Der Winkel $\delta$ war so klein bemessen, wie möglich. Er betrug meistens ca. 29°. Die Anordnung ist am günstigsten zur Ausmessung desjenigen Spectrums, welches über den Bolometerstreif wandert, wenn das Gitter in der Pfeilrichtung gedreht wird.

Die Strahlung ist zwei Silberreflexionen und einer Reflexion vom Gittermetall unterworfen. Ausserdem wird sie durch die nicht bekannte selective Absorptionsfähigkeit des berussten Bolometerstreifs modificirt. Das Gitter steht auf dem drehbaren Tisch eines Spectralapparates von Schmidt & Häntsch. Die Drehungen lassen sich auf 5″ genau an dem von Wanschaff verfertigten Theilkreis ablesen. Sie bewirken, dass immer neue Spectralpartien den Bolometerstreif bedecken, um ihre Energie kund zu thun. Die Zurückführung der Spectrometereinstellungen auf Wellenlängenmaass geschieht durch Linienspectra. Diese Spectra dienen zugleich zur Beurtheilung, ob das in der Ebene des Bolometerstreifs abgebildete Spectrum genügend scharf ist. Offenbar fällt bei dieser Anordnung ein mit der Neigung der Gitterebene variabeler Strahlungsbetrag auf das Gitter. Ferner bedecken den Streif des Bolometers nicht immer eine gleiche Zahl Wellenlängen. Für beides werden an den Galvanometerablenkungen Correctionen angebracht.

1) E. Pringsheim, Wied. Ann. **18**. p. 32. 1883.

Strahlungs-Messapparate.

Wegen der im Vergleich zum Prismenspectrum sehr geringen Intensität des Gitterspectrum war die Empfindlichkeit des Thermo-Apparates auf das Aeusserste zu treiben, welches möglich ist. Hr. C. V. Boys hat in neuerer Zeit das „Radiomikrometer erfunden.[1]) Es ist ein Kreis, gebildet aus zwei verschiedenen Metallen und in einem Magnetfelde aufgehängt. Die eine Löthstelle des Kreises wird bestrahlt und gibt zu einem Thermostrom Veranlassung, der den Kreis im Magnetfelde dreht. Das diesem Instrument von seinem Erfinder gespendete Lob veranlasste mich, es zu versuchen. Ich habe mich lange bemüht, es empfindlicher herzustellen, aber es ist mir nicht gelungen, die von Boys in seiner Arbeit über Mond- und Sternenstrahlung[2]) mit seinem „besten“ Thermobügel erreichte Empfindlichkeit um mehr, als das dreifache zu übertreffen. Da diese Empfindlichkeit die der Langley'schen Bolometer immerhin übertrifft, und das Instrument äusserst bequem und sicher arbeitet, will ich Angaben über meine Erfahrungen mit ihm machen.

Als Metalle dienen am besten[3]) 1. 10 Th. Bi + 1 Th Sb. 2. Sb und Cd in gleichen Aequivalenten. Diese Legirungen giesst man zu kleinen, recht leichten Stäbchen, etwa 0,3 mm dick, 0,5 mm breit und 4 bis 5 mm lang. Man löthet sie ohne jedes weitere Loth je an eine Fläche eines 0,5 mm breiten, 0,03 mm dicken und einige Millimeter langen Silberstreifs, sodass die Löthstellen einander gegenüberstehen. Zum Löthen erhitzt man das Silber und drückt das Metall sanft darauf. Bei einer gewissen Temperatur schmilzt das Metall und haftet beim Erkalten fest am Silber. Der unten herausragende Silberstreif *L* (Fig. 2) bildet das Loth. Als oberer Bügel dient ein leichter Silberdraht, den man beliebig löthen kann; doch legt man seine Löthstellen an die Innenseite der Metalle bei *a*, sodass sie einander möglichst nahe sind. Der fertige Kreis hat die Fig. 2 gezeichnete Form und trägt oben genau über dem Silberstreif ein Glasstäbchen *G* mit einem Spiegel *S*. An dem

1) C. V. Boys, Phil. Trans. **180.** p. 159—186. 1889.
2) C. V. Boys, Proc. Roy. Soc. London. **47.** p. 480—499. 1890.
3) E. Becquerel, Ann. de chem. et de phys. [4] **8.** p. 389. 1866.

Spiegel wird der Quarzfaden $Q$ angekittet, sodass das Silberstreifchen genau in der Verlängerung des Fadens hängt und sich bei einer Drehung um seine Mittellinie dreht. Das Ganze hängt in der centralen Bohrung eines dicken Kupferblockes, der seitlich eine Oeffnung zum Eintritt der Strahlung hat. Hier sind Langley'sche Diaphragmen angebracht. Die Strahlung fällt auf die eine berusste Fläche des Silberstreifs, der hierzu geeignet gebogen und bis zur Löthstelle von den Oeffnungen aus sichtbar ist. Der Kupferblock setzt sich oben in eine Kupferröhre fort, die ein Fenster für den Spiegel hat. Der Quarzfaden ist oben an einen Torsionskopf gekittet. Das Ganze steht auf einem Horizont. Die Polschuhe eines horizontal gelegten Hufeisenmagnets werden zwei gegenüberliegenden Seitenflächen des Kupferblockes genähert. Entweder so, oder durch einen ähnlich angeordneten Electromagneten lässt sich die Intensität des magnetischen Feldes im Kupferblock verändern.

Im allgemeinen wird ein so hergestelltes Instrument zunächst noch eine sehr geringe Empfindlichkeit haben. Der Kreis hat eine geringe Schwingungsdauer, und seine Einstellung im magnetischen Felde ist nicht durch die Torsionslosigkeit des Fadens bedingt. Das paramagnetische oder diamagnetische Verhalten der Materialien, aus denen der Kreis besteht, bedingt die Ruhelage des Systems und gibt die Richtkraft. Man beweist dies leicht, indem man den Kreis durchschneidet, um einen Thermostrom auszuschliessen. Es gibt nun für jeden Kreis ein magnetisches Feld von bestimmter Stärke, in welchem er am empfindlichsten ist. Diejenigen Kreise, welche erst in starken magnetischen Feldern eine kleine Schwingungsdauer haben, sind offenbar die besseren. Genügend eisenfreie Metalle erhielt ich durch wiederholtes Umschmelzen der Legirungen und electrolytische Herstellung des Silbers. Aber weniger diamagnetische und daher bessere Kreise entstehen, wenn man als Bügel einen Silberdraht nimmt, der durch ein Zieh*eisen* gegangen ist. Es ist mir trotz vieler Mühe nicht gelungen, und dürfte unmöglich sein, einen magnetisch indifferenten Kreis herzustellen. Hierin vor allem liegt das Hinderniss, das Instrument empfindlicher zu machen. Je geringer seine Masse, um so besser ist der Kreis. Man macht ihn schmal, damit er

mit allen seinen Theilen in einem gleichmässigen magnetischen Felde hängt. Unter etwa 50 Kreisen, die ich im Laufe der Versuche anfertigte, waren etwa zehn brauchbar und nur zwei, welche den besten der von Boys hergestellten um das dreifache[1]) an Empfindlichkeit überragte. Diese zwei waren in nahe demselben magnetischen Felde am empfindlichsten, hatten in ihm eine Schwingungsdauer von 40″ und gaben bei 2 m Scalenentfernung für die Strahlung einer 6 m entfernten Stearinkerze einen Ausschlag von 60 bis 70 mm Scalentheilen.

Das Instrument hat folgende Nachtheile: 1. Ist es an einen festen Aufstellungsplatz gebunden. 2. Lässt man die Löthstelle bestrahlen, so nimmt diese wie bei der Thermosäule die Temperaturerhöhung nur langsam an, weil die zu erwärmende Masse viel zu gross im Verhältniss zur bestrahlten Oberfläche ist. Lässt man aber den Silberstreif allein bestrahlen, der das Loth zwischen den Metallen bildet, so erfolgt zwar der Ausschlag schneller und ist auch nach 40″ bis 1 Minute beendet; aber dann ist die Empfindlichkeit wegen der Wärmeableitung durch die am Silber liegenden Metallmassen geringer. In der letzten Anordnung habe ich das Instrument immer noch am brauchbarsten gefunden.

Ein anderes Thermoskop, welches einige Empfindlichkeit zulässt, ist das Joule'sche Convectionsthermometer. Ich habe auch ein solches Instrument gebaut und für spectrale Zwecke eingerichtet, habe damit aber nur eine viel geringere Empfindlichkeit erreicht, als die der Langley'schen Bolometer.

Die höchste Empfindlichkeit habe ich mit dem Bolometer erreichen können. Man kann erstens nach dem Vorgang der Hrn. O. Lummer und F. Kurlbaum die Bolometerwiderstände verbessern und zweitens das Galvanometer verfeinern. Ich habe beides gemacht und will meine Resultate angeben.

Zunächst die Widerstände: Das beste Material dazu ist nach meinen Erfahrungen für nicht sehr feine Streifen das Platin-Silberblech von O. Lummer und F. Kurlbaum. Durch die Freundlichkeit des Hrn. F. Kurlbaum und die Bereitwilligkeit der Firma Sy & Wagner habe ich solches von

---

1) Hierbei ist natürlich die Empfindlichkeit des Boys'schen Apparates ohne den grossen Hohlspiegel gemeint, der die Strahlung auf die Löthstelle concentrirte.

0,001 mm und von 0,0005 mm Platindicke benutzen können. Drei 0,5 mm breite und 1,5 cm lange Streifen werden so nahe, wie möglich, nebeneinander ausgespannt und bilden, hintereinandergeschaltet, einen der empfindlichen Widerstände. Die Gesammtbreite eines solchen Widerstandes beträgt 1,8 mm. Zwei solche Widerstände sind auf einem Hartgummirahmen mit zugeschärften Rändern nahe beieinander aufgekittet. Sie werden nur soweit von Silber befreit, wie sie bestrahlt werden sollen. Das Abätzen geschieht so, dass ein kleines Glasröhrchen mit warmer Salpetersäure gefüllt wird, bis eine hohe Flüssigkeitskuppe über dem Rande steht, und dann mit dieser Kuppe die Silberseite bestrichen wird, soweit sie abgeätzt werden soll. Durch geeignetes Aetzen kann man die Widerstände leicht gleich machen und hat, da die Streifen auf der Theilmaschine gleichen Querschnitt erhalten haben, so alles gethan, was für die gleiche Beschaffenheit der zwei Widerstände möglich ist. Es lassen sich so noch Streifen von 0,2 mm Breite abätzen, ohne zu reissen. In derselben Weise, wie das Aetzen, geschieht das Waschen mit Wasser. Hiernach erhalten alle mit Silber noch bedeckten Theile zweckmässig einen dünnen Lacküberzug. Die vom Silber befreite, matte Seite der dünnen Platinschicht wird über einer Petroleumlampe „kalt“ berusst, bis sie mattschwarz ist und keinen metallischen Schimmer mehr zeigt. Auf der anderen Seite sind die Streifen spiegelblank. In dem im Folgenden vorzugsweise benutzten Bolometer betragen die Widerstände je zwölf Ohm. Umgeben sind die Widerstände zunächst je von einem herum gekitteten Behälter, der vorn eine Oeffnung für die Strahlung und hinten ein Glasfenster hat. Möglichst senkrecht unter und über jedem Streif sind kleine Oeffnungen, damit die Luftströmungen möglichst parallel den Streifen geführt werden. Die Streifen sind durch berusste Kupferwände von einander getrennt. Diese Behälter mit den Streifen kommen so in einen dickwandigen Messingkasten, dass der eine Streif sich vor einer Röhre mit Langley'schen Diaphragmen befindet und von hinten durch eine Loupe anvisirt werden kann, der andere aber vor jeglicher Strahlung geschützt ist.

Dicke Manganindrähte bilden die Compensationswiderstände. Zum letzten Abgleichen dient ein dicker Platindraht

mit verschiebbarem Quecksilbercontact. Dies befindet sich zusammen in einem Holzkästchen; aber der Quecksilbercontact lässt sich von aussen roh oder mikrometrisch verschieben. Der Quecksilbercontact muss sehr sorgfältig gearbeitet sein, und die Mikrometerschraube gut functioniren; sonst ist es bei grösserer Empfindlichkeit unmöglich, die Galvanometernadel in ihre Ruhelage zu bringen. Beispielsweise dürfen die Wände des Quecksilberkästchens, welche der Platindraht durchsetzt, nicht von Hartgummi sein, sondern müssen aus einem Materiale bestehen, welches sich dem Draht so eng anschmiegt, dass kein Quecksilber in die Oeffnung mit hineingezogen wird. Erst mit Korkwänden gelang die Regulirung in der gewünschten Weise.

Dieses Bolometer hat vor den sonst üblichen nur den Vorzug einer grösseren Exactheit in seinen Angaben. Ich kann in dieser Beziehung die Angaben von Lummer und Kurlbaum nur bestätigen. Es mag auch infolge seiner günstigen Anordnung für die Erwärmung des Streifs unter dem Einfluss einer Strahlung etwas empfindlicher sein. Erheblich an Empfindlichkeit gewinnt der Thermoapparat aber erst durch Anwendung eines geeigneten Galvanometers. Mit den empfindlichsten käuflichen Galvanometern hätte ich trotz des verbesserten Bolometers wohl keine der folgenden Messungen machen können.

Es ist aber nicht schwer, nach dem Modell des Thomson'schen astatischen Instrumentes ein Galvanometer herzustellen, welches cet. par. ca. 10mal empfindlicher ist, als die besten käuflichen Instrumente. Hr. Snow[1]) hat dies jüngst durch Verbesserung des Magnet- und Rollensystems gezeigt. Vielleicht noch etwas mehr hatte ich für die Zwecke dieser Arbeit allein durch Verfeinerung des Magnetsystems erreicht. Nachdem mit einem solchen Galvanometer die meisten der Messungen gemacht waren, fand ich einen Weg, auf dem man ein Galvanometer erhält, welches noch erheblich mehr leistet. Dies Galvanometer will ich beschreiben[2]), trotzdem nur die wenigsten der folgenden Messungen mit ihm gemacht sind.

1) Snow, Wied. Ann. **47.** p. 214. 1892.

2) Vgl. zum Folgenden F. Paschen, Zeitschr. f. Instrumentenkunde. Januar 1893. p. 13—17.

Der Ausschlag, der im astatischen Galvanometer für einen bestimmten Strom erfolgt, ist abgesehen von der Rollenanordnung proportional dem magnetischen Moment jedes der Magnetcomplexe und umgekehrt proportional der Richtkraft, welche die Ruhelage des astatischen Systems bedingt. Der Ausschlag ist ferner bei gleicher Schwingungsdauer und verschiedenem Trägheitsmoment aber sonst gleicher Anordnung und Beschaffenheit des Magnetsystems umgekehrt proportional dem Trägheitsmoment, weil bei gleicher Schwingungsdauer die Directionskraft proportional dem Trägheitsmomente ist.

Man muss also erstens die Directionskraft verkleinern, zweitens das magnetische Moment jedes der Magnetcomplexe recht gross und zugleich das Gesammtträgheitsmoment recht klein machen.

Bei den käuflichen Instrumenten entspricht das Magnetsystem diesen Bedingungen oft recht wenig, weil man hier immer zu grosses Gewicht auf Solidität legt, resp. die Haltbarkeit des Systems in unzweckmässiger Weise herstellt.

Die erste Bedingung: Kleinheit der Directionskraft ist erfüllbar durch möglichst gleichmässige Anordnung der Magnete und durch Anwendung recht feiner Suspensionen (Quarzfäden). Der Weg, auf dem der zweiten Bedingung am zweckmässigsten genügt wird, ergibt sich aus folgender Ueberlegung:

Als erste Annäherung kann man annehmen, dass das magnetische Moment kleiner und im Verhältniss zu ihrer Länge dünner Magnete proportional ihrem Volumen ist, d. h. bei gleichem Querschnitt ihrer Länge, bei gleicher Länge ihrem Querschnitt. Diese Annahme ergibt Folgendes:

Wenn das System nur Magnete und keinen Spiegel führt, und das Trägheitsmoment des Magnethalters nicht in Betracht kommt, so ist es bei Anwendung von je nur einem Magneten oben und unten gleichgültig, wie dick die Magnete sind, da sich das magnetische Moment in gleichem Maasse, wie das Trägheitsmoment ändert, wenn die Länge der Magnete immer dieselbe bleibt. Führt aber ein System $n$ mal kürzere Magnete als ein anderes, so ist in dem ersten das magnetische Moment $n$ mal kleiner, das Trägheitsmoment aber $n^3$ mal kleiner. Das System mit den kürzeren Nadeln gibt demnach $n^3/n = n^2$ mal grössere Ausschläge, als das mit längeren Nadeln.

Die volle Empfindlichkeit, welche ein System mit gewichtslosen Magnethaltern haben würde, erhält man nicht, weil das Trägheitsmoment der Halter und besonders das des Spiegels in Betracht kommt. Zwei so schwere Magnete anzuwenden, dass das Trägheitsmoment des Spiegels gegen das der Magnete verschwindet, ist unzweckmässig. Auf so schwere Magnete bezieht sich die obige Annahme nicht. Mit nur zwei Magneten erhält man weiter schwer eine genügende Astasirung. Nimmt man aber oben und unten mehr als einen Magneten, so schwächen diese sich gegenseitig etwas; das magnetische Moment wird also nicht in gleichem Maasse, wie das Trägheitsmoment vergrössert. Die Frage, wie viel und wie schwere Magnete bei gegebenem Spiegelgewicht anzuwenden sind, damit das System sich möglichst gut verhält, kann nur der Versuch beantworten. Die ziemlich langwierigen und mühevollen Versuche sind angestellt mit Spiegeln von 0,05 bis 0,03 mm Dicke und 2 bis 4 mm Durchmesser, ferner mit Magneten von 0,01 bis 0,2 mm Dicke. 0,1 bis 0,3 mm Breite und 1 bis 6 mm Länge. Die Spiegel sind durch dünne Versilberung von ausgesuchtem mikroskopischen Deckglas erhalten. Die Magnete sind aus verschieden starken Spiralfedern geschnitten, die in der Taschenuhr die Unruhe bewegen. Sie sind gestreckt, geglüht, gehärtet und kräftig und constant magnetisirt, indem man sie abwechselnd an einem starken Electromagneten strich und längere Zeit auf 100° erhitzte. Sie wurden mit möglichst wenig Schellack auf geeignet dünne Glasfäden geklebt. Den Spiegel klebte man mit ausserordentlich wenig Wachs auf eines der Magnetsysteme. Die Systeme hingen an einem so feinen Quarzfaden, dass dessen Torsion nicht in Betracht kam, in einer Multiplicatorrolle und wurden hier auf ihre Leistungen untersucht.

Es stellte sich zunächst heraus, dass Systeme mit verschieden starken, aber gleich langen und sonst analog angeordneten Magneten sich sehr wenig unterschieden. Bei einer Länge von 4 mm ergaben 0,2 mm dicke Stäbchen schon ein schlechteres System; 0,02 mm Dicke waren wiederum zu fein. Bei einem Gesammtgewicht von 8 bis 12 mg musste das der Magnete 6 bis 10 mg betragen, damit das System sich möglichst gut verhielt. Es war besser, diese 6 bis 10 mg durch

Anwendung vieler, dünner, als weniger, dicker Magnete herzustellen. Das beste dieser Systeme gab cet. par. einen zweimal so grossen Ausschlag, als die schlechtesten, verhielt sich aber in einer ganz gewöhnlichen Rollenanordnung schon so gut, oder besser, als das Snow'sche System in den von ihm verwendeten Rollen. Mit vieler Mühe war also wenig zu verbessern.

Dagegen machte die Anwendung kürzerer Magnete ganz Beträchtliches aus. Ein System mit sonst gleichen, nur 2 mm, statt 4 mm langen Nadeln gab cet par. etwa den dreifachen Ausschlag, und ein solches mit nur 1,5 mm langen Magneten schon den sechsfachen Ausschlag. Wurde nun aus so dünnen Stäbchen ein System mit 5 bis 6 mm langen Nadeln gemacht, dass dessen Trägheitsmoment ungefähr gleich demjenigen des Systems mit 1,5 mm langen war, so gab dies bei gleicher Schwingungsdauer zwölf- bis vierzehnmal kleinere Ausschläge. Nach obiger Voraussetzung muss die Masse der Magnete, welche $n$mal so lang sind, $1/n^2$ derjenigen der kurzen sein, damit das Trägheitsmoment beidemale das gleiche ist. Dann ist ihre Dicke $1/n^3$ der kurzen und ihr magnetisches Moment $1/n^2$ der kurzen.

Der Weg zur Verfeinerung des Thomson'schen Galvanometers ist hiernach in Uebereinstimmung mit den obigen Erörterungen der, die Länge der Magnete zu reduciren. Diesem Verfahren ist durch die Anforderung eine Grenze gesteckt, dass die beiden Magnetcomplexe möglichst gleich seien, und dass sämmtliche Magnete möglichst parallele Axen haben, damit der resultirende Magnet ein möglichst kleines magnetisches Moment hat. Sonst kann das System mit den kürzeren Nadeln nicht zur gleichen Schwingungsdauer astasirt werden, wie das mit längeren. Diese Grenze ist durch die Geschicklichkeit des Verfertigers bedingt. Den Spiegel könnte man schliesslich ganz entbehren und die Drehungen mikroskopisch ablesen oder projiciren.

Ich habe mich zunächst mit dem Nachweis dessen begnügt, was oben angegeben ist, und mit dem besten System ein Galvanometer gebaut.

Das System besteht aus je dreizehn 1 bis 1,5 mm langen Magnetchen, die zu beiden Seiten des Glasfadens einander parallel und voneinander 0,3 mm entfernt auf eine Strecke von

4 mm aufgeklebt sind und so einen der Complexe bilden. Von je zwei gleich langen Magnetchen ist immer einer oben und einer unten befestigt. Der Spiegel hat 2 mm Durchmesser und ist 0,03 mm dick. Er gibt bei geeigneter Beleuchtung und Fernrohr noch bei 3 m Scalenentfernung ein gutes Bild. Das gesammte System wiegt 5 mg, der Spiegel allein weniger als 1 mg. Als Suspension genügt ein einige (5) Centimeter langer Quarzfaden, der aber so dünn, oder dünner als die feinsten Spinnefäden ist. Derselbe hat nur die Aufgabe, das System zu tragen, ohne durch seine Torsion die Directionskraft zu vergrössern. Da die Tragkraft mit der zweiten, die Torsion mit der vierten Potenz der Dicke zunimmt, so ist diese Bedingung für die leichten Systeme erfüllbar. Denn Quarzfäden kann man immer fein genug ziehen. Nur diese Eigenschaft der Quarzfäden ist hier benutzt, die andere, das Fehlen einer elastischen Nachwirkung, kommt dem Galvanometer nicht zugute, da man am besten so dünne Fäden nimmt, dass ihre Torsion nicht merkbar wird. Für die Ruhelage entsteht somit kein wesentlicher Vortheil aus der Verwendung der Quarzfäden im Galvanometer.

Das beschriebene Magnetsystem stellte sich sofort ostwestlich ein. Ist dies nicht sofort der Fall, so kann man es leicht dadurch erreichen, dass man immer dem schwächeren Complex wiederholt einen Magneten nähert, bis genügende Astasirung vorhanden ist. Das System hängt dabei zweckmässig im Inneren einer Glasröhre, deren Wand die directe Berührung der Magnete hindert, bei welcher das System zerbrechen könnte. Die so erreichte Astasirung hält sich monatelang, wenn man niemals stärkere Ströme durch die Rollen schickt. Sie lässt sich übrigens beliebig oft in der beschriebenen Weise wieder herstellen.

Für dieses Magnetsystem habe ich nunmehr eine Rollenanordnung gebaut, und zwar derartig, dass die beiden oberen Rollen ohne Zwischenraum über den unteren liegen. Die Rollen haben 4 cm Durchmesser. Sie sind nach dem günstigsten Axenschnitt construirt und mit Draht von variabelem Durchmesser versehen. Sie führen nach Snow's Vorgang keinen Rahmen. Der Durchmesser der Höhlung beträgt 5 mm. Sie haben ca. zwei Drittel soviel Windungen, als bei Snow,

die Windung mittlerer magnetischer Wirkung liegt aber den Magneten näher.

In dieser Rollenanordnung gab das Instrument bei 60 Ohm Rollenwiderstand und einer ganzen Periode von 6 bis 7″ bei 3 m Scalendistanz 1 mm Ausschlag für den Strom $2{,}3 \,.\, 10^{-11}$ Amp. Die Schwingung hatte dann bei kurz geschlossenem Galvanometerkreis nur einen Umkehrpunkt. Unter ganzer Periode ist dabei die Zeit vom Beginne der Schwingung bis zum Stillstande der Nadel verstanden. Bei geöffnetem oder durch einen grossen Widerstand geschlossenem Kreise erfolgten aber mehr (4) und etwas schnellere Schwingungen. Es liess sich noch weiter astasiren und zwar sehr bequem bis zu einer aperiodischen Schwingung, die bei kurzgeschlossenem Galvanometerkreis 20″ dauerte, bei geöffnetem, oder durch 5000 Ohm geschlossenem einen Umkehrpunkt und eine ganze Schwingungsperiode von 15″ hatte. Dann war seine Constante ca. $3{,}3 \,.\, 10^{-12}$ Amp. Das Galvanometer von Snow gibt cet. par. acht- bis zehnmal weniger.

Bei der geringen Directionskraft entsteht durch Luftreibung und Induction eine starke Dämpfung. Durch Anwendung von Rollen mit Rahmen aus electrolytischem Kupfer, deren Höhlungen ausgefüllt sind und nur einen kleinen kugelförmigen Raum zur freien Bewegung der Magnete haben, liess sich eine so starke Dämpfung erzielen, dass eine Schwingung von 3″ Dauer aperiodisch verlief. Die oben beschriebenen Rollen liessen sich mit solchen austauschen. Die Empfindlichkeit war mit diesen ca. 2,5 mal geringer, als mit denjenigen ohne Rahmen. Die untersten Windungen hatten aber auch einen Durchmesser von 10 statt 5 mm, und der Zwischenraum zwischen den Windungen der vorderen und hinteren Rollen musste 2 mm statt 1 mm genommen werden, damit Raum für den Rahmen und eine Nute blieb, durch welche der Glasstab resp. der Quarzfaden hindurchtrat. Wenn nicht auf höchste Empfindlichkeit, sondern auf schnelle Einstellung gesehen wird, verdient dies Rollensystem den Vorzug.

Die Proportionalität der Ausschläge mit den Stromstärken ist recht befriedigend. Die Präcision ist ebenso gut, wie in den besten käuflichen Galvanometern dieser Art, welche cet. par. hundert bis tausendmal kleinere Ausschläge geben.

Den Galvanometeraufbau mit den Kupferrollen hat die hiesige Firma Janssen & Fügner nach meinen Angaben in sehr correcter Weise ausgeführt.

Das Galvanometer, mit dem ich die meisten der nachstehend beschriebenen Versuche gemacht habe, war weniger empfindlich, da es 3—4 mm lange Magnete und noch nicht die günstigste Rollenanordnung hatte. Es war aber dadurch ausgezeichnet, dass es sich durch einen ca. 0,5 m vertical über dem System geeignet gelegten kurzen Richtmagnet unbeschadet der Constanz der Ruhelage noch sehr viel weiter astasiren liess. Es ist mir möglich gewesen, mit einer Schwingungsdauer von 40″ stundenlang zu arbeiten: allerdings nur in einigen Nächten, weil ich keinen erschütterungsfreien Platz für das Galvanometer habe . Es stand auf den Holzdielen des Zimmers. Bei einer Schwingungsdauer von 30″ konnte ich tagsüber gewöhnlich arbeiten, wenn nicht gerade Eisen in der Nähe bewegt wurde. Mit 20″ Schwingungsdauer hat es eine unveränderliche Ruhelage. Alle diese Schwingungen erfolgten aperiodisch.

Bei einem Scalenabstande von 2,7 m und einem Widerstande von 20 Ohm (hintereinandergeschaltete Rollen), ferner bei einer aperiodischen Schwingung von 30″ Dauer gab es einen Ausschlag von 1 mm Scalentheil, wenn ein Strom $= 1{,}6 \,.\, 10^{-11}$ Amp. die Rollen passirte. Es ist dann noch möglich, bei intensiver Scalenbeleuchtung Ausschläge von 0,1 mm zu bemerken und grössere zu messen.

Die Verbindung dieses letzten [1]) Galvanometers mit dem Bolometer ergab das Folgende: Das Bolometer hielt einen Hauptstrom von 0,06 Amp. aus, ohne dass Schwankungen der Galvanometernadel störten. Der gewöhnlich benutzte Strom betrug aber nur 0,038 bis 0,04 Amp., wurde von einem Accumulator geliefert und an einer Tangentenbussole gemessen. Nach der Einschaltung des Stromes hob man allmählich alle

1) Das empfindlichere Galvanometer ergab natürlich wesentlich mehr, resp. steigerte die Präcision erheblich, wenn man bei gleicher Empfindlichkeit aber kleiner Schwingungsdauer arbeitete. Ich glaube, dass ich mit diesem Galvanometer in einem lichtschwachen und stark dispergirten Gitterspectrum ebensogut messen kann, wie andere mit weniger empfindlicheren Galvanometern im Prismenspectrum.

Nebenschlüsse vor dem Galvanometer auf. Es zeigte sich, dass nach einer einmaligen Justirung der Wheatstone'schen Brücke schon ein einziger Kurzschluss vor dem Galvanometer genügte. Eine geringe Drehung an der Mikrometerschraube des beweglichen Contactes brachte die Galvanrometernadel in die Ruhelage zurück.

Ich habe nicht gemessen, um wieviel bei meiner Anordnung ein Bolometerzweig erwärmt werden muss, damit 1 mm Ausschlag erfolgt. Die von mir gewöhnlich benutzte Empfindlichkeit bei einer Schwingungsdauer der Galvanometernadel von 30″ berechnet sich als dreihundertmal so gross als die, welche O. Lummer und F. Kurlbaum für ihr Beispiel anwandten. Oder: da ich ein funfzigmal empfindlicheres Galvanometer habe als Langley, und den gleichen Hauptstrom anwende, so würde eine Temperaturänderung eines Bolometerzweiges um $1/(50 \cdot 100\,000)^0$ C. 1 mm Ausschlag ergeben.[1]) Bei einer Schwingungsdauer von 40″ und einem Hauptstrome von 0,06 Amp. würde es hiernach noch möglich gewesen sein, Temperaturänderungen eines Bolometerzweiges von der Grössenordnung ein zehn milliontel Celsiusgrad wahrzunehmen. Nimmt man dazu, dass, dank der Arbeit von O. Lummer und F. Kurlbaum, für eine möglichst starke Erwärmung des Streifs unter dem Einflusse einer Strahlung die Anordnung so günstig wie möglich ist, so wird es klar sein, dass die Strahlungsempfindlichkeit so hoch ist, wie sie sich mit den bisher vorliegenden Hülfsmitteln herstellen lässt. Dass diese Empfindlichkeit von einer grossen Präcision begleitet ist, wird weiter unten an einem Beispiele gezeigt.

Es wird auffallen, dass O. Lummer und F. Kurlbaum nur einen Hauptstrom von 0,006 Amp. benutzten und nur einen solchen von 0,004 Amp. benutzen konnten, trotzdem ihre Streifen bei gleicher Dicke doppelt so breit als meine waren. Ich kann dazu nur anführen, dass nach meinen Erfahrungen die vierfachen Bolometer lange nicht so starke Ströme aushalten, wie die einfachen Langley'schen. Für Linearbolometer dürften sie vollends unzweckmässig sein, weil es sehr schwer ist, zwei

1) Eine nachträgliche Bestimmung ergab für die gewöhnlich benutzte Empfindlichkeit ungefähr ein milliontel Celsiusgrad pro 1 mm Ausschlag.

Paare von zwei genügend gleichen einfachen Streifen herzustellen. Beim Flächenbolometer ist es natürlich leichter.

### Ueber die Messung der Temperaturen.

Zur Messung der hohen Temperaturen habe ich das Thermoelement Platin-Platin-Rhodium verwendet. Der Platin-Rhodiumdraht, von Heräus bezogen, hielt 10 Proc. Rhodium und war 0,1 mm dick. Ein anderer Draht, 0,2 mm stark, den die Firma später sandte, verhielt sich thermoelectrisch dem ersten fast völlig gleich. Für meine Zwecke musste die Dicke des Drahtes so gering wie möglich sein. Die Aichung des Elementes geschah nach Hrn. Roberts-Austen[1]) durch die Schmelztemperaturen geeigneter Metalle: Platin, Palladium, Gold, Silber, Blei, alle chemisch rein, und schliesslich siedendes Wasser. Ich konnte nicht in der Weise verfahren, wie Roberts-Austen, weil dabei nur im Innern eines Tiegels die bekannte Schmelztemperatur herrscht, während die Löthstelle von der schmelzenden Masse durch eine Tiegelwand getrennt ist und also bei dem zur Aichung nöthigen Verfahren der Abkühlung bis zum Erstarren und der Erhitzung bis zum Schmelzen schwerlich die betreffende Temperatur hat. Um ferner mit möglichst geringen Mengen der theuern Metalle arbeiten zu können, habe ich mir ein besonderes Galvanometer gefertigt. Ein leichter runder Spiegel hat auf seiner Rückseite geeignete Magnete und hängt in einer ihn eng umschliessenden Büchse. Die hintere Wand der Büchse lässt sich dem Spiegel nähern, bis die Schwingung nur einen Umkehrpunkt hat und die Nadel in etwa 1″ wieder *völlig* in Ruhe ist. Der Spiegel mit Magnet hängt an einem sehr kurzen Quarzfaden in der Mitte einer ihn nicht sehr eng umschliessenden Rolle.

Die Aichung mit einem Metalle, z. B. mit Gold, geschah dann in der Weise, dass die Enden des Thermoelementes in der Knallgasflamme zusammengeschmolzen wurden, sodass ein winziges Kügelchen sie verband. Diese Verbindungsstelle wurde in eine kleine Höhlung eines Kalkblockes gelegt und mit einem kleinen Stückchen Goldes bedeckt. Eine kleine, geeignet von oben dirigirte Knallgasflamme erhitzte das Gold zum Schmelzen

1) Roberts-Austen, Nature. **45.** 7. April. 1892.

und darüber. Wenn das geschmolzene Gold die Löthstelle des Thermoelementes gut umgab, zog man die Flamme fort und sah sofort durch das Beobachtungsfernrohr, resp. gab einem dort bereit stehenden Beobachter ein Zeichen. Mit dem Erkalten ging die Galvanometernadel schnell zurück, blieb je nach der Masse des Goldes 5—30 Secunden an einer Stelle der Scala stehen, während das Erstarren eintrat, und fiel dann langsam weiter. Diese Scalenstelle lieferte den Ausschlag für die Differenz der Temperaturen des erstarrenden Goldes und der anderen Löthstellen. Diese befanden sich in einem Terpentinbad, dessen Temperatur immer bestimmt wurde. Ebenso konnte man bei einiger Uebung den Ausschlag für die Temperatur des schmelzenden Goldes festlegen. Beide Temperaturen sind identisch. Nach der Abkühlung wird das an den Drähten hängende Goldklümpchen in Dampf von siedendem Wasser gehängt und so für genau die gleiche Anordnung der Ausschlag gemessen, der einer Temperaturdifferenz von 100° weniger der der anderen Löthstelle entsprach. Die Controllbestimmung im Dampf von siedendem Wasser war nöthig, weil der Widerstand der dünnen Drähte nicht ganz gegenüber dem Widerstande des übrigen Kreises zu vernachlässigen war. Der Galvanometerwiderstand betrug 10 Ohm, ein Zusatzwiderstand im Kreise 50 Ohm. Danach wurden die Drähte abgeschnitten, neu zusammengeschmolzen und mit einer neuen Probe ungebrauchten Goldes oder einem anderen Metall dasselbe gemacht. Die einmal gebrauchten Proben können nicht wieder benutzt werden, weil sich beim Wiedererhitzen etwas Platin mit dem Golde legirt, sodass dann ein etwas anderer Schmelzpunkt vorhanden sein konnte. Dasselbe tritt ein, wenn man die Flamme auf die Eintrittsstelle der Drähte in das Metall hält. Alle nicht vorher gebrauchten Proben desselben Metalles gaben gut übereinstimmende Werthe. Als Stelle für die Schmelztemperatur des Platins nahm ich den Scalentheil, auf welchem das Galvanometer stand, wenn ein mit der Flamme flüssig gehaltenes Platinkügelchen an den Drähten hing. Dieser Punkt ist unsicher, weil sich dabei Platin mit Rhodium legirt. Meine bisherigen Spectralmessungen reichen auch nur bis zur Schmelztemperatur des Palladiums. Man erhält so je nach dem Platindraht, den man mit dem Platin-

Rhodiumdraht combinirt, sehr verschiedene Curven. Für die vorliegende Arbeit diente ein 0,14 mm dicker Platindraht. Als Schmelztemperaturen nahm ich die folgenden:

| Pb | Ag[1] | Au[1] | Pd | Pt |
|---|---|---|---|---|
| 326 | 945 | 1037 | 1500 | 1775° C. |

Die Zahlen, welche aus den Aichungsbeobachtungen zunächst berechnet wurden, gaben in Scalentheilen den Ausschlag an, der zwischen der Temperatur der anderen Löthstellen und der Schmelztemperatur pro 1° C. Temperaturdifferenz eintreten würde, wenn zwischen der Temperatur der anderen Löthstellen und der Temperatur des siedenden Wassers pro 1° C. Temperaturdifferenz 1 mm Scalentheil Ausschlag erfolgte: Beidemal vorausgesetzt, dass der Ausschlag proportional der Temperaturdifferenz ist. Die so für schmelzendes Blei erhaltenen Zahlen $x$ sind:

| $\Delta T$ | 307,0 | 306,9 | 302,5 | 303,0 | 303,0 | 302,0 | 304,4 | 300,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1,399 | 1,351 | 1,375 | 1,352 | 1,374 | 1,397 | 1,376 | 1,375. |

Im Mittel ergibt sich für eine Temperaturdifferenz $\Delta T = 303,8^0$, $x = 1,375$. Die Zahlen sind mit chemisch reinem Blei verschiedener Herkunft gewonnen. Die folgende Tabelle enthält die Mittelwerthe von $x$ und die zu $\Delta T$ gehörigen mittleren Galvanometerausschläge unter $n$.

| | $\Delta T$ | $x$ | $n$ | $\frac{x}{n^{\frac{1}{4}}}$ |
|---|---|---|---|---|
| Sp. $H_2O$ | 75 | 1 | 17,58 | — |
| Sm. Pb | 303,8 | 1,375 | 97,92 | 0,4371 |
| „ Ag | 923 | 2,045 | 442,5 | 0,4459 |
| „ Au | 1015 | 2,140 | 509,1 | 0,4505 |
| „ Pd | 1473 | 2,327 | 803,5 | 0,4370 |
| „ Pt | 1750 | 2,377 | 975,0 | 0,4253 |

Die letzte Columne enthält die Quotienten $x / n^{\frac{1}{4}}$, die graphisch aufgetragen und geradlinig verbunden wurden und so zur Ermittelung der Zwischenpunkte dienten. Bei den Spectralmessungen wurde dann später die Siedetemperatur des Wassers zur Controlle des Thermoelementes verwendet. Es tritt in der obigen Tabelle hervor, dass das Thermoelement für höhere Temperaturen mehr als zweimal so empfindlich ist, als für niedere.

---

1) Nach einer Messung von Callendar, Phil. Mag. (5) **33.** p. 220. 1892. Die Arbeit von Holborn und Wien erschien erst nach dem Abschluss meiner Berechnungen.

**Messungen.**

Meine bisherigen Messungen beschäftigen sich mit der Strahlung von platinirtem Platinblech. Ich verwandte anfangs nichtplatinirtes Blech; doch wurden die Ausschläge etwas grösser, als ich es platinirte. Nach dem Glühen hat es dann eine matte weisse Oberfläche. Die Form der Energiecurven fand ich nach dem Platiniren nicht merklich verändert. Alle unten gegebenen Messungen sind mit *ein und demselben* Platinstreifen gemacht. Ein 0,1 mm dickes, 8 cm langes und 1 cm breites[1]) Blech wird längs seiner Mittellinie gefaltet, zwischen zwei Klammern parallel und nahe vor dem Spalt ausgespannt und durch einen constanten Strom erhitzt. Die Vereinigungsstelle der Drähte des Thermoelementes wird plattgeschlagen, recht klein gemacht und zwischen die zwei Blechstreifen gesteckt. Durch Anpressen der Blechwände wird die Berührung so innig wie möglich gemacht. Wird das Blech nun durch einen Strom erhitzt; so tritt Folgendes ein: Der Ausschlag im Galvanometer des Thermoelementes entspricht 1) der Temperatur der Löthstelle. Dazu kommt 2) i. A. noch ein Strom, der daher rührt, dass die Drähte das Blech i. A. in Punkten berühren, zwischen denen infolge des Erhitzungsstromes eine Potentialdifferenz besteht. Commutirt man den Erhitzungsstrom, so ist ein anderer Ausschlag im Galvanometer vorhanden. So verschieden aber diese einzelnen Ausschläge auch sein konnten, ihr Mittel blieb immer gleich und ist also wohl anzusehen als der Ausschlag, welcher der Temperatur der Löthstelle des Thermoelementes entspricht. Man kann einwenden, dass die Masse der Schweissstelle des Thermoelementes zu gross sei, als dass sie dieselbe Temperatur, wie das sie umgebende Blech habe, und dass ferner durch die Wärmeableitung der zwei herausragenden Drähte der Ausschlag ein kleinerer sei, als der Temperatur des Bleches entsprechen würde. Dagegen spricht Folgendes: Ob die Schmelzstelle plattgeschlagen war oder nicht, war für den mittleren Ausschlag gleichgültig. Ferner war es gleich, ob die Schmelzstelle tiefer oder weniger tief in den Raum zwischen die Bleche eingeführt war, ob die Drähte dabei die inneren Blech-

1) Zur gleichmässigeren Temperaturvertheilung musste die Breite oben etwas mehr als unten betragen.

wände auch berührten oder nicht. Allerdings ist dies nicht sehr genau festgestellt, weil ich den Erhitzungsstrom nur auf etwa 2—3 Proc. genau maass. Die so gemessenen Temperaturen basiren auf den angeführten Schmelztemperaturen.

Das gefaltete Platinblech wurde so vor dem Spalte ausgespannt, dass das Thermoelement genau in der Mitte vor dem Spalte sass, und ferner so, dass das Gitter gerade ganz von der Strahlung bedeckt war, wenn es normal zu ihr stand. Wurde es dann aus dieser Stellung gedreht, so bedeckte offenbar ein kleinerer Strahlungsbetrag die getheilte Fläche. Sei $S$ die Strahlung, welche diese Fläche erhält, wenn das ungebeugte Bild des Spaltes wieder auf den Spalt zurückfällt, und $\alpha$ der Winkel, um den das Gitter aus dieser Stellung herausgedreht ist, so fällt jetzt die Strahlung $S \cos \alpha$ auf das Gitter. Die Division der Galvanometerablenkungen durch $\cos \alpha$ reducirt auf eine gleiche auffallende Strahlung.

Während der Messung der Galvanometerablenkungen wurde der ganze Spectralkasten verhängt. Nur zur Ablesung der Spectrometertheilung musste der Beobachter seinen Kopf in die Kiste beugen. Es war durch geeignete Blenden möglichst dafür gesorgt, dass dadurch nur sehr geringe Perturbationen der Galvanometernadel eintraten. Die Beleuchtung der Theilung am Spectrometer geschah durch eine erbsengrosse Glühlampe und brachte keine Störung.

Zum Einlassen der Strahlung befanden sich zwei dicke metallene Schieber: der eine zwischen dem erhitzten Blech und dem Spalt. Er diente dazu, die Spaltwände vor stärkerer Erwärmung zu schützen. Ein zweiter zwischen dem Spalt und seinem Hohlspiegel. Beide liessen sich vom Fernrohr aus aufziehen. Geeignet angebrachte doppelwandige Zinkschirme schützten die Kiste vor einer Erwärmung vom Streif her. Wenn beide Schieber heruntergelassen waren, fiel die Strahlung des Gitters auf den Bolometerstreifen. Diese Strahlung bedeutet, abgesehen von der Eigenstrahlung des Gitters, solche Energie, welche von irgend einer Stelle der inneren Wände herkommt und direct vom Gitter reflectirt ist. Die Temperatur im Kasten änderte sich[1]) nur sehr langsam (um Bruchtheile eines

[1]) Vorzugsweise hierin lag es, wenn die Galvanometernadel anfangs nicht ganz ruhig war, sondern langsam wanderte. Nach erfolgtem Temperaturausgleich war fast kein „Drift" mehr vorhanden.

Celsiusgrades in der Stunde). Wurde vor dem Gitter und parallel seiner Ebene ein die getheilte Fläche bedeckender Spiegel auf dem Gittertisch angebracht, so durfte bei heruntergelassenen Schiebern in keiner Stellung des Gittertisches ein Ausschlag erfolgen; bei offenen Schiebern und intensiv beleuchtetem Spalt auch nicht: mit Ausnahme derjenigen Stellung, bei welcher das direct vom Spiegel reflectirte Bild auf das Streifchen fiel. Wurde aber so z. B. die Strahlung einer vor dem Spalt befindlichen Kerzenflamme auf das Bolometerstreifchen gerichtet, so zuckte das Magnetsystem augenblicklich um 90° herum und verlor seine Astasirung. Das ungebeugte Bild des Spaltes erzeugte bei der gewöhnlich benutzten Galvanometerempfindlichkeit 100 mm Scalenausschlag, wenn ein Glas Wasser vor dem Spalt stand, dessen Temperatur 1° C. kälter war, als das Innere des Kastens.

Um das Platinblech auf constante Temperaturen zu erhitzen, diente der Strom von sechs grossen Accumulatoren von je 80 Amp.-Stunden Capacität, die je nach Bedarf theilweise parallel und hintereinander geschaltet wurden. Der Strom wurde regulirt durch Bügel aus 3 mm dickem Nickelindraht, die in Quecksilbernäpfe gesteckt wurden. Sehr kleine Nachregulirungen geschahen mit zwei nebeneinandergespannten Nickelinstangen, auf denen zwei Quecksilbertrommeln mit biegsamen, dicken Zuleitungen verschiebbar waren. Der Strom wurde mit einem Torsionsdynamometer gemessen. Die für den Zweck dieser Arbeit beschaffte Accumulatorenbatterie bewährte sich vorzüglich. Sie hatte für die hohen Temperaturen Ströme von 50—60 Amp. zu geben und leistete dies zur Zufriedenheit.

Die Messungen, die ich bisher anstellte, waren zweierlei Art: Erstens wurde der Platinstreif auf einer constanten Temperatur erhalten, und die Galvanometerausschläge für verschiedene Spectrometereinstellungen festgelegt. Dies ist für verschiedene Temperaturen wiederholt. Es ergeben sich so die verschiedenen Temperaturen entsprechenden Energiecurven. Zweitens wurden bei einer und derselben Spectrometereinstellung die verschiedenen Temperaturen des Streifs entsprechenden Ausschläge gemessen. Es ergibt sich so die Curve, nach der die Intensität eines eng begrenzten Spectralbezirkes (ca. 150 A. E. umfassend) mit der Temperatur zunimmt. Dies wird für verschiedene Spectralstellen wiederholt. Diese letzten Curven

sind auch aus den Energiecurven abzuleiten. Dass ich sie besonders beobachtete, hat ausser dem Interesse, das auch sie bieten, noch folgende Gründe: Erstens blieb bei der ersten Messungsart die Temperatur nicht völlig constant während der oft fünfstündigen Beobachtungsreihen. Die Curven zweiter Art ermöglichen die Correction der hierdurch entstehenden Fehler. Zweitens ist es unzweckmässig, die verschiedenen Temperaturen entsprechenden Energiecurven mit gleicher Bolometerempfindlichkeit zu durchmessen. Die Curven zweiter Art ergeben dann leicht und sicher die relativen Grössenverhältnisse der verschiedenen Energiecurven.

### Die Aichung auf Wellenlängen.

Es werde das Gitter aus derjenigen Stellung, welche das direct reflectirte (ungebeugte) Spaltbild auf den Bolometerstreif fallen lässt, um den Winkel $\gamma$ gedreht, bis die Wellenlänge $\lambda$ des Spectrum I. Ordnung den Streif ganz bedeckt, so ist $\lambda = c \sin \gamma$. Eine Aichung mit den $D$-Linien der fünf ersten Ordnungen ergab z. B.:

| Spectralstelle | Spectrom.-Abl. | Ablenkung $\gamma$ | Wellenl. A. E. | Constante $c$ |
|---|---|---|---|---|
| Directes Bild | 274° 16′ 40″ | 0 | 0 | |
| Mitte der $D$-Linien I. Ordn. | 264 20 0 | 9° 56′ 40″ | 5893,2 | 34125 |
| „ „ „ II. „ | 254 3 55 | 20 12 45 | 11786,4 | 34114 |
| „ „ „ III. „ | 243 3 35 | 31 13 5 | 17679,5 | 34111 |
| „ „ „ IV. „ | 230 33 45 | 43 42 55 | 23572,7 | 34110 |
| „ „ „ V. „ | 214 32 5 | 59 44 35 | 29465,9 | 33113 |
| | | | Mittel | 34115 |

Da $d\lambda = c \cos \gamma \, d\gamma$ ist, wächst die Dispersion umgekehrt proportional $\cos \gamma$. Zur Reduction auf das normale Spectrum führt die Division der Galvanometerausschläge durch $\cos \gamma$. Das directe Spaltbild hatte eine Breite von 17′, der Bolometerstreif von 18′. Ihn bedeckten bei einer Ablenkung von 6° 177 A. E., bei einer solchen von 75° 47 A. E. Die Division durch $\cos \gamma$ bedeutet die Umrechnung auf denjenigen Galvanometerausschlag, der vorhanden wäre, wenn bei jeder Gitterstellung 184 A. E. auf den Streif fielen: die Spectrometereinstellung ergibt die mittlere dieser 184 A. E., also die in relativem Maasse gemessene Energie, die innerhalb dieser 184 A. E. vorhanden ist. Langley's Bolometerstreif wurde bei seinen analogen Versuchen von 4000—20000 A. E. bedeckt.

Um einen Einblick in meine Messungen zu ermöglichen, schreibe ich als Beispiel eine vollständige Versuchsreihe aus dem Beobachtungsjournal ab mit den ersten dazugehörigen

Berechnungen: und zwar eine Reihe bei der tiefsten meinen Messungen noch bequem zugänglichen Temperatur, bei welcher nahezu die äusserst mögliche Empfindlichkeit meiner Apparate zur Geltung kam. Die Messungen bei geringeren Empfindlichkeiten verliefen viel exacter. Die Messung ist nachts zwischen 9 und 1 Uhr gemacht.

Spectrometereinstellung des ungebeugten Spaltbildes: ocular 274° 17′ 0″; bolometrisch 274° 16′ 55″; das Bild auf den Spalt zurück 260°; der Bolometerstrom = 31,8° Tangentenbussole = 0,0403 Amp.; Schwingungsdauer des Galv. = 40″; Stand der Nadel: ruhig; Erhitzungsstrom fürs Platinblech = 54° Torsionsdyn. = 2,6 $\sqrt{54}$ Amp.; Thermoelement: Temperatur des Terpentins = 22,5° C.; Ablenkung durch den Erhitzungsstrom in der einen Richtung 231,1 mm, in der anderen Richtung 166,5 m, Mittel 198,8 mm; 198,8 mm entspricht der Temperaturdifferenz 525°; corrigirte Temperatur des Streifs: 547,5° C.; der Streif war eben mit dunkelrothem Licht sichtbar (im dunklen Zimmer).

| Spectrometereinstellung | Wellenlänge in A. E. | Galvanometerausschläge einzelne | Mittel | Ausschlag corrig. nach $\alpha$ und const. Dispersion | Temp. d. Streifs in ° C. |
|---|---|---|---|---|---|
| 245° | 16 681 | 7,5 5,7 6,4 6,6 | 6,55 | 7,8 | 547,5 |
| 260° | 8 414 | 2,3 2,5 1,2 2,2 | 2,05 | 2,11 | |
| 255° | 11 262 | 1,6 2,0 1,9 2,8 | 2,08 | 2,21 | 547,0 |
| 253° | 12 380 | 2,5 3,1 2,6 | 2,7 | 2,9 | |
| 252° | 12 932 | 2,7 4,4 2,9 | 3,3 | 3,6 | |
| 251° | 13 481 | 3,7 3,1 3,1 | 3,3 | 3,6 | |
| 250° | 14 025 | 3,5 2,0 2,7 3,1 | 2,8 | 3,1 | |

| Spectrometereinstellung | Wellenlänge in A. E. | Galvanometerausschläge einzelne | Mittel | Ausschlag corrig. nach $\alpha$ und const. Dispersion | Temp. d. Streifs in ° C. |
|---|---|---|---|---|---|
| 249° | 14 566 | 2,2<br>2,7<br>2,8 | 2,6 | 2,9 | |
| 248° | 15 102 | 3,9<br>4,9<br>4,9 | 4,6 | 5,24 | |
| 247° | 15 633 | 5,9<br>7,4<br>6,8<br>6,1 | 6,55 | 7,54 | |
| 247° 30′ | 15 368 | 4,7<br>7,1<br>6,1 | 6,0 | 6,89 | 547,0 |
| 246° 30′ | 15 896 | 7,2<br>6,4<br>7,6<br>7,2 | 7,10 | 8,25 | |
| 246° | 16 159 | 6,6<br>7,5<br>7,5 | 7,20 | 8,4 | |
| 245° 30′ | 16 421 | 5,8<br>7,2<br>7,0 | 6,7 | 7,9 | |
| 245° | 16 681 | 6,7<br>6,6<br>6,3 | 6,5 | 7,7 | |
| 244° 30′ | 16 940 | 6,4<br>6,9<br>6,3 | 6,5 | 7,7 | |
| 244° | 17 198 | 5,9<br>6,8<br>6,4 | 6,4 | 7,7 | |
| 243° | 17 709 | 5,4<br>5,4<br>6,0 | 5,6 | 6,9 | |
| 242° | 18 215 | 5,0<br>6,4<br>5,3<br>6,0 | 5,7 | 7,1 | |
| 241° | 18 715 | 4,5<br>5,6<br>5,2 | 5,1 | 6,5 | |
| 240° | 19 210 | 5,1<br>5,2<br>5,0 | 5,1 | 6,5 | |
| 238° | 20 182 | 5,1<br>4,9<br>5,3 | 5,1 | 6,83 | |
| 236° | 21 128 | 4,1<br>4,5<br>6,9(?) | 4,9 | 6,9 | 547,0 |

| Spectrometereinstellung | Wellenlänge in A. E. | Galvanometerausschläge einzelne | Mittel | Ausschlag corrig. nach $\alpha$ und const. Dispersion | Temp. d. Streifs in °C. |
|---|---|---|---|---|---|
| 234° | 22 050 | 5,1<br>4,8<br>4,7 | 4,9 | 7,5 | |
| 232° | 22 945 | 4,3<br>4,5<br>4,6 | 4,5 | 6,9 | |
| 230° | 23 811 | 3,3<br>4,0<br>4,0 | 3,8 | 6,1 | |
| 225° | 25 848 | 2,2<br>2,0<br>2,1 | 2,1 | 3,9 | |
| 220° | 27 689 | 2,5 | 2,5 | 5,6 | |
| 215° | 29 319 | 2,8<br>2,6 | 2,7 | 7,4 | |
| 210° | 30 725 | 2,0<br>2,8 | 2,4 | 8,5 | |
| 205° | 31 898 | 1,2<br>1,2<br>0,9 | 1,1 | 5,4 | 546,3 |
| 245° | 16 681 | 5,9<br>7,0 | 6,45 | 7,7 | |

Thermoelement: $\left.\begin{matrix}229,0\\166,4\end{matrix}\right\}$ 197,7 mm = 521° C.; Temperatur des Terpentins — 25,3; Temperatur des Blechs 546,3° C.; Erhitzungsstrom: 2,6 $\sqrt{53,2}$ Amp.; Bolometerstrom = 31,8° Tangentenbussole = 0,0403 Amp.; directes Bild bei 274° 17′ 0″ (bolometrisch); Galvanom. = 40″ Schwingungsdauer. Der Stand der Nadel änderte sich in der ersten Stunde um etwa 100 mm Scalentheile. Nachher nicht mehr bedeutend.

### Resultate.

Fig. 3 stellt das Spectrum einer Glühlampe dar, deren Kohlebügel eine Temperatur von ca. 1500° C.[1]) hatte, und deren Strahlung mittels eines dritten silbernen Hohlspiegels auf den Spalt concentrirt war. Curve 1 ist direct beobachtet. Durch die Correctionen wegen variabeler Gitterneigung und variabeler Dispersion entsteht aus ihr Curve 2, welche erst

1) Mit Rücksicht auf die für gemessene Temperaturen erhaltenen Energiecurven geschätzt.

von ca. 2 $\mu$ an eine merklich andere Gestalt zeigt. Eine ähnliche Curve gab die Strahlung der Kohletheilchen in der leuchtenden Gasflamme, die Strahlung von Platin, welches entweder durch den electrischen Strom, oder durch ein Leuchtgasluftgebläse erhitzt wurde, und schliesslich der heissesten Kohlentheile des electrischen Lichtbogens. Die sämmtlichen Discontinuitäten finden sich in allen diesen Energiecurven. Sichtete man eine dieser Strahlungen durch eine 0,2 mm dicke Hartgummiplatte, die von etwa 0,8 $\mu$ an gut durchlässig war (Fig. 4, Curve 1), oder durch eine 1 cm dicke Schicht concentrirter Alaunlösung, die von etwa 1,4 $\mu$ an stark absorbirte (Fig. 4, Curve 2), so konnte man beweisen, dass das Spectrum I. Ordnung bis etwa 2 $\mu$ nicht erheblich durch Uebergreifen der II. Ordnung getrübt war. Diese II. Ordnung wurde erst von etwa 1,7 $\mu$ an merkbar. Durch die Alaunabsorption verschwindet das zweite grössere Maximum bei 1,56 $\mu$, durch die Hartgummiplatte wird der Verlauf der Curve hier nicht geändert. Dies Maximum gehört daher zur I. Ordnung.

Der Grund dieser Discontinuitäten und vor allem das tiefe Minimum bei 1,47 $\mu$ kann liegen erstens an einer Discontinuität des selectiven Reflexionsvermögens der zwei benutzten Silberspiegel. Die Messungen des Hrn. H. Rubens[1]) zeigen zwar nichts Derartiges; aber bei seinem im Verhältnisse zu seiner Dispersion sehr breiten Bolometerstreifen könnte es unbemerkt geblieben sein. Ich habe mir daher durchsichtige und möglichst gleichmässige Silberschichten hergestellt und ihr Absorptionsspectrum durchsucht, habe aber in der Nähe von 1,47 $\mu$ durchaus keinen anderen Verlauf der Curve finden können. Benutzte ich umgekehrt die Reflexion eines dritten silbernen Hohlspiegels, um den Spalt zu belichten, so ergab sich ebenfalls kein erheblich anderer Verlauf der Curven. Die Correction der gegebenen Curven wegen zwei- resp. dreimaliger Silberreflexion nach den Zahlen von Rubens ändert ihren Verlauf wenig.

Der Grund kann ferner liegen an einer Discontinuität im selectiven Reflexionsvermögens des Rowland'schen Spiegelmetalles. Ich habe daher die Strahlung mit einem zweiten

1) H. Rubens, Wied. Ann. **37**. p. 254. 1889.

grossen Rowland'schen Reflexionsconcavgitter auf den Spalt concentrirt[1]) und das Spectrum aufgenommen, aber trotz dieser zweiten Reflexion am Spiegelmetall keinen anderen Verlauf und besonders kein tieferes Minimum erhalten.

Als dritter Grund wäre möglich eine Discontinuität im selectiven Absorptionsvermögen des Bolometerstreifs. Ist dies schon unwahrscheinlich im Hinblick auf die vielen Untersuchungen, die schon mit Bolometern im prismatischen Spectrum gemacht sind, ohne hier etwas Auffälliges zutage gefördert zu haben, so kann ich noch anführen, dass ich einige der hier angeführten Spectra auch mit einem anderen 0,5 mm breiten und mit Kampherruss statt Petroleumruss geschwärzten Bolometer durchmessen habe. Diese Curven verliefen ganz analog den hier angeführten. Der Spalt hatte dabei 0,5 mm Breite, während er bei den hier ausführlich behandelten Versuchen 1,8 mm breit war. Das Minimum wurde dadurch nicht schmaler. Es wäre viertens möglich, wenn auch aus demselben Grunde, wie Möglichkeit 3 unwahrscheinlich, dass die Kohlensäure oder der Wasserdampf der Luft die Strahlung in der Nachbarschaft der Minima stark absorbirten. Wiederum konnte eine zu grosse Breite des Bolometerstreifs dies bei früheren Untersuchungen im prismatischen Spectrum verdeckt haben. Ich habe daher die Wellenlänge 1,467 $\mu$ des Argandbrennerspectrum auf den Bolometerstreif eingestellt und den Ausschlag gemessen. Danach wurden möglichst viele Schalen mit Phosphorsäure in den Kasten gebracht, und dieser soweit es möglich war, verhängt. Es trat in vier Stunden durchaus keine nachweisbare Aenderung des Ausschlages ein. Darauf liess ich einen Strom von Kohlensäure in den verschlossenen Kasten; aber auch dies bewirkte keine erwähnenswerthe Aenderung des Ausschlages. Wenn also hierin die Ursache der Minima zu suchen wäre, so müssten bereits so geringe Mengen Wasserdampf oder Kohlensäure die volle beobachtete Intensitätsschwächung hervorbringen, dass ein Mehr oder Weniger davon nichts mehr ausmacht. Die von der Strahlung meistens durchsetzte Luftschicht war ca. 1 m lang, bei einigen Reihen

---

1) Das ungebeugte Bild der Lichtquelle verstärkt durch die Spiegelung an der nicht getheilten Fläche dieses Gitters.

aber auch, wenn ein Hohlspiegel zur Belichtung des Spaltes diente, 2 m lang, ohne dass dadurch Unterschiede auftraten.

Es wäre also entweder hierin der Grund zu suchen, oder endlich in einem eigenthümlichen Verhalten der Gitterfurchen, infolgedessen gewisse Spectralparthien lichtschwächer werden, als andere benachbarte.

Nachdem ich die obenerwähnten Messungen, von denen noch zuletzt die Rede sein soll, gemacht hatte, reinigte ich das Gitter, indem Ammoniak auf die geritzte Fläche gegossen und mit einem weichen Leinen durch Wischen längs der Furchen wieder entfernt wurde. Hierdurch werden die Gitter wieder blank und geben lichtstärkere Spectren. Die Schärfe von Linienspectren wird durch das Putzen nicht beeinträchtigt. Als ich es nunmehr aber untersuchte, erhielt ich eine erheblich veränderte Energiecurve, die ich in Fig. 3, Curve *a* wiedergebe.

Vor dem Putzen war immer nur das eine Spectrum des Gitters benutzt, welches sich durch grössere Lichtstärke auszeichnete, und an der Justirung der Anordnung nie etwas geändert.

Das andere Spectrum gelangt bei meiner Anordnung zur Messung, wenn man entweder das Gitter nach der anderen Seite herumdreht (entgegen der Pfeilrichtung Fig. 1), oder besser, indem man das Gitter auf den Kopf stellt und dann nach der gewöhnlichen Seite dreht. In der letzten Anordnung ist dann nichts geändert, nur erhalten die Furchen bei jeder Gitterstellung das Licht von einer Richtung, die symmetrisch ist zu derjenigen, von der es bei der ersten Anordnung auf das Gitter fällt.

Ich habe nach der Reinigung das andere Spectrum nach diesen beiden Anordnungen aufgenommen. Ich erhielt genau die gleiche Curve, ob das Gitter nach der anderen Seite gedreht ward, oder ob es umgekehrt und dann nach der gewöhnlichen Seite gedreht wurde. Nur die Intensitäten waren in beiden Fällen etwas verschieden; aber dies ist aus der stärkeren Gitterneigung gegen die einfallende Strahlung bei der ersten Anordnung zu erklären. Dies andere Spectrum zeigt ferner keine grossen Unterschiede von dem ersten Spectrum. Die Curve dieses anderen Spectrum Fig. 3, Curve *b* hat nur den

Unterschied, dass zwischen 0,5 und 0,86 $\mu$ eine kleinere und von 1,5 $\mu$ an eine im Verhältniss zu den übrigen Spectralstellen grössere Energie vorhanden ist, als in dem ersten Spectrum (lichtschwächeres Spectrum I., lichtstärkeres II. Ordnung).

Das Resultat, dass sich das Rowland'sche Gitter durch die Reinigung geändert hat, wird nicht mehr wunderbar erscheinen, wenn man die Energiecurven betrachtet, welche andere Gitter ergeben. Durch die Freundlichkeit des Hrn. Geheimrath Quincke erhielt ich erstens ein Rowland'sches Plangitter von gleicher Dispersion, wie das obenerwähnte des Hannoverschen Institutes. Furchenabstand = 0,00176 mm. Es hatte nur eine erheblich kleinere getheilte Fläche. Zweitens ein Nobert'sches Gitter, welches versilbert war und so als Reflexionsgitter diente. Es hielt 4501 Striche auf 20,3 mm und ist das als Nobert V in Quincke's Arbeiten[1]) bezeichnete Gitter. Furchenabstand = 0,004519 mm. Drittens ein ebensolches Nobert'sches Gitter, aber mit nur 901 Strichen auf 13,53 mm: Quincke's Gitter Nobert IX. Furchenabstand 0,015013 mm: ausgezeichnet nach Quincke durch aussergewöhnlich tiefe Furchen.

Die beiden Gitter eins und zwei wurden mit dem gleichen 1,8 mm breiten Bolometer untersucht, das Gitter drei wegen seiner geringen Dispersion mit einem 0,2 mm breiten Bolometerstreifen und entsprechend engem Spalt.

Die Strahlung war für alle diese Gitter die gleiche: nämlich eine kleine Glühlampe mit einem ca. 1000° C.[2]) heissen Kohlebügel, die durch die Accumulatorenbatterie gespeist ward. und von der mittels eines dritten silbernen Hohlspiegels ein Bild auf den Spalt geworfen wurde. Ich gebe hier nur die direct beobachteten Galvanometerablenkungen an, da die Correction wegen Gitterneigung und variabeler Dispersion erstens nur bei dem Rowland'schen Gitter von 2 $\mu$ an die Gestalt der Curve etwas ändert, zweitens geringfügig erscheint gegenüber den sonstigen grossen Verschiedenheiten in den Curven. Ebenso unterlasse ich absichtlich die Correction wegen der Silberreflexion, die sehr wenig ausmacht.

1) G. Quincke, Pogg. Ann. **146.** p. 14. 1872.
2) Vgl. p. 396. Anm. 1.

Fig. 5, Curve *a* stellt die Curve des einen Spectrum des Rowland'schen Gitters von Quincke dar. Das andere Spectrum war im sichtbaren Theil lichtstärker, im ultrarothen Gebiete aber gleich lichtstark. Es zeigte *jede Zacke genau in gleicher* Weise, wie das erste Spectrum. In Curve *b* ist nur der lichtstärkere Theil dieses Spectrum dargestellt. Der übrige Verlauf ist fortgelassen, da er fast ganz mit der Curve des ersten Spectrum zusammenfällt und die Uebersicht erschweren würde.

Fig. 6, Curve *b* stellt die Energiecurve derselben Strahlung dar, welche das eine Spectrum des Silbergitter Nobert V ergab, Curve *a* die Curve des anderen Spectrum dieses Gitters. Es war für dies und das vorhergehende Gitter wieder gleichgültig, ob man das andere Spectrum durch Drehen des Gitters nach der anderen Seite, oder so erzeugte, dass das Gitter auf den Kopf gestellt und nach der gewöhnlichen Richtung (Pfeilrichtung Fig. 1) gedreht wurde.

Fig. 7, Curve *a* ergab das eine Spectrum des Gitters Nobert IX, Curve *b* das andere, gleichgültig wie es erzeugt ward. Keine von den gezeichneten Zacken in den Spectren beruht auf Beobachtungsfehlern. Jede der Curven ist mehrfach beobachtet und gab stets an gleicher Stelle den gleichen Verlauf.

Abgesehen von den ganz verschiedenartigen Discontinuitäten in den Curven der verschiedenen Gitter liegt nicht einmal der Haupttheil der Energie auch nur annähernd immer an gleicher Stelle. Bei dem Rowland'schen Gitter des Hannoverschen Institutes liegt er zwischen 0,6 resp. 0,8 $\mu$ und 1.8 $\mu$, bei dem Rowland'schen Gitter des Heidelberger Institutes zwischen 0,9 und 2,7 $\mu$, ungefähr ebenso bei dem einen Silbergitter. Dagegen ist bei dem anderen Silbergitter mit den tieferen Furchen und der kleineren Dispersion zwischen 0,8 $\mu$ und 1,5 $\mu$ nur wenig Energie im Verhältniss zu derjenigen zwischen 1,5 und 2,6 (Curve *a*) resp. 4,1 $\mu$ (Curve *b*) vorhanden. Bei einigen Curven ist es wegen der starken Discontinuitäten schwer zu sagen, wo der Haupttheil der Energie liegt.

Die theoretischen Arbeiten über die Intensitätsverhältnisse im Gitterspectrum führen zu sehr complicirten Formeln. Die Quincke'sche Formel p. 31 seiner citirten Abhandlung ist

nicht nur einige Reihen der Annalenseite lang, sondern führt vor allem Grössen, die von der Form der Gitterfurchen abhängen und deren genauere Bestimmung der Beobachtung entgeht (Furchen-Tiefe und -Breite).

Ich weiss nicht, ob nach einer Theorie ein so gezackter Verlauf der Energiecurven zu erwarten war, wie ich ihn beobachtet habe. Wenn Langley Gitterspectra zu bolometrischen Messungen verwendete, und wenn W. H. Julius[1]) bedauerte, dass er für seine bolometrischen Arbeiten keine Rowland'sches Gitter habe erhalten können, so scheint unter den Physikern doch wohl bisher die Ansicht geherrscht zu haben, dass man mit einem guten Gitter auch ein brauchbares normales Energiespectrum erhält. Dass die Uebereinanderlagerung der Spectra und die geringe Intensität unbequem seien, ist eine häufig wiederkehrende Bemerkung, dass aber in einem verhältnissmässig kleinen Spectralbezirke solche Intensitätsschwankungen vorkommen können, wie meine Curven zeigen, dürfte nicht zu erwarten gewesen sein.

Wenn bisher bei photographischen Aufnahmen oder ocularen Messungen im Gitterspectrum derartige Erscheinungen nicht beobachtet sind, so muss man erstens berücksichtigen, wie klein der dem Auge und der gewöhnlich benutzten lichtempfindlichen Platte zugängliche Spectralbezirk gegenüber den hier durchmessenen Spectren ist. In kleineren Spectralbezirken kommen auch in meinen Curven nur selten sehr starke Discontinuitäten vor. An den gewöhnlich mit dem Gitter hergestellten Linienspectren wird man ferner überhaupt schwerlich diese Erscheinung wahrnehmen können, da man ja die Intensität nicht kennt, welche den Linien im normalen Energiespectrum zukommen würde, ganz abgesehen davon, dass es fraglich erscheint, ob man eine Intensitätsschwankung von ca. 20 Proc., die sich über 5000 AE. erstreckt, ocular oder auf dem Negativ bemerken würde. Es sind indessen schon Beobachtungen gemacht, die sich wohl an meine Erfahrungen anschliessen, nämlich, dass bei einem grösseren Rowland'schen

1) W. H. Julius, Licht- und Wärmestrahlung verbrannter Gase. Berlin, Leonh. Simion 1890.

Concavgitter alle Spectra von einer bestimmten Wellenlänge im Ultraviolett an plötzlich aufhörten.[1])

Meine Versuchsanordnung war nicht darauf angelegt, auf Grund einer Theorie diese Verhältnisse näher zu untersuchen. Ein naheliegender Gedanke ist der, dass die Gestalt der Energiecurven wesentlich durch den Furchenbau bedingt ist. Für einen complicirten Furchenquerschnitt, wie er für die verhältnissmässig tief in Glas geritzten Nobert'schen Gitter wohl anzunehmen ist, erhält man eine verwickeltere Curve, als für die weniger tief und wohl regelmässiger gefurchten Metallgitter.

Das Auftreten von Maximen und Minimen in rascher Folge in der Curve *eines* Spectrums würde darauf hindeuten, dass die Furche aus vielen gegeneinander geneigten Flächen besteht. Es werden dann bevorzugte Richtungen vorhanden sein, wohin gemäss der Lagerung der reflectirenden Flächen in der Furche und der Richtung des einfallenden Lichtes mehr Licht gelangt, als nach anderen, benachbarten Richtungen. Dann muss die Lage der Zacken auf der Wellenlängenscala von dem Einfallswinkel der Strahlung abhängen, wie es von Quincke für die Hauptmaxima der Intensität l. c. erörtert wird.

Der Einfallswinkel blieb bei meinen Versuchen nicht constant. Er war nun z. B. für gleiche Spectralstellen derjenigen zwei Spectren verschieden, welche durch Drehung des Gitters nach den zwei verschiedenen Seiten entstanden. Es ist gezeigt, dass die Energiecurven für die Nobert'schen Gitter dann auch sehr verschieden sind, nicht aber bei den Rowland'schen.

Weiter müssen bei meiner Versuchsanordnung die Maxima nach anderen Wellenlängen rücken, wenn man den Winkel zwischen dem einfallenden Licht und der Beobachtungsrichtung (Collimatorrohr und Fernrohr) $\sphericalangle\, \delta$ Fig. 1 der bei meiner Anordnung für ein Spectrum constant blieb, änderte. Ich habe dies, soweit es die Anordnung erlaubte, gemacht und allerdings eine Verschiebung der Maxima erhalten. Fig. 6, Curve *a* des Silbergitters Nobert V entspricht dem gewöhnlich benutzten Winkel $\delta = 29^0$. Durch Verstellen des Spiegels $S_2$ Fig. 1

1) Kayser u. Runge, Ueber die Spectren der Elemente. Abh. der Berl. Ak. der Wiss. 1888. Theil I. p. 17.

vergrösserte ich ihn zu $38^1/_2{}^0$. Weiter wurde nichts geändert. Die dann erhaltene Curve $a_1$ zeigt eine deutliche Verschiebung einiger Maxima. An den Zacken der zwei Curven sind die Spectrometerablenkungen aus derjenigen Gitterstellung angeschrieben, bei welcher das ungebeugte Bild des Spaltes den Bolometerstreif bedeckte. Die Zacken sind durch die Vergrösserung des Winkels $\delta$ für ca. $9^0$ (1,3 $\mu$) nicht verschoben, für kleinere Spectrometerablenkungen nach kürzeren, für grössere mehr und mehr nach längeren Wellen verschoben. Dazu sei im Hinblick auf die Quincke'sche Theorie bemerkt, dass bis zu einer Spectrometerablenkung von $16^0$ 52′ der Einfallswinkel der Strahlung für eine gleiche Spectrometerablenkung für die Curve $a_1$ grösser war, als für die Curve $a$. Bei $16^0$ 52′ sind die Einfallswinkel gleich; für grössere Spectrometerablenkungen gehört der grössere Einfallswinkel für die gleiche Spectrometerablenkung zur Curve $a$. Die Vorzeichen dieser Einfallswinkel sind dabei bis $14^1/_2{}^0$ gleich, bis $19^1/_4{}^0$ verschieden, und für grössere Spectrometerablenkungen wieder gleich. Nach Quincke rückt ein Intensitätsmaximum bei Vergrösserung des Einfallswinkels nach kürzeren Wellenlängen. Der von mir beobachtete Effect steht somit angenähert im Einklange mit Quincke's Theorie.

Aus meinen Versuchen gehen folgende Eigenschaften der untersuchten Gitter hervor.

Die Rowland'schen Gitter geben sehr angenähert oder vollständig gleiche Energiecurven, ob das Gitter bei meiner Anordnung nach rechts oder links gedreht wird, wobei die Einfallswinkel der Strahlung erheblich variiren. Stellt man das Gitter auf den Kopf, so ändern sich diese Spectren nicht.

Die versilberten Glasgitter gaben verschiedene Spectren bei einer Links- und Rechtsdrehung des Gitters. Stellt man das Gitter auf den Kopf, so erscheint jetzt bei einer Gitterdrehung rechtsherum genau die gleiche Curve, welche bei der ersten Stellung des Gitters durch eine Linksdrehung erhalten wird.

Die von mir gezeichneten Curven sollten nach Langley continuirlich verlaufen. Ihre Gestalt sollte noch von der Temperatur des glühenden Körpers abhängen. Man sieht letzteres bestätigt an den Curven Fig. 8. Es sind die Energie-

curven für den auf verschiedene Temperaturen erhitzten Platinstreif, welche mit dem Rowland'schen Gitter des Hannoverschen Institutes vor seiner Reiniguug erhalten sind. Sie sind also mit der Curve 2, Fig. 3 vergleichbar. Diese Curven entsprechen verschiedener Galvanometerempfindlichkeit und stehen bezüglich der Höhe ihrer Ordinaten in solchen Verhältnissen, wie die Beobachtung sie ergab. Die angeschriebenen Zahlen bedeuten die Temperaturen des Platinstreifs in Celsiusgraden, wie sie beobachtet sind.

Die Form dieser Curven in der Umgebung des Minimum bei 1,467 $\mu$ ist sehr verschieden. Die Curve der Temperatur 547° C. hat ihren Gipfel bei 1,6 $\mu$, einen langsamen Abfall zum Minimum und für kürzere Wellen eine eben noch hervortretende neue Erhöhung. Mit wachsender Temperatur wird der Abfall von längeren Wellen zum Minimum steiler, und die Ordinaten links vom Minimum wachsen mehr und mehr. Bei 1120° C. erscheinen beide Gipfel zu beiden Seiten des Minimum fast gleich hoch. Bei 1340° ist der linke aber bereits der höhere.

Dies Verhalten beweist, erstens dass die Erhöhung rechts vom Minimum zur I. Ordnung gehört, wie schon durch die Absorption des Alauns oder der Hartgummiplatte gefunden wurde (p. 297), zweitens dass das Energiemaximum, bei niederen Temperaturen längeren Wellen angehörend, mit steigender Temperatur bis an das Minimum und darüber hinaus nach kürzeren Wellen rückt.

Mit dem Rowland'schen Gitter von Quincke habe ich ebenso drei verschiedene Temperaturen untersucht, die sich so auf Fig. 5 als Curve 1, 2, 3 finden, wie die Beobachtung sie ergab (ebenfalls verschiedener Galvanometerempfindlichkeit entsprechend). Auch an ihnen ist die mit der Temperatur wechselnde Energievertheilung im Spectrum deutlich zu sehen.

Die zweite Art von Curven, die ich beobachtete, und welche die Abhängigkeit der Lichtintensität der Strahlung eines engbegrenzten Spectralbezirkes (ca. 150 A. E.) von der Temperatur des Platinstreifs darstellen, findet sich auf Fig. 9, wie sie mit dem Gitter des Hannoverschen Institutes beobachtet wurden. Die angeschriebenen Zahlen bedeuten die Wellenlängen. Die Curve für 14562 A. E. hat so kleine Ordinaten,

weil an dieser Stelle das tiefe Minimum liegt. Diese Curven haben eine ähnliche Form, wie die von Nichols[1]) für sichtbare Wellenlängen photometrisch gefundenen „isochromatics", mit welchen also meine Curve für 6083 A. E. vergleichbar ist.

Mit Hülfe dieser Curven kann man die Curven Fig. 8 in die richtigen Grössenverhältnisse zueinander setzen. Doch kann eine solche Darstellung hier nicht wiedergegeben werden, da die Curve für 547° C. nur dann deutlich würde, wenn die für 1410° eine für die Annalentafeln zu grosse Höhe erreichte. Die höchste Ordinate der ersten Curve würde etwa 3,8 betragen, wenn die der zweiten ca. 1180 wäre.

Hannover, December 1892.

1) E. L. Nichols, Am. Journ. of Sc. a. A. III. V. 18. p. 465. 1879.

## VI. *Zum Grundgesetz der Complementärfarben; von Paul Glan.*

---

Im 92. Bande der Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien habe ich Untersuchungen veröffentlicht, welche eine genaue Bestimmung der Stärke der Complementärfarben, wie für mein Auge, und der Schwächung gestatten, welche sie im Auge bis zur lichtempfindenden Schicht erleiden. Es hatte sich mir dabei, nach meinen Bestimmungen, das einfache Gesetz ergeben, dass die Mengen complementärer Farben, in Energiemaass gerechnet, gleich gross in der wahrnehmenden Schicht der Netzhaut sein müssen um Weiss zu geben und dass für dieselbe Menge Weiss bei sämmtlichen Paaren solcher Farben dieselbe Lichtmenge in Energiemaass erforderlich ist.

Zu den Bestimmungen hatte ich mich des von mir im 24. Bande von Pflüger's Archiv beschriebenen Spectrocolorimeters bedient. Dasselbe gestattete einmal irgend zwei spectrale Farben neben einander zu vergleichen und ihr Helligkeitsverhältnis in beliebiger messbarer Weise zu ändern, wie es zur Untersuchung Farbenblinder wünschenswerth ist, zweitens gestattet es den Vergleich von messbar veränderlichem Weiss mit einer beliebigen in ihrer Stärke messbar zu variirenden Spectralfarbe. Drittens kann man mit ihm zwei Spectralfarben in bestimmbarer Menge mischen und mit messbar veränderlichem Weiss vergleichen. Das Spectrocolorimeter lässt sich aber auch so vervollkommenen, dass man mit ihm die Mischung zweier Spectralfarben mit einer beliebigen anderen Spectralfarbe oder auch mit einer Mischung einer solchen mit Weiss vergleichen kann, wobei die Menge des Weiss oder der Spectralfarbe, welche bei einer Einstellung des Spectrocolorimeters zur Wirkung kommt, durch dasselbe messbar ist. Zu dem Zweck kann man ein zweites kleines, um die Axe des Tisches des Apparates drehbares und zugleich gegen dieselbe zu neigendes Rohr, ähnlich dem, durch welches das weisse Licht

geht, anbringen, in dem ein kleines Spectroskop mit gerader Durchsicht ohne Ocular — etwa ein Browning'sches — steckt, dessen Spaltende der Milte des Spectrocolorimeters abgekehrt ist. Am einen Ende desselben kann man zwei polarisirende Prismen, ein feststehendes und ein messbar drehbares, um die Helligkeit des von diesem kleinen Spectroskop erzeugten Spectrums messbar zu ändern, anbringen. Das Licht, welches durch dies zweite kleine seitliche Rohr geht, wird entweder an der Hinterfläche des Flintglasprismas des Spectrocolorimeters unmittelbar gespiegelt, oder an einer keilförmig an sie gesetzten schwarzen Glasplatte, und gelangt in das Betrachtungsfernrohr, auf dessen Ocularspalt es bei passender Einstellung des kleinen seitlichen Spectroskops ein Spectrum entwirft. Durch Neigung des kleinen Spectroskops mit gerader Durchsicht entwirft man dessen Spectrum im dunklen Zwischenraum neben den Mischfarben der Spectren des Doppelspaltes des Spectrocolorimeters, zwischen diesen und einem der Einzelspectren desselben. Auf dieses Spectrum dicht neben den Mischfarben kann man dann noch eine messbare Menge Weiss durch das andere seitliche Rohr des Spectrocolorimeters für unzerlegtes weisses Licht entwerfen und so entweder eine Mischung zweier Spectralfarben mit einer beliebigen einzelnen Spectralfarbe allein vergleichen oder mit einer Mischung der letzteren und Weiss.

Zu der Beschreibung des Spectrocolorimeters, welche ich im 24. Bande von Pflüger's Archiv gegeben habe, ist noch hinzuzufügen, dass der Doppelspalt, dessen beide Hälften gegen einander verschiebbar sind, zwei horizontale Messingstreifen hat, den einen breiteren und kürzeren aussen vor seiner Mitte, wie es in der soeben erwähnten Beschreibung angegeben ist, und dann noch einen zweiten schmäleren innen vor seiner Mitte, der sich vor den ganzen Schnitt legt, in dem die obere und untere Hälfte des Doppelspaltes zusammenstossen. Er ist bei der Anfertigung des Apparates angebracht worden um einmal das Durchdringen von Licht durch diese Schnittfuge zu verhindern, durch welches ein weisslicher Streif zwischen den beiden Spectren des Doppelspaltes entsanden sein würde und dann, um eine Deckung des durch das Rochon'sche Prisma des Spectrocolorimeters abgelenkten Bildes des einen

Spaltes mit dem nicht abgelenkten des anderen des Doppelspaltes zu erreichen.

Ist der breitere Messingstreif aussen vor der Mitte des Doppelspaltes, so grenzt das abgelenkte Bild der einen Spalthälfte an das nicht abgelenkte der anderen, und bei passender durch die Schieber an ihnen geregelter Länge der Spaltenhälften sieht man dann zwei mittlere, sich berührende Spectren, an die sich beiderseits schwarze Streifen schliessen, die wieder durch je ein Spectrum begrenzt sind. Man kann auf diese Weise durch Benutzung der mittleren Spectren die Empfindlichkeit eines Auges gegen Farben- oder Helligkeitsunterschiede prüfen, durch Entwerfen eines weissen Streif auf den dunklen Streif oder auf ein Spectrum Weiss mit den Spectralfarben vergleichen oder mischen, auch die verweisslichten Spectralfarben mit den reinen vergleichen.

Ist nur der schmälere Messingstreif hinten vor der Mitte des Doppelspaltes vorhanden, und das Beobachtungsfernrohr auf ihn eingestellt, so deckt sich bei passender Länge der Spalthälften ein abgelenktes Bild der einen mit einem nichtabgelenkten der anderen und man sieht dann im Ocularspalt eine Mischfarbe beiderseits begrenzt durch einen dunklen Raum, an den sich je eine Spectralfarbe anschliesst. Auf einen dunklen Raum kann dann Weiss oder eine Spectralfarbe vom Spectrum des kleinen seitlichen Spectroskops mit gerader Durchsicht oder eine Mischung beider entworfen und mit der Mischfarbe aus zwei Spectralfarben verglichen werden.

Man könnte das Spectrocolorimeter auch in der Weise verwenden, dass man nach Entfernung des Oculars, nach dem Vorgange von Maxwell, das Auge unmittelbar hinter den Ocularspalt hielte; man sähe dann die Objectivlinse des Beobachtungsfernrohrs durch die nächstliegende Kante des Flintglasprismas in zwei Theile getheilt, welche mit den zu vergleichenden Farben erfüllt wären. Um auf diese Weise alle die zuvor angegebenen Farbenvergleichungen vornehmen zu können, könnte das Rohr für weisses Licht auf derselben Seite des Flintglasprismas angebracht werden, wie das kleine Spectroskop mit grader Durchsicht. An die Basis des Flintglasprismas müsste dann unter einem Winkel mit keilförmig zugeschrägter Kante zunächst der Objectivlinse des Beobachtungsfernrohrs

eine planparallele durchsichtige Glasplatte angesetzt werden. Von dieser würde dann weisses Licht in die eine Hälfte der Objectivlinse gespiegelt. Durch die Platte, von der Basis des Flintglasprismas reflectirt, ginge das spectral zerlegte Licht des kleinen seitlichen Spectroskops mit gerader Durchsicht zur selben Hälfte der Objectivlinse, wie das weisse Licht. Durch diese Hälfte hindurch könnte man dann entweder weisses Licht allein, oder eine Spectralfarbe allein, oder beide gemischt auf den Ocularspalt im Beobachtungsrohr fallen lassen und sähe dann diese Hälfte entsprechend gefärbt. Durch die andere Hälfte der Objectivlinse gelangte dann entweder eine einzelne Spectralfarbe zu jenem Ocularspalt, wenn die Hälften des Doppelspaltes des Spectrocolorimeters über einander liegen, oder ein Gemisch zweier, wenn das nicht der Fall ist.

Man könnte auf diese Weise mit dem Spectrocolorimeter. indem man das Auge dicht vor den Ocularspalt seines Beobachtungsfernrohres hält, in den Hälften der Objectivlinse des letzeren, entweder zwei Spectralfarben in veränderlichem Helligkeitsverhältniss vergleichen, oder ein Gemisch zweier Spectralfarben entweder mit einer einzelnen Spectralfarbe oder mit einer solchen und Weiss in durchweg veränderlichem Mengenverhältniss.

In der Eingangs erwähnten Arbeit habe ich nur die Schwächungsindices für die Medien des Auges bis zum gelben Fleck im ganzen für die einzelnen Spectralbezirke angegeben. Es ist aber von allgemeinem Interesse, sie für die einzelnen Theile des Auges zu kennen. Sie sind nach den Bestimmungen von R. Franz berechnet worden, welcher durch Messung der Intensität im sichtbaren und überrothen Theil eines Flintglasspectrums vor und nach Einschaltung der Theile des Auges Einsicht über die Durchlassfähigkeit derselben für die verschiedenen Spectralbezirke zu gewinnen suchte. Er maass die Intensität im hellen und überrothen Theil eines Sonnenspectrums, das durch ein Flintglasprisma entworfen war und dessen Strahlen durch eine leere kubische Glasflasche gingen. ehe sie die Thermosäule trafen. Dieselbe diente zur Aufnahme von Flüssigkeiten, deren Diathermasie untersucht werden sollte. Er theilt dabei das helle Spectrum in sechs gleichbreite Zonen, welche den Hauptfarben des Spectrums

entsprachen, und setzte diese Zonen in gleicher Breite in den überrothen dunklen Theil des Spectrums fort. Langley hat für ein Flintglaspectrum die Winkelabstände der einzelnen Theile desselben angegeben und nach Messungen mit seinem Bolometer die zugehörigen Wellenlängen. Danach liess sich die Wellenlänge der Mitte der einzelnen Zonen in dem Flintglasspectrum von Franz bestimmen. Als Ausgangspunkt wurde, das mit Sicherheit in beiden Spectren als gleich anzusehende helle Spectrum genommen. Dies wurde auf der von Langley angegebenen Theilung in sechs gleiche Theile getheilt und diese dann in gleicher Breite in den überrothen Theil hinein fortgesetzt. Aus den der Langley'schen Theilung beigegebenen Werthen der ihren einzelnen Punkten zugehörigen Wellenlängen liessen sich dann die Wellenlängen der Mitte der Zonen von Franz bestimmen. Danach ergab sich:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Mitte | der | fünften | dunklen | Zone, | $\lambda$ = 3118,6 $^{\mu}$ |
| „ | „ | vierten | „ | „ | $\lambda$ = 2739,3 „ |
| „ | „ | dritten | „ | „ | $\lambda$ = 1797,3 „ |
| „ | „ | zweiten | „ | „ | $\lambda$ = 1290,3 „ |
| „ | „ | ersten | „ | „ | $\lambda$ = 850,7 „ |
| „ | des | Roth | „ | „ | $\lambda$ = 669,6 „ |
| „ | „ | Gelb | „ | „ | $\lambda$ = 567,4 „ |
| „ | „ | Grün | „ | „ | $\lambda$ = 499,5 „ |
| „ | „ | Blau | „ | „ | $\lambda$ = 454,9 „ |
| „ | „ | Indigo | „ | „ | $\lambda$ = 419,8 „ |
| „ | „ | Violett | „ | „ | $\lambda$ = 392,9 „ |

Die Mitte der fünften dunklen Zone von Franz lag etwas jenseits der Grenze des Ueberroth von Langley und ist durch interpolirende Fortsetzung des Langley'schen Spectrums gefunden. Da Franz einen verhältnismässig breiten Spalt und keine absorbirenden Glaslinsen anwandte, so scheint sein überrother Teil etwas länger gewesen zu sein, als der von Langley.

Bei der Untersuchung der Theile eines Auges wurden der hum. aq., die Krystalllinse, der hum. vitr. zwischen Glasplatten oder Glaswänden an die Stelle der kubischen Glasflasche bei der zuvor erwähnten Anordnung gebracht und die Intensität an den einzelnen Stellen, das heisst für die eben angegebenen Zonen mit der Thermosäule bestimmt. Die Hornhaut wurde über das kugelförmige, mit Spaltausschnitt versehene Ende eines Cylinderrohres gespannt, dessen anderes Ende mit eine

Glasplatte bedeckt war. Bei Einschaltung der Augenmedien ging das Licht also gleichfalls durch Glasplatten und veränderte Intensitätsvertheilung im Spectrum konnte dann nur fast ausschliesslich von den Augenmedien herrühren. Franz giebt diese Intensitätsvertheilung in der Weise an, dass er stets die Stärke im Roth 10 setzt und die der übrigen Zonen dann im Vergleich zu jener angiebt. Er findet danach die Absorptionskraft der Augenmedien ähnlich der des Wassers, nur die Hornhaut und die Krystallinse schwächen das rothe Licht stärker.

Aus seiner Angabe der Vertheilung der Intensität im Flintglasspectrum des Sonnenlichtes ohne Einschaltung schwächender Flüssigkeiten und nach Durchgang desselben durch die Augenmedien lässt sich danach die Lichtschwächung für die letzteren in den einzelnen Theilen des Spectrums in folgender Weise bestimmen. Für den blauen und violetten Theil des Spectrums hat er bei einem Theile der von ihm untersuchten Theile des Auges keine Angaben über Messungen gemacht, wir können aber aus seinen Daten für den mittleren und rothen Theil des Spectrums für den ersteren die Uebereinstimmung der durchsichtigen Augenmedien mit Wasser in Bezug auf Lichtschwächung annehmen. Wir können also von der Lichtschwächung derselben für die mittleren Spectralfarben absehen. Ist für eine solche, zum Beispiel für die gelbe Zone, die Lichtstärke $a$, für eine andere Zone, deren Schwächungsindex $x$ beim eingeschalteten Theil des Auges ist, die Lichtstärke $b$ gefunden worden und sind $a'$ und $b'$ die entsprechenden Lichtstärken für dieselben Zonen, wenn der betreffende Theil des Auges nicht zwischengeschaltet war, so müssen wir haben:

$$\frac{x^{-1}b}{a} = \frac{b'}{a'},$$

und können danach $x$ bestimmen. Wir erhalten so den Schwächungsindex für die untersuchte Dicke des betreffenden Theiles des Ochsenauges, dessen Medien R. Franz der Untersuchung unterwarf und können ihn daraus vermittels des bekannten Absorptionsgesetzes für die Dicke des entsprechenden Theils des menschlichen Auges berechnen, denn die verschiedenen dem menschlichen gleich zusammengesetzten Augen

sind in Bezug auf die Durchlassfähigkeit nach den Messungen von Janssen nicht wesentlich verschieden.

*Hornhaut.* Die in den Versuchen von R. Franz durchstrahlte Hornhaut eines Ochsenauges hatte nach meinen Messungen einer solchen eine Dicke von 1,7 mm. Die Dicke der menschlichen Hornhaut habe ich nach Krause in der Mitte zu 0,445 par. Linien angenommen. Es ergaben sich folgende Werthe des Schwächungsindex:

| $\lambda$ | Schwächungsindex | $\lambda$ | Schwächungsindex |
|---|---|---|---|
| 3118,6 $\mu$ | — | 567,4 $\mu$ | 1 |
| 2379,3 „ | — | 499,5 „ | 0,8823 |
| 1797,3 „ | 0,4093 | 454,9 „ | 0,8280 |
| 1290,3 „ | 0,6646 | 419,8 „ | 0,9540 |
| 850,7 „ | 0,6482 | 392,9 „ | 0,9533 |
| 669,6 „ | 0,5973 | | |

Als vollkommen durchsichtig ist hierbei die Hornhaut für die gelbe Zone angenommen, mit deren Helligkeit die reducirten Lichtstärken der anderen Zone nach der zuvor angegebenen Weise verglichen sind. Für die vierte und fünfte dunkle überrothe Zone fehlen Angaben bei Franz.

*Wässerige Feuchtigkeit.* Sie hat nach Franz für die hellen Strahlen dieselbe Durchlassfähigkeit wie Wasser. Der Schwächungsindex für dieselbe ist danach vom Roth bis zum Violett gleich 1 zu setzen. R. Franz untersuchte eine Schicht von 8 mm Dicke und macht directe Zahlenangaben für Roth, dessen Lichtstärke 10 gesetzt ist, und die drei ersten dunklen Zonen im Ueberroth. Indem ich das ungeschwächte Roth als Vergleichszone für die anderen nahm, fand ich unter Annahme einer Dicke der wässrigen Feuchtigkeit von 2,79 mm im menschlichen Auge die folgenden Werthe für die Schwächungsindices.

| $\lambda$ | Schwächungsindex | $\lambda$ | Schwächungsindex |
|---|---|---|---|
| 3118,6 $\mu$ | — | 567,4 $\mu$ | 1 |
| 2379,3 „ | — | 499,5 „ | 1 |
| 1797,3 „ | 0,6547 | 454,9 „ | 1 |
| 1290,3 „ | 0,9081 | 419,8 „ | 1 |
| 850,7 „ | 1 | 392,9 „ | 1 |
| 669,6 „ | 1 | | |

Für die beiden äussersten Zonen im Ueberroth hat Franz Angaben nicht gemacht. Der Schwächungsindex der ersten

dunklen überrothen Zone für die von ihm untersuchte Dicke der wässerigen Feuchtigkeit von 8 mm ergab sich in der vorher angegebenen Weise berechnet gleich 1,164. Da er nicht grösser als 1 sein darf, so stellt der Ueberschuss über die Einheit den Beobachtungsfehler dar. Franz selber gibt ein Beispiel für die starke Veränderlichkeit der Durchlassfähigkeit der Luft an und sie kann zu solchen fehlerhaften Werthen der Schwächungsindices führen. In diesem Fall habe ich den Ueberschuss über 1 als Fehler betrachtet und den Schwächungsindex gleich 1 gesetzt.

*Krystalllinse.* Es wurde hier Gelb zur Bestimmung der Schwächungsindices nach der zuvor angegebenen Berechnung desselben gewählt, mit dem das Licht der übrigen Zonen des Spectrums von Franz verglichen wurde. Die Dicke der menschlichen Krystalllinse des lebenden Auges ist nach v. Helmholtz zu 3,6 mm angenommen. Sie entspricht der Accommodation des Auges für die Ferne, wie sie für ein Auge wohl anzunehmen ist, welches zwanglos durch ein Fernrohr beobachtet, und das war bei den im folgenden besprochenen Beobachtungen wie bei meinen eigenen früheren wohl der Fall. Es ergab sich nach R. Franz, für die Schwächungsindices der Krystalllinse des lebenden menschlichen Auges im ruhenden Zustande:

| $\lambda$ | Schwächungs-index | $\lambda$ | Schwächungs-index |
|---|---|---|---|
| 3118,6 $\mu$ | — | 567,4 $\mu$ | 1 |
| 2379,3 „ | — | 499,5 „ | 0,7775 |
| 1797,3 „ | 0,3649 | 454,9 „ | (0,6313) |
| 1290,3 „ | 0,8382 | 419,8 „ | (0,5166) |
| 850,7 „ | 0,7012 | 392,9 „ | (0,4281) |
| 669,6 „ | 0,5553 | | |

Für die vierte und fünfte dunkle überrothe Zone, wie für Blau, Indigo und Violett fehlen Angaben bei Franz.

*Glaskörper.* Die Dicke des Glaskörpers im menschlichen Auge habe ich zu 15,87 mm angenommen. Sie ist aus den Angaben von Brücke über die Grösse der Augenaxe des Menschen, denen von Krause über die Dicke der Hornhaut und der Sehnenhaut in der Augenaxe und ferner mit Hülfe der vorigen Angaben über die Dicke der Krystalllinse und der wässerigen Feuchtigkeit bestimmt. Auch hier wurden wie bei der Krystalllinse, die anderen Zonen zur Berechnung

der Schwächungsindices stets mit der gelben verglichen. Ich fand:

| λ | Schwächungs-index | λ | Schwächungs-index |
|---|---|---|---|
| 3118,6 µ | — | 567,4 µ | 1 |
| 2379,3 „ | 0,0568 | 499,5 „ | 0,8700 |
| 1797,3 „ | 0,3408 | 454,9 „ | — |
| 1290,3 „ | 1 | 419,8 „ | — |
| 850,7 „ | 1 | 392,9 „ | — |
| 669,6 „ | 0,8818 | | |

Für die fünfte überrothe dunkle Zone und für Blau, Indigo und Violett hat Franz keine Zahlen gegeben. Für die erste dunkle überrothe Zone ergiebt sich der Schwächungsindex für die von Franz untersuchte Schicht der wässerigen Feuchtigkeit eines Ochsenauges von 8 mm Dicke nach der angegebenen Art der Berechnung gleich 1,105 und für die zweite dunkle Zone im Ueberroth gleich 1,084. Beide Schwächungsindices habe ich der Einheit gleich gesetzt, wie im entsprechenden Falle bei der wässerigen Feuchtigkeit und aus denselben Gründen.

Aus den angegebenen Werthen der Schwächungsindices der Augenmedien der von Franz untersuchten Dicke derselben, welche grösser als 1 waren, kann man die Grösse der möglichen Beobachtungsfehler seiner Methode entnehmen. Die hauptsächlichste Fehlerquelle für dieselbe liegt, nach seinen eigenen Angaben, in der grossen Veränderlichkeit der Durchlassfähigkeit der Luft, welche sich auch während einer Versuchsreihe ändert und dadurch die nach der zuvor angegebenen Methode berechneten Schwächungsindices bald zu gross, bald etwas zu klein erscheinen lässt, weil die Art ihrer Bestimmung eine während der ganzen Versuchsdauer unveränderliche Leuchtkraft des Sonnenlichtes voraussetzt. Aus diesem Grunde habe ich die sich wenig von der Einheit unterscheidenden Schwächungsindices der. Hornhaut für den sichtbaren Theil des Spectrums mit Ausnahme des Roth gleich 1 angenommen bei der späteren Berücksichtigung der Absorption der Hornhaut, denn diese Abweichungen von der Einheit waren etwa vom Betrage der möglichen Beobachtungsfehler. Dasselbe habe ich auch aus dem gleichen Grunde beim Glaskörper gethan; für die Krystalllinse scheint die Abweichung im Grün für den Schwächungs-

index von der Einheit doch grösser, als der durchschnittliche Beobachtungsfehler. Es hätte danach die Krystalllinse des Ochsenauges absorbirende Wirkung für grünes Licht. Beim Menschen nimmt sie erst im hohen Alter eine Färbung an, welche durch eine vom Violett bis zum Grün sich erstreckende Absorption hervorgerufen wird. Da meine eigenen, wie die hier später zu besprechenden Beobachtungen der Complementärfarben in diesem Lebensalter nicht angestellt sind, habe ich für die Krystalllinse den Schwächungsindex im Grün gleich 1 gesetzt in den folgenden Berechnungen. Dagegen hat das menschliche Auge stets vermittels seiner Krystalllinse lichtschwächende Einwirkung auf den brechbarsten Theil des Spectrums. Diese Lichtschwächung ist, wie ein Vergleich der Aenderung der absoluten Intensität im Spectrum und seiner scheinbaren Helligkeit ergibt, allmählich zunehmend nach dem Violett anzunehmen. Ich habe deshalb, in Ermanglung anderer Angaben, die Lichtschwächung der Krystalllinse für den brechbarsten Theil des Spectrums im Verhältnis der Abnahme der Wellenlänge wachsend angenommen, wie sie ja auch thatsächlich für die Linse des Menschen nach dem Violett hin wächst. Aus der Abnahme des Schwächungsindex vom Gelb zum Grün, welche Franz fand, habe ich danach die Schwächungsindices für Blau, Indigo und Violett berechnet. Sie sind zwischen Klammern den von Franz unmittelbar beobachteten Schwächungsindices hinzugefügt worden.

Ausser der Schwächung, welche das Licht im Auge bis zur Netzhaut erfährt, kommt noch diejenige in Betracht, welche es in dieser selbst erfährt, ehe es zu den wahrnehmenden Elementen derselben gelangt. Da meine eigenen, wie die im folgenden hier besprochenen Beobachtungen im directen Sehen angestellt sind, so kommt nur das Pigment im *gelben Fleck* vor seiner lichtempfindenden Schicht in Betracht. Um die lichtschwächende Kraft desselben für die verschiedenen Farben zu bestimmen verfuhr ich in folgender Weise. Ich beobachtete entweder zwei gleich helle Kerzen mit einem Auge durch gefärbte dünne Platten, die eine direct, die andere seitlich und zwar so, dass ihr Bild am Rande des gelben Flecks lag. Das seitlich gesehene Kerzenbild lag hierbei sowohl nach der Nasenseite, wie nach der Schläfenseite vom gelben Fleck. In

diesem Falle sind die bei gleichem Eindruck von beiden Kerzen ins Auge gesandten Lichtmengen $i / r^2$ und $i \cos\alpha / r_1^2$, wenn die seitliche Kerze unter dem Winkel $\alpha$ und aus der Entfernung $r_1$ das Auge bestrahlt. Die Bedeutung der anderen Buchstaben ist einleuchtend. Von der Schwächung durch die färbende Platte kann man absehen, denn sie wurde zu beiden Strahlen schräg vor's Auge gehalten und die durchgehende, von ihr wenig geschwächte Farbe änderte bei geringen Neigungen der Platte ihre Helligkeit nicht merklich. Ebenso kann man auch die Schwächung der Augenmedien vor dem gelben Fleck ausser Acht lassen, da sie für die von beiden Kerzen zur Netzhaut gesandten Lichtmengen merklich gleich ist. Bezeichnet nun $x$ den Schwächungsindex der betreffenden Farbe für das Pigment des gelben Fleckes vor seiner lichtempfindenden Schicht, so bestimmt er sich, da es nur auf das Licht der direct gesehenen Kerze wirkt durch die Gleichung:

$$\frac{x\,i}{r^2} = \frac{i \cos\alpha}{r_1^2}.$$

Ich habe auch in einigen Fällen spectrales Licht angewandt, und zwar ein Gelb, zwei Farben aus dem reinen Grün und das Blau der Linie *F*. Von dem mit Ocularspalt versehenen Fernrohre des Spectroskops war zu diesem Zwecke das Ocular entfernt und vor den Ocularspalt, aus dem die gewünschte Spectralfarbe austrat, wurde schräg eine weisse, durchsichtige Glasplatte gehalten, welche das Licht einer seitlichen Kerzenflamme spiegelte. Vor diese Kerze wurde eine farbige Platte oder eine Flasche voll farbiger Flüssigkeit gestellt, um ihrem Lichte gleiche Färbung mit der Spectralfarbe zu geben. Dann wurde einmal die Spectralfarbe direct das entsprechend gefärbte, gespiegelte Bild der Kerzenflamme seitlich betrachtet, und die Kerze solange verschoben, bis beide gleich hell schienen. Man hat dann:

$$x\,i = \frac{i_1 \cos\alpha}{r^2},$$

wenn $i$ die Lichtstärke der Spectralfarbe, $i_1$ diejenige der Kerzenflamme nach der Spiegelung an der Glasplatte und nach ihrer Färbung in der absorbirenden Schicht, bedeutet, durch welche ihr Licht geht, ferner $\alpha$ der Winkel ist, unter dem ihr Licht seitlich ins Auge fällt, und $r$ der Abstand des ge-

spiegelten Flammenbildes vom Auge, endlich $x$ den Schwächungsindex des Pigments des gelben Fleckes für die Spectralfarbe bedeutet. Darauf wurde das gespiegelte Flammenbild direct, die Spectralfarbe seitlich betrachtet, und die Kerze von neuem verschoben, bis sie wieder mit der Spectralfarbe gleich hell erschien. Man hat dann:

$$i \cos a = \frac{x_1 i_1}{r_1^2},$$

wenn $x_1$ den Schwächungsindex des Pigments des gelben Fleckes für die Farbe bedeutet, welche von der färbenden Schicht vor der Kerzenflamme hindurchgelassen wird. Der letztere wurde zuvor nach der zuerst angegebenen Methode vermittels der directen und seitlichen Betrachtung zweier gleich hellen Kerzen bestimmt. Die Bedeutung der übrigen Buchstaben in der letzten Gleichung ist klar. Aus beiden Gleichungen folgt:

$$x = \frac{\cos^2 a \, x_1 \, r_1^2}{r^2}$$

und aus ihr lässt sich also der Schwächungsindex der Spectralfarbe für das Pigment des gelben Fleckes bestimmen. Für jede der untersuchten Farben habe ich zwanzig bis dreissig Messungen angestellt. Die Wellenlängen derselben wurden mit einem Gitter nach bekannter Methode bestimmt. Es ist im folgenden die mittlere Wellenlänge des Spectraltheils angegeben, den die einzelnen benutzten färbenden Schichten hindurchliessen, oder der dem Spectrum selbst entnommen war. Es wurde auch das unveränderte Licht zweier Kerzenflammen untersucht und so die Lichtschwächung des Pigments des gelben Fleckes für Weiss erhalten. Es ergaben sich so folgende Resultate.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Schwächungindex | = 0,424 | für | weisses Kerzenlicht |
| " | = 1 | " | $\lambda$ = 700,7 $^{\mu}$ |
| " | = 1 | " | $\lambda$ = 649,5 " |
| " | = 0,889 | " | $\lambda$ = 582,8 " |
| " | = 0,348 | " | $\lambda$ = 553,6 " |
| " | = 0,171 | " | $\lambda$ = 522,2 " |
| " | = 0,124 | " | $\lambda$ = 504,5 " |
| " | = 0,269 | " | $\lambda$ = 485,6 " |
| " | = 0,695 | " | $\lambda$ = 457,4 " |

Mit diesen Werthen habe ich die Lichtschwächung im menschlichen Auge bis zur lichtempfindenden Schicht der Netz-

haut bestimmt und gefunden, dass in ihr die Lichtmengen complementärer Farbe gleich sein müssen, um Weiss zu geben, und dass für Weiss von gleicher Stärke von allen dieselbe Menge erforderlich ist. Ausser meinen eigenen liegen auch andere Mittheilungen vor, welche quantitative Angaben über die Lichtmengen complementärer Farben und des aus ihnen gebildeten Weiss enthalten. So haben v. Frey und v. Kries Weiss aus Complementärfarben zusammengesetzt, indem sie drei Spalten mit demselben Wolkenlicht beleuchteten, von denen zwei zur Spectrenerzeugung benutzt wurden und der dritte das Vergleichsweiss lieferte, mit dem das aus zwei Farben jener Spectren hergestellte Weiss verglichen wurde. Eine genaue Darstellung ihrer Versuchsmethode im einzelnen findet sich in Du Bois' Archiv für Physiologie, Jahrg. 1881, p. 336. Sie veränderten einerseits die zusammenzusetzenden Farben, andererseits die Spaltbreiten so lange, bis das unzerlegte weisse Wolkenlicht dem aus zwei Spectralfarben gebildeten gleich schien. Die Spaltenbreiten bestimmten sie mit Hülfe einer Scala, die in Fünftel Millimeter getheilt war und an der Zehntel Millimeter oder kleinere Strecken durch Schätzung abgelesen wurden.

Um mit Hülfe ihrer Angaben die Stärke der von ihnen zu Weiss zusammengesetzten Farben in absolutem Maasse zu finden, ist diejenige im Spectrum des Wolkenlichts in jenem Maasse zu bestimmen. Das habe ich auf folgende Weise gethan. H. C. Vogel theilt in den Monatsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrg. 1880, p. 801 spectrophotometrische Bestimmungen mit, welche unter anderen für die einzelnen Spectralfarben das Verhältniss der Intensität des Lichtes einer Petroleumlampe zur Sonne und zum diffusen Tageslicht des trüben Himmels angeben. Daraus lässt sich das Verhältniss der Lichtstärke des Wolkenlichts zu derjenigen des Sonnenlichts für die einzelnen Spectralbezirke finden. Da nun Lamansky das Stärkeverhältniss im Flintglasspectrum der Sonne bestimmt hat, so lässt sich dasselbe mit Hülfe seiner Angaben in absolutem Maasse auch für das Flintglasspectrum des Lichtes des trüben Himmels oder des Wolkenlichtes berechnen. Ich theile es, in dieser Weise berechnet, mit und habe dabei die Stärke für die Linie $D$ gleich 100 gesetzt.

Helligkeit im Flintglasspectrum des trüben Himmelslichtes in absolutem Maasse:

| $\lambda$ | $H$ | $\lambda$ | $H$ |
|---|---|---|---|
| 633 $\mu$ | 98,70 | 517 $\mu$ | 85,45 |
| 627,7 „ | 99,02* | 486 „ | 59,05 |
| 600 „ | 102,5 | 464 „ | 58,72 |
| 589 „ | 100 | 444 „ | 31,20 |
| 555 „ | 100,12 | 426 „ | 20,68 |
| 526 „ | 94,13* | | |

Die mit einem * versehenen Zahlen sind durch Interpolation gefunden.

Mit Hülfe dieser Werthe für die Vertheilung der Lichtstärke im Flintglasspectrum des Wolkenlichtes habe ich nun die Angaben von v. Frey und von Kries über Stärke von Complementärfarben und des aus ihnen gebildeten Weiss nach absolutem Maasse berechnet. Die Stärke derselben ist der Spaltbreite proportional gesetzt, welche für das in den Versuchen benutzte Wolkenlicht jeweilig angewandt wurde, und es wurden immer diejenigen Stärken der betreffenden Farben in absolutem Maasse berechnet, welche dieselbe Menge Weiss ergaben, wie sie der Spaltbreite eins, oder von einem Millimeter, des das unveränderte weisse Wolkenlicht liefernden Spaltes entspricht, mit dem das aus den Complementärfarben gebildete verglichen wurde. Ich theile zunächst die Lichtmengen in absolutem Maasse mit, welche in den Einstellungen von Frey zur Zusammensetzung derselben Menge Weiss gemischt wurden und zwar in der Stärke, die sie *vor* ihrer Schwächung durch die Augenmedien hatten. Es sind im Folgenden $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Wellenlängen complementärer Farben und $i_1$ und $i_2$ die entsprechenden Intensitätsangaben in absolutem Maasse.

| $\lambda_1$ | $i_1$ | $\lambda_2$ | $i_2$ | $\lambda_1$ | $i_1$ | $\lambda_2$ | $i_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 484,5 $\mu$ | 81,17 | 656,5 $\mu$ | 56,78 | 468,75 $\mu$ | 33,54 | 570 $\mu$ | 27,73 |
| 484 „ | 82,93 | 620 „ | 22,86 | 462,5 „ | 30,78 | 569 „ | 27,73 |
| 483 „ | 69,26 | 609 „ | 17,00 | 458,8 „ | 28,93 | 567,5 „ | 31,62 |
| 480,5 „ | 61,82 | 598 „ | 17,16 | 451,2 „ | 24 | 567 „ | 26,85 |
| 477 „ | 45,46 | 586 „ | 18,63 | 440 „ | 25,26 | 564 „ | 27,33 |
| 476,5 „ | 54,31 | 583,5 „ | 22,78 | 430,8 „ | 38,26 | 564,2 „ | 31,20 |
| 473 „ | 40,87 | 577,5 „ | 22,60 | | | | |

Aus $i_1$ und $i_2$ berechnen sich nun die Intensitäten der Complementärfarben in der lichtwahrnehmenden Schicht der Netzhaut $J_1$ und $J_2$, wie sie sich nach der Lichtschwächung in den vor ihr liegenden Augenmedien ergeben mit Hülfe der

zuvor angegebenen Werthe der Schwächungsindices derselben, wie folgt:

| $\lambda_1$ | $J_1$ | $\lambda_2$ | $J_2$ | $\lambda_1$ | $J_1$ | $\lambda_2$ | $J_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 484,5 $^{\mu}$ | 22,8 | 656,5 $^{\mu}$ | 21,1 | 468,75 $^{\mu}$ | 15,9 | 570 $^{\mu}$ | 16,5 |
| 484 „ | 23,5 | 620 „ | 17,5 | 462,5 „ | 17,9 | 569 „ | 15,9 |
| 483 „ | 20,3 | 609 „ | 16,3 | 458,8 „ | 19,2 | 567,5 „ | 17,3 |
| 480,5 „ | 19,7 | 598 „ | 17,1 | 451,2 „ | 10,6 | 567 „ | 14,4 |
| 477 „ | 16,4 | 586 „ | 17,5 | 440 „ | 12,9 | 564 „ | 13,1 |
| 476,5 „ | 19,8 | 583,5 „ | 20,9 | 430,8 „ | 19,7 | 564,2 „ | 15,1 |
| 473 „ | 16,8 | 577,5 „ | 17,0 | | | | |

Aus den Einstellungen von Kries ergeben sich folgende Werthe der Wellenlängen complementärer Farben und ihrer Stärke in absolutem Maasse vor ihrem Eintritt in's Auge.

| $\lambda_1$ | $i_1$ | $\lambda_2$ | $i_2$ | $\lambda_1$ | $i_1$ | $\lambda_2$ | $i_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 485,5 $^{\mu}$ | 92,94 | 656,5 $^{\mu}$ | 56,78 | 468,75 $^{\mu}$ | 34,88 | 571 $^{\mu}$ | 24,66 |
| 490,1 „ | 98,06 | 620 „ | 22,86 | 462,5 „ | 22,24 | 569 „ | 17,16 |
| 488 „ | 105,12 | 609 „ | 19,46 | 458,8 „ | 28,93 | 568,45 „ | 23,66 |
| 487 „ | 70,27 | 598 „ | 18,73 | 451,2 „ | 26,53 | 567,7 „ | 27,02 |
| 484 „ | 70,05 | 586 „ | 18,63 | 440 „ | 25,36 | 567,1 „ | 27.20 |
| 476,5 „ | 51,45 | 578 „ | 21,58 | 430,8 „ | 35,19 | 567 „ | 24,60 |
| 473 „ | 40,87 | 574,5 „ | 22,39 | | | | |

Für die Intensitäten der Complementärfarben in der wahrnehmenden Schicht des gelben Fleckes ergeben sich daraus folgende Werthe:

| $\lambda_1$ | $J_1$ | $\lambda_2$ | $J_2$ | $\lambda_1$ | $J_1$ | $\lambda_2$ | $J_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 485,5 $^{\mu}$ | 24,8 | 656,5 $^{\mu}$ | 21,1 | 468,75 $^{\mu}$ | 16,6 | 571 $^{\mu}$ | 15,1 |
| 490,1 „ | 21,5 | 620 „ | 17,5 | 462,5 „ | 12,9 | 569 „ | 9,8 |
| 488 „ | 25,2 | 609 „ | 18,6 | 458,8 „ | 19,2 | 568,5 „ | 13,6 |
| 487 „ | 17,6 | 598 „ | 13,7 | 451,2 „ | 11,7 | 567,7 „ | 14,8 |
| 484 „ | 19,6 | 586 „ | 17,5 | 440 „ | 12,9 | 567,1 „ | 14,6 |
| 476,5 „ | 18,9 | 578 „ | 16,7 | 430,8 „ | 18,2 | 567 „ | 13,2 |
| 473 „ | 16,8 | 574,5 „ | 15,4 | | | | |

Wir wollen zunächst die Grösse des Beobachtungsfehlers dieser Messungen zu bestimmen suchen. Sie ergibt sich in folgender Weise: Finden sich unter den Messungen zwei Paare von complementären Farben, welche sehr nahe beieinander liegen. der Farbe nach, so müssten sich für beide dieselben Werthe der Intensität $J_1$ und $J_2$ ergeben. Der beobachtete Unterschied ist deshalb als Beobachtungsfehler anzusehen.

Zwei solche Paare finden sich in den Messungen von v. Kries, nämlich die mit den Wellenlängen 488 $^{\mu}$ und 609 $^{\mu}$, 487 $^{\mu}$ und 598 $^{\mu}$. Für die beiden Wellenlängen 488 $^{\mu}$ und 487 $^{\mu}$ sind Unterschiede in der Lichtschwächung im Auge nicht anzunehmen, ihnen müsste derselbe Werth der Intensität in

der lichtempfindenden Schicht des gelben Fleckes zukommen, da auch die zugehörigen complementären Farben nicht sehr verschieden sind. Die Beobachtungsresultate ergaben aber 25,2 — 17.6 = 7,6; die letztere Zahl ist also als Beobachtungsfehler anzusehen.

Ich will nun den Unterschied der Stärke je zweier Complementärfarben, $\varDelta_{1-2}$, nach den letzten Tabellen angeben, die sich auf die Intensitäten in der empfindenden Netzhautschicht beziehen, ferner den Unterschied jeder vom allgemeinen Mittel, den ich durch $\varDelta_{m-1}$ und $\varDelta_{m-2}$ bezeichnen werde. Das Mittel aller Beobachtungen betrug in den Bestimmungen von v. Frey 17,9, in denen von v. Kries 16,9.

Ich gebe zuerst die Werthe von $\varDelta_{1-2}$, $\varDelta_{m-1}$, $\varDelta_{m-2}$ nach den Messungen von v. Frey:

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\varDelta_{1-2}$ | $\varDelta_{m-1}$ | $\varDelta_{m-2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 484,5 $\mu$ | 656,5 $\mu$ | + 1,2 | — 4,4 | — 3,2 |
| 484 „ | 620 „ | + 6 | — 5,6 | + 0,4 |
| 483 „ | 609 „ | + 4 | — 2,4 | + 1,6 |
| 480,5 „ | 598 „ | + 2,6 | — 1,8 | + 0,8 |
| 477 „ | 586 „ | — 1,1 | + 1,5 | + 0,4 |
| 476,5 „ | 583,5 „ | — 1,1 | — 1,9 | — 3 |
| 473 „ | 577,5 „ | — 0,2 | + 1,1 | + 0,9 |
| 468,75 „ | 570 „ | — 0,6 | + 2 | + 1,4 |
| 462,5 „ | 569 „ | + 2 | ± 0,0 | + 2 |
| 458,8 „ | 567,5 „ | + 1,9 | — 1,3 | + 0,6 |
| 451,2 „ | 567 „ | — 3,8 | + 7,3 | + 3,5 |
| 440 „ | 564 „ | — 0,2 | + 7 | + 4,8 |
| 430,8 „ | 564,2 „ | + 4,6 | — 1,8 | + 2,8 |

Sowohl die Abweichungen der Intensitäten je zweier Complementärfarben voneinander, wie die jeder einzelnen vom allgemeinen Mittel sind in den meisten Fällen erheblich kleiner und übersteigen niemals die Grösse des zuvor angegebenen Beobachtungsfehlers und diese Beobachtungen bestätigen das von mir gefundene Gesetz.

Dieselben Differenzen $\varDelta_{1-2}$, $\varDelta_{m-1}$, $\varDelta_{m-2}$ sind bei den Messungen von v. Kries die folgenden:

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\varDelta_{1-2}$ | $\varDelta_{m-1}$ | $\varDelta_{m-2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 485,5 $\mu$ | 656,5 $\mu$ | + 3,7 | — 7,9 | — 4,2 |
| 490,1 „ | 620 „ | + 4 | — 4.6 | — 0,6 |
| 488 „ | 609 „ | + 6,6 | — 8,3 | — 1,7 |
| 487 „ | 598 „ | + 3,9 | — 0,7 | + 3,2 |
| 484 „ | 586 „ | + 2,1 | — 2,7 | — 0,6 |
| 476,5 „ | 578 „ | + 2,2 | — 2 | + 0,2 |

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\Delta_{1-2}$ | $\Delta_{m-1}$ | $\Delta_{m-2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 473 $\mu$ | 574,5 $\mu$ | + 1,4 | + 0,1 | + 1,5 |
| 468,75 „ | 571 „ | + 1,5 | + 0,3 | + 1,8 |
| 462,5 „ | 569 „ | + 3,1 | + 4 | + 7,1 |
| 458,8 „ | 568,5 „ | + 5,6 | − 2,3 | + 3,3 |
| 451,2 „ | 567,7 „ | − 3,1 | + 5,2 | + 2,1 |
| 440 „ | 567,1 „ | − 1,7 | + 4 | + 2,3 |
| 430,8 „ | 567 „ | + 5 | − 1,3 | + 3,7 |

Auch bei diesen Beobachtungen sind die Abweichungen der Intensitäten der einzelnen Farben voneinander mit Ausnahme von zwei Fällen, bei denen sie den Beobachtungsfehler ein wenig überschreiten, meist viel kleiner als er und auch diese Beobachtungen bestätigen das von mir gefundene Gesetz.

Im XVI. Bande von Wiedemann's Annalen hat Schelske Messungen über die Zusammensetzung des Weiss aus zwei Spectralfarben mitgetheilt. Er benutzte Sonnenlicht und leitete es durch zwei Collimatorrohre, von denen jedes durch Brechung in der einen Hälfte eines Flintglasprismas zwei gegeneinander verschiebbare Spectren erzeugen konnte, die sich auf dem Ocularspalt des Beobachtungsfernrohres entwickelten. Das Licht von einem Collimatorrohr ging durch die eine Hälfte der Objectivlinse dieses Fernrohres, das vom anderen durch die andere. Wurde das Auge hinter den Ocularspalt des Beobachtungsfernrohres gehalten, so sah er die eine Hälfte der Objectivlinse desselben in der Mischfarbe, die aus den beiden Spectralfarben entstand, welche vom Doppelspectrum des Lichtes des einen Collimatorrohres auf den Ocularspalt fielen, die andere Hälfte der Objectivlinsen erschien in der Mischfarbe, welche die beiden vom Doppelspectrum des Lichtes des anderen Collimatorrohres herrührenden Farben im Ocularspalt erzeugten und diese eng aneinander grenzenden Mischfarben liessen sich gut miteinander vergleichen.

Schelske erzeugte durch Gelb und Blau durch das eine Collimatorrohr ein Weiss, das er nach freiem Urtheil ohne Vergleich mit natürlichem Weiss herstellte. Diese Methode der Erzeugung des Vergleichsweiss ist gewiss besser als die Zuhülfenahme eines natürlichen Weiss. Denn wir sind bei letzterem nie sicher, ob es dem vollkommensten Weiss entspricht und wenn wir seine Farbe nicht ändern können oder

wollen, so übersehen wir geringere Abweichungen desselben von dem reinen Weiss leicht.

Durch je einen Spalt eines Collimatorrohres wird mit Hülfe eines doppelbrechenden Prismas ein Doppelspectrum erzeugt, dessen einzelne Spectra senkrecht zueinander polarisirt sind. Durch einen drehbaren Nicol kann ihr Helligkeitsverhältniss beliebig geändert werden und so aus zwei Farben beider eine Mischung in bestimmtem Verhältniss hergestellt werden.

Schelske theilt die Ergebnisse seiner Beobachtungen mit in folgender Form:

$30.5^0$ Gelb $562.7^\mu$ $59.5^0$ Blau $454.5^\mu$

und gibt an, dass die Helligkeit jeder der beiden Farben proportional den Quadraten des Sinus bez. des Cosinus sei. Danach habe ich sie für die weniger brechbaren Farben, in dem mitgetheilten Beispiel also Gelb, proportional dem Quadrat des Sinus des zugehörigen Winkels gesetzt und für die brechbaren Farben, im vorigen Beispiel also Blau, proportional dem Quadrat des Cosinus des entsprechenden Winkels.

Für die Intensitätsvertheilung im Flintglasspectrum habe ich die Angaben von Lamansky zu Grunde gelegt. Derselbe gibt im 146. Bande von Poggendorff's Annalen der Physik einmal an die Vertheilung der Lichtstärke im Flintglasspectrum der Sonne von der Linie $D$ an bis zum Violett, zweitens dieselbe für dasselbe Spectrum von $D$ in's Ueberrothe und endlich gibt er eine Wärmecurve für das ganze Flintglasspectrum der Sonne, in welcher die Intensitäten als Functionen der Wellenlängen dargestellt sind. Danach sind die Lichtstärken im Flintglasspectrum der Sonne die folgenden. Es ist hierbei das Ende des sichtbaren Roth des objectiv auf einem Schirm entworfenen Spectrums bei der Linie $B$ angenommen und das violette Ende desselben, nach dem in Flintglasspectren üblichen Verhältniss zwischen den Abständen der Linien $F$ und $G$ und $G$ und $H$, bei $H$ gesetzt.

Absolute Helligkeit im Flintglasspectrum der Sonne:

| | λ | J | | λ | J | λ | J |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 687,8 μ | 147,3 | | 493,9 μ | 53,4 | 444,9 μ | 23,5 |
| | 664 „ | 133,3 | | 487,5 „ | 48 | 439,7 „ | 20,8 |
| | 639 „ | 122,7 | F | 484,3 „ | 47,1 | 434,4 „ | 17,2 |
| | 614 „ | 113,3 | | 481,7 „ | 47,1 | 429,1 „ | 15,4 |
| D | 588,8 „ | 100 | | 476,4 „ | 44,8 | 425,5 „ | 14,5 |
| E | 526 „ | 76,9 | | 471,2 „ | 43,4 | 418,4 „ | 9 |
| | 519,6 „ | 74,2 | | 465,9 „ | 39,8 | 411,1 „ | 9 |
| | 513,2 „ | 67,9 | | 460,7 „ | 36,6 | 400,3 „ | 3,6 |
| | 506,8 „ | 60,6 | | 455,4 „ | 30,8 | 392,9 „ | 2,7 |
| | 500,4 „ | 56,1 | | 450,2 „ | 28,5 | | |

Mit diesen Werthen ergeben sich aus den Angaben von Schelske, von denen jede das Mittel aus acht Einzelversuchen ist, die folgenden Intensitäten complementärer Farben in absolutem Maasse vor ihrem Eintritt ins Auge.

| $\lambda_1$ | $i_1$ | $\lambda_2$ | $i_2$ |
|---|---|---|---|
| 495,3 μ | 45,7 | 645,3 μ | 19,6 |
| 486,1 „ | 41 | 597,9 „ | 15 |
| 454,5 „ | 22,5 | 562,7 „ | 23,3 |
| 451,5 „ | 22,8 | 566,8 „ | 19,7 |
| 413,9 μ | 8,3 | 573,5 | 7,4 |

Die Intensität des letzten aus Violett und Gelbgrün gebildeten Weiss war nicht derjenigen der aus den anderen Paaren complementärer Farben zusammengesetzten Mengen Weiss gleich, Mengen, die sämmtlich unter sich gleich waren Es gelang Schelske nicht, dieses letztere den vorigen durch die in diesem Falle erforderliche Veränderung der Spaltweiten der Collimatorröhren gleich zu machen. Der Grund ist wohl darin zu suchen, dass mit der Veränderung der Spaltweite der Farbenton der Componenten eines solchen Weiss geändert wird und damit auch der des resultirenden Weiss. Man ändert also dabei Helligkeit und Färbung des Weiss zugleich, und kann deshalb nicht nur das eine allein auf diese Weise variiren, wie es zur Erzeugung zweier gleichen Weiss nöthig ist.

Für die Lichtstärken der Complementärfarben in der lichtempfindenden Schicht des gelben Fleckes ergeben sich aus dem vorigen die folgenden Werthe:

| $\lambda_1$ | $J_1$ | $\lambda_2$ | $J_2$ |
|---|---|---|---|
| 495,3 μ | 8,1 | 645,3 μ | 9 |
| 486,1 „ | 10,8 | 597,9 „ | 14,9 |
| 454,5 „ | 9 | 562,7 „ | 10,7 |
| 451,5 „ | 10 | 566,8 „ | 10,5 |
| 413,9 μ | 4,1 | 573,5 | 4,7 |

Danach ist in den Versuchen von Schelske der Unterschied der Lichtstärken zweier Complementärfarben und der der einzelnen vom Mittel der folgende. Das allgemeine Mittel ist hierbei nur aus den vier ersten Versuchen gebildet, da nur in diesen unter sich gleiches Weiss zusammengesetzt wurde.

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\Delta_{1-2}$ | $\Delta_{m-1}$ | $\Delta_{m-2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 495,3 $^{\mu}$ | 645,3 $^{\mu}$ | − 0,9 | + 2,3 | + 1,4 |
| 486,1 „ | 597,9 „ | − 4,1 | − 0,4 | − 4,5 |
| 454,5 „ | 562,7 „ | − 1,7 | + 1,4 | − 0,3 |
| 451,5 „ | 566,8 „ | − 0,5 | + 0,4 | − 0,1 |
| 413,9 „ | 573,5 „ | − 0,6 | | |

Man wird auch in diesen Beobachtungen die möglichen Fehler annähernd von gleicher Grösse annehmen können, wie in den zuvor mitgetheilten von v. Frey und v. Kries. Denn die Art der Beobachtung grösserer aneinander grenzender Flächen war in beiden Fällen dieselbe und auch die persönlichen Fehler sind nicht erheblich verschieden bei den einzelnen Beobachtern anzunehmen. Bei den Beobachtungen von Schelske liegen die einzelnen Bestimmungen in den allermeisten Fällen weit unter jener früher angegebenen Grösse der möglichen Beobachtungsfehler und es bestätigen diese Beobachtungen sehr gut das von mir gefundene Gesetz, dass sämmtliche Complementärfarben in der lichtempfindenden Schicht des gelben Fleckes von gleicher Grösse sein müssen um dieselbe Menge Weiss zu geben.

Berlin, 21. December 1892.

# VII. *Ueber das Verhalten des festen colloidalen Silbers gegen den electrischen Strom; von Carl Barus und E. A. Schneider.*

1. Veranlasst durch die mangelhafte Uebereinstimmung der Oberbeck'schen [1]) Resultate über die electrische Leitung des festen colloidalen Silbers, mit den unserigen [2]), schien es lohnend, die Versuche zu wiederholen; und zwar nicht deswegen, weil wir unsere früheren Angaben anzweifelten, sondern aus folgendem Sachverhalt:

Für die, nach der damals alleinbekannten Carey Lea'schen [3]) Methode hergestellten Lösungen colloidalen Silbers. ergab sich die Zusammensetzung wie in Tabelle 1.

Tabelle 1.

Gramme im Liter.

| Lösung | Ag metallisch | Ag verbunden | Fe | $SO_3$ |
|---|---|---|---|---|
| I | 0,0059 | 1,7886 | 0,9194 | 0,0278 |
| II | 7,9656 | 1,6380 | 0,5684 | 0,7310 |
| III | 11,6280 | 1,5340 | 0,1990 | 0,0670 |
| IV | 10,6680 | 1,1472 | 0,2119 | 0,2220 |

Salpetersäure, Natrium und organische Säure wurden nicht bestimmt. Man ersieht also, dass trotz der grossen Sorgfalt der Herstellung die mit dem colloidalen Silber eintrocknenden electrolytischen Verunreinigungen einen ganz bedeutenden Procentsatz des letzteren ausmachen. Darum begnügten wir uns auch in Bezug auf die colloidalen Silberspiegel mit wenigen Versuchen, da wir annahmen [4]), dass mit derartig unreinen Gemischen keine Entscheidung zu erwarten sei.

Seither hat sich nun der eine [5]) von uns mit der Herstellung der Lösungen eingehend beschäftigt, und ein Ver-

1) Carey Lea, American Journ. 37. p. 481. 1889.

2) Barus u. Schneider, Zeitschr. f. phys. Chemie 8. p. 285. 1891.

3) Oberbeck, Wied. Ann. 46. p. 272. 1892.

4) Barus u. Schneider, l. c. p. 296.

5) Schneider, Chem. Ber. 24. p. 3370. 1891; 25. p. 1164. 1281. 1440. 1892.

fahren angegeben, durch welches man das colloidale Silber sowohl in wässeriger (*Hydrosol*), wie auch in alkoholischer (*Organosol*) Lösung fast vollkommen rein darzustellen vermag. Eine weitere Bearbeitung des Gegenstandes erschien daher nun geboten.

2. Zugleich ergab sich[1]), dass das in Tabelle 1 als „Ag verbunden" bezeichnete Silber (welches durch Zusatz von Salzsäure nicht metallisch, sondern als Chlorsilber aus den Lösungen herausfällt) thatsächlich auch als metallisches Silber zugegen gewesen sein muss. Unsere ursprünglichen Lösungen waren also reiner (man addire das „Ag metallisch" und „Ag verbunden" der Tabelle 1) als wir angeben zu dürfen glaubten. Es spielt bei der Ausfällung eine wenig bekannte, von uns übersehene Reaction:

$$\mathrm{Fe\,Cl_3 + Ag = Ag\,Cl + Fe\,Cl_2}$$

eine Rolle, wobei eben das Eisensalz der Verunreinigungen hinzugezogen wird.

Trotz dieser unerwartet günstigen Ausbeute sind in den Lea'schen Lösungen noch immer beträchtliche Verunreinigungen vorhanden. Nimmt man als Maassstab dafür die gefundene Eisenmenge an, so kommt auf Lösung I (Tabelle 1) 51,2 Proc.; auf Lösung II 5,9 Proc.; auf Lösung III 1,5 Proc.; auf Lösung IV 1,8 Proc., bezogen auf die gefundene Silbermenge. Die Schneider'schen Lösungen[2]) enthielten an Eisen: Hydrosol 1,04 Proc., Organosol 0,92 Proc., bezogen auf die gelöste Silbermenge von resp. 18,200 g und 4,539 g im Liter.

Hr. Oberbeck gibt die Zusammensetzung seiner Lösungen nicht an.

3. Was nun die electrische Leitung des festen colloidalen Silberspiegels betrifft, so ist wohl zu beachten, dass neben dem Eisen auch die übrigen verunreinigenden Bestandtheile ($\mathrm{Na, NO_3, SO_4}$ etc.) mitwirken. Laut Tabelle 1 muss man sie auf wenigstens 5 Proc. der Silbermenge schätzen, recht vorsichtige Zubereitung (Dialyse) vorausgesetzt. Breitet man die

1) Schneider, Chem. Ber. **25.** p. 1448. 1892.

2) Bei anderen Lösungen wurde das Hydrosol oft so weit gereinigt, dass bloss ein Rest von 0,3—0,5 Proc. Eisen hinterblieb. Bei der Darstellung muss man sich aber auf Unregelmässigkeiten gefasst machen.

Masse auf Carton aus, wie es Oberbeck thut, so diffundiren die Krystalloide leichter in das Papier hinein als das träge Colloid. Fragt man sich ferner, was durch mässige Befeuchtung des trockenen Cartonstreifens geschehen werde (z. B. durch Anhauchen), so ist zunächst zu beantworten, ob die vorhandenen Electrolyte ein Maximum des Leitungsvermögens aufweisen oder nicht, und an welcher Seite des Maximums man sich befindet. Ist ein Maximum nicht vorhanden, so kann man sehr wohl durch weiteres Anfeuchten (Verdünnung des Electrolyts) eine Abnahme des Leitungsvermögens erwarten, ohne dass die Leitung des Silbers selbst in Frage käme. Es würde dann auch, weil eben die Verdünnung rascher als das Austrocknen von statten gehen dürfte, die Vergrösserung des Widerstandes rascher als die Verkleinerung zu beobachten sein. [1])

Hr. Oberbeck führt nun selbstverständlich die Feuchtigkeit, sowie auch andere Schwierigkeiten [2]), sehr wohl an, ohne jedoch in einer für uns überzeugenden Weise darzuthun, dass er die Mängel überwunden hat. Es sei uns daher erlaubt, einige Bedenken gegen die Stichhaltigkeit der Versuche, aus welchen Hr. Oberbeck unsere Resultate beanstanden zu müssen glaubte, hier schon auszusprechen. Bei Lea'schen Lösungen und bestrichenem Cartonpapier kann man im allgemeinen nicht über ein gewisses Minimum des Widerstands hinabgelangen. Auch die Oberbeck'sche Erfahrung [3]), dass Goldsilber anders leitet als Blausilber, ist ohne Analyse nicht von den möglicherweise verschieden vorhandenen electrolytischen Verunreinigungen zu trennen, um so weniger, als man verschiedene Fällungsmittel anwenden muss. Weiteres in den Paragraphen 6 und 7.

4. Wir blieben daher bei unserer ursprünglichen Versuchsmethode stehen, bei welcher die colloidale Silberlösung auf Glasplättchen ausgetrocknet wurde. Man bildete einen einfachen Stromkreis mit calibrirtem, empfindlichem Galvanometer (1 cm Scalenausschlag entsprach $8 \times 10^{-7}$ Amp.) und Daniell'schem Element. Im Stromkreis befand sich an einer Stelle eine

1) Vgl. Oberbeck, l. c. p. 274.

2) Oberbeck, l. c. p. 271. 275. 279.

3) Oberbeck, l. c. p. 279.

Lücke, wo die beiden Poldrähte an zwei 2,5 cm breite, 1 cm lange rechteckige Stanniolblättchen angelöthet waren. Man hatte letztere mit Schellack auf eine Glasplatte aufgekittet, so zwar, dass die gegenüberstehenden, parallelen breiten Ränder nur in einem geringen Abstand von wenigen Millimetern gelegen waren. Die Lücke wurde ihrer ganzen Länge nach mit einem Tropfen der Silberlösung überbrückt, wodurch Stromschluss hergestellt wurde. Man wartete bis zum Austrocknen, wo sich dann ein 2,5 cm breiter, 1—2 mm langer colloidaler Silberspiegel zwischen den Stanniolblättchen verbindend absetzte. Dann wurde frische Lösung eingefügt, abermals eingetrocknet etc. Der Alkohol des Organosols verdunstete in kurzer Zeit (10 Min.). Zum Austrocknen des Hydrosols sind aber viele Stunden (5—10) nöthig. Man konnte die Glasplatte mit einer Glasglocke bedecken, und concentrirte Schwefelsäure diente zur Feuchtigkeitsabsorption.

Es zeigte sich bald, dass bei Anwendung des Organosols das Aufkitten der Stanniolblätter auf Glas vermittels Schellack nicht gestattet sei. Es wurde dadurch die Leitung wesentlich begünstigt. Wir griffen daher mit Erfolg zu breiten, reinen Neusilberfedern, welche sich durch Schrauben anziehen liessen, und wodurch dann die Stanniolblätter auf die Glasplatte fest angedrückt werden konnten. Demnach kam der Tropfen nur mit Glas und blankem Metall in Berührung.

5. Die Ergebnisse unserer Versuche waren mit unseren früheren Angaben [1]) identisch, soweit sie neu wiederholt wurden. Die aufgetröpfelte Masse leitete stets das Hydrosol (die Nadel ging weit über die Scala heraus) natürlich viel besser, als das Organosol. Bei der Verdunstung zeigte sich zuerst Abnahme des Widerstands (Concentration der Electrolyte), dann Widerstandszunahme (Dimensionsverminderungen) bis zu einem Maximum. Was dieses Maximum anbetrifft, so waren die Widerstände der ersten Tropfen für unsere Methode unmessbar gross. So z. B. war beim Hydrosol der Widerstand des nassen Tropfens kleiner als $10^4$ Ohms; der des Silberspiegels aber grösser als $10^7$ Ohms. Bei wiederholtem Ein-

1) Barus u. Schneider, l. c. p. 285.

trocknen zeigte sich allerdings ein messbarer Widerstand. Vgl. § 6. Hierüber gibt die Tabelle 2 Rechenschaft, wo die Dicke durch Wägung bestimmt wurde und das Leitungsvermögen auf Quecksilber bezogen ist.

Tabelle 2.

**Leitung des festen colloidalen Silbers. Eisengehalt (Salze) des Organosols 0,9 Proc.; des Hydrosols 1,0 Proc.**

| Colloid | Dicke des Spiegels | Leitungsvermögen |
|---|---|---|
| | cm | Hg = 1 |
| { Organosol | 0,000 05 | 0,000 002 |
| { Organosol | 0,000 18 | 0,000 000 3 |
| { Hydrosol | 0.000 19 | 0,000 000 03 |
| { Organosol | 0,000 10 | 0,000 000 8 |

Diese Leitungsvermögen sind aber wesentlich kleiner als die des Hrn. Oberbeck. Beim Hydrosol entspricht der Widerstand sogar einer weniger als 0,01 Proc. starken Chlorwasserstofflösung. So lange man nicht annehmen darf, dass man den Silberspiegel selbst im Exsiccator vollständig ausgetrocknet hat, kann man also auch bei diesen möglichst reinen Lösungen nicht von der electrolytischen Beimengung ganz absehen.

6. Thut man dieses aber doch, fasst man die sich mit der Zeit vergrössernde Leitung (wie Oberbeck fand) allein als maassgebend auf, so ist dennoch folgender Punkt zu beachten: der einmal eingetrocknete Spiegel löst sich nicht mehr so vollständig in Wasser wie zuvor. Schon durch Eintrocknen geht also das colloidale Silber zum Theil in normales über, wodurch die Leitung der Tabelle 2 sich erklären liesse, denn jedenfalls wird dieser Process durch wiederholtes Eintrocknen befördert. Hierzu dienen folgende Anhaltspunkte. Wir liessen während mehrerer Tage zehn Benetzungen des Organosols successive eintreten und beobachteten die laufenden Widerstände sowohl für den eben nassen, als für den trockenen (spiegelnden) Zustand. Die Gesammtdicke der Schicht betrug schliesslich 0,00034 cm, und sie war vollkommen fest. Angenommen, dass jede einzelne Schicht $^1/_{10}$ der Gesammtdicke ausmachte, ergab sich:

Tabelle 3.

**Galvanische Leitungen auf einander eingetrockneter Schichten des Organosols.**

| Zahl der Benetzungen | Nasser Widerst. × 10⁻³ | Trockener Widerst. × 10⁻³ | Trockenes Leitungsvermögen | Zahl der Benetzungen | Nasser Widerst. × 10⁻³ | Trockener Widerst. × 10⁻³ | Trockenes Leitungsvermögen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Ohm | Ohm | Hg = 1 | | Ohm | Ohm | Hg = 1 |
| 1 | 625 | 12 000 | 0,000 000 02 | 6[2]) | 90 | 240 | 0,000 000 19 |
| 2 | 312 | 1 790 | 0,000 000 08 | 7 | 90 | 185 | 0,000 000 21 |
| 3[1]) | 250 | 1 140 | 0,000 000 08 | 8 | 89 | 164 | 0,000 000 21 |
| 4 | — | 500 | 0,000 000 14 | 9[3]) | — | 164 | 0,000 000 18 |
| 5 | — | 370 | 0,000 000 15 | 10[4]) | 40 | 96 | 0,000 000 29 |

Schwankungen des nassen Widerstandes sind den unvermeidlich verschiedenen Trockengraden zuzuschreiben. Durchweg zeigt aber das feste colloidale Silber schlechtere Leitung, als das alkoholische Menstruum, und der Widerstand nimmt bei wiederholtem Eintrocknen ab.

Im Zusammenhange aller Thatsachen muss man also hier wohl eine Leitung annehmen, die durch den bereits in normales Silber übergetretenen Antheil des Spiegels bedingt wird. Nun verlaufen derartige Processe gewöhnlich so, dass die Umwandlung anfangs sehr rasch vor sich geht, später aber sich asymptotisch verlangsamt. Wir können daher nicht zugeben, dass die Werthe, welche Hr. Oberbeck nach fünfmonatlicher Herstellung seiner Cartonstreifen gefunden hat, für den anfänglichen, d. h. den wahren Widerstand des festen Colloids maassgebend sind. Unseren Satz, welcher dem colloidalen Silber *auch im festen Zustande* eine electrische Nichtleitung zuschreibt, halten wir daher aufrecht.

7a. Hier mögen einige besondere Versuche folgen. Was den Einfluss der Temperatur betrifft, so hat man es mit einer vorübergehenden und einer dauernden *Abnahme* des Widerstandes zu thun. Letztere tritt besonders bei starker Erhitzung ein. Wir machten den Versuch einfach so, dass wir einen reinen heissen Löthkolben in einem Abstande von etwa 0,5—1,0 cm über den Silberspiegel wirken liessen, während

1) Zweiter Tag. 2) Dritter Tag. 3) Dritter Tag. Vgl. § 7c.
4) Vgl. § 7.

gleichzeitig der Galvanometerausschlag beobachtet wurde. Die Hitze wurde successive gesteigert, doch kann sie, da der Zinncontact nicht schmolz, kaum 200° im Maximum betragen haben. Die ausgetrocknete Masse von Tabelle 3 wurde abwechselnd erhitzt und abgekühlt.

| Versuch Nr. | Temperatur | Widerstand | Versuch Nr. | Temperatur | Widerstand | Versuch Nr. | Temperatur | Widerstand |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Ohm × 10³ | | | Ohm × 10³ | | | Ohm × 10³ |
| 1 | kalt | 119 | 5 | kalt | 108 | 10 | heiss | 24 |
| 2 | heiss | 92 | 6 | heiss | 58 | 11 | kalt | 51 |
| 3 | kalt | 124 | 7 | kalt | 99 | 12 | heis | 16 |
| 4 | heiss | 64 | 8 | heiss | 42 | 13 | kalt | 42 |
| | | | 9 | kalt | 71 | | | |

Da der Widerstand bei Temperaturerhöhung abnimmt, so ist es wahrscheinlich, dass der Vorgang electrolytischer Natur und secundär ist. Andererseits wird die successive Widerstandsabnahme des kalten Spiegels wesentlich auf den Uebergang des colloidalen in normales Silber zurückzuführen sein. Schliesslich ergibt sich noch, dass der Contact des § 4 ein genügender gewesen sein muss.

7b. Bei abwechselndem Stromschluss und Stromunterbrechung, von der Dauer von je 5 Minuten, zeigte sich ein analoger Verlauf der Widerstände, z. B.:

| Versuch Nr. . . . | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Strom geschlossen | — | 0,085 | — | 0,082 | — | 0,082 | — | Megohm |
| Strom offen . . . . | 0,088 | — | 0,086 | — | 0,085 | — | 0,084 | Megohm |

Im wesentlichen sind dies auch wohl Wärmewirkungen.

7c. In Bezug auf das Anfeuchten fanden wir beim Spiegel der neunten Benetzung (Tab. 3), dass der Widerstand von 165 000—155 000 Ohm nach fünfmaligem Anhauchen *abgefallen* war. Andererseits zeigte aber der Spiegel der zehnten Benetzung (Tab. 3), übereinstimmend mit Oberbeck, nach siebenmaligem Anhauchen eine ziemlich regelmässig verlaufende *Widerstandszunahme* von über 20 Proc. als Gesammteinfluss. Versuche dieser Art sind unbehaglich, da man ja kaum durch die peinlichste Sorgfalt zur Sicherheit gelangen kann. Wir

fügen nur noch hinzu, dass es gemäss unserer Ansicht (§ 8) möglich sein muss, durch Anhauchen den metallischen in den electrolytischen Widerstand überzuführen. Es fragt sich also auch, welcher von beiden der grössere ist.

8. Die klarste Vorstellung, welche man sich bis jetzt über die Natur der Colloide gemacht hat, ist die, dass dieselben aus äusserst feinen, in dem Menstruum schwebenden Partikelchen bestehen (Ostwald, Paterno u. a.). Auch uns erschien es nicht nothwendig, dass der Lösungsprocess *stets* bis auf das Molecül (geschweige von weiterem) vordringt. Da man es einerseits mit Adhäsionskräften der festen und flüssigen, andererseits mit Cohäsionskräften der festen Theile untereinander zu thun hat, so kann man sich auch einen Gleichgewichtszustand denken, bei welchem die Partikelchen, wenn auch winzig klein, doch noch aus einer endlichen Anzahl von Molecülen zusammengesetzt sind. Besonders ist dies der Fall, wenn sowohl die festen als die flüssigen Theile anfangs als Molecüle vorhanden sind.

Wählen wir ein Beispiel: Man kann sich leicht Lehmtheilchen herstellen, welche im Wasser tage-, ja wochenlang schwebend erhalten bleiben. Diese Theilchen, ausgetrocknet und in Aether gebracht, fallen fast wie Sandkörner nieder; so schnell zwar, dass die Zähigkeitsunterschiede der Flüssigkeiten gar nicht in Betracht kommen. Auch ist das Präcipitat voluminös und ganz anderer Natur, als der Absatz im Wasser. Abermals ausgetrocknet und in Wasser hineingebracht, schweben die Theilchen wieder.

Auf analoge Weise haben wir uns die Lösung und die Fällungsmöglichkeiten des colloidalen Silbers vorgestellt. Lässt man die Lösung eintrocknen, so ist nicht nothwendig, dass sich die Theilchen sofort zu einer cohärenten Masse zusammenschweissen. Die Löslichkeit des Hydrosolspiegels spricht direct dagegen. Dass aber der Uebergang zum normalen Silber mit der Zeit durch Druck u. dgl. erfolgen würde, ist wahrscheinlich. Veranschaulicht wird dann weiter die Nichtleitung des festen Colloids. „Denkt man sich einen metallischen Leiter ausserordentlich fein zertheilt, wodurch eben ausserordentlich viele Grenzflächen und Uebergangswiderstände entstehen müssen, so wird die Leitung dem Zertheilungsgrade proportional ver-

schlechtert worden sein."[1]) Besser noch würde man sich, nach der interessanten Arbeit Auerbach's[2]), auf die Dichte („Verdünnung") der zertheilten Masse beziehen, und ersieht dann auch, warum bei der Coagulation des colloidalen Silbers sehr wohl Wärme frei werden kann.

9. Wollte man Allotropie annehmen, so ist die Frage berechtigt, welches ist dann das allotrope Silber? Spiegel aus verschiedenen Lösungen, ja sogar aus verschieden alten Theilen derselben Lösung, haben andere Löslichkeitseigenschaften.[3]) Durch kleine Unterschiede der Darstellung gelangt man zu verschieden gefärbten Lösungen. So z. B. zeigte das Organosol nach vierwöchentlicher Dialyse chlorophyllgrüne Farbe; dasselbe nach zwölftägiger Dialyse war kirschroth. Zwei verschiedene Portionen der letzten Darstellung (identisches Ausgangsmaterial) ergaben verschiedene Farbentöne in Roth etc. Aus kritisch temperirtem Alkohol fällt das Organosol, ähnlich wie Lehmtheilchen aus überhitztem Wasser, als schwammiges Coagulum heraus, löst sich aber trotzdem *anfangs* mit rother Farbe in Wasser, welche alsbald in Grünlichschwarz übergeht etc. Kurzum, nimmt man Allotropie an, so müssen zunächst beliebig viele allotrope Silber existiren.

Wir haben uns nach unserer Auffassung hiervon Rechenschaft zu geben versucht, indem wir annahmen, die Farbe rühre (analog dem blauen Himmelslicht)[4]) von einer diffusen Diffraction her, wobei nicht verhehlt sein soll, dass einerseits infolge der gringen Zerstreuung des Silbers[5]) (ob normal oder anomal) die Folgerung unsicher ist, andererseits die optisch activen Partikelchen relativ gross sein müssten. Schwer ist es aber sicherlich, wenn man viel mit den Silberlösungen umgegangen ist, die mechanischen Erklärungsweisen zu verwerfen.

10. Wir glauben also auch unseren zweiten Satz[6]) nicht

1) Barus u. Schneider, l. c. p. 296.

2) Auerbach, Wied. Ann. **28.** p. 604. 1886.

3) Schneider, l. c.

4) Die hierher gehörigen bekannten Arbeiten von Stokes, Rayleigh u. a. werden von Crova (Ann. de chim. et phys. (6) **20.** p. 480. 1890) angeführt.

5) Kundt, Wied. Ann. **34.** p. 482. 1888.

6) Barus u. Schneider, l. c. p. 298.

umgehen zu dürfen, nämlich „insofern zwingende Gründe zur Annahme eines allotropen Molecüls kaum vorliegen, ist es einfacher, bei dem normalen Molecül stehen zu bleiben."

Zwingende Umstände[1]) gebieten uns, den Gegenstand zu verlassen. Wir möchten daher zum Schluss nur die Vermuthung aussprechen, dass die Bearbeitung von seiten eines mit der Metalloptik vertrauten Physikers lohnend sein dürfte.

*Zusatz.* Obige Arbeit, welche kurz nach dem Erscheinen der ersten Oberbeck'schen Abhandlung[2]) abgeschickt worden war, stellten wir auf Anfrage der Redaction gern hinter die inzwischen eingelaufene zweite Arbeit[3]) desselben Physikers zurück. Durch das reichhaltige Beobachtungsmaterial der letzteren ist nun einiges von Obigem überflüssig geworden, was leider wegen der Langwierigkeit des überseeischen Verkehrs stehen bleiben muss. Im ganzen stimmen jetzt die Versuche, soweit sie parallel verlaufen und soweit man es bei einem unreinen veränderlichen Stoff erwarten kann, befriedigend. Wir beschränken uns daher auf den Schlusspunkt.

Am Ende seiner zweiten Abhandlung kommt Oberbeck ebenfalls zu der Ansicht, dass man es beim colloidalen Silber mit Partikelchen continuirlich veränderlicher Grösse zu thun haben muss: Oberbeck nennt sie aber Complexmolecüle; wir glaubten dieselben als Körperchen normalen Silbers auffassen zu müssen. Somit ändern sich also die weiteren Erklärungen. Während wir die enorm verschlechterte Leitung des festen Silbercolloids in obiger Weise direct auf die Auerbach'schen Versuchsergebnisse[4]) zurückführen können, muss Oberbeck weiter um sich greifen, ja sogar eine besondere Hypothese aufstellen. Zugleich sind die Fragen aufgeworfen, was man unter einer continuirlich variirenden Moleculargrösse zu verstehen hat, und wie weit ein Körperchen anwachsen kann,

1) Das physikalische Laboratorium der U. S. Geological Survey ist unlängst von der Regierung aufgehoben worden.

2) Oberbeck, Wied. Ann. **46.** p. 265. 1892.

3) Oberbeck, Wied. Ann. **47.** p. 353. 1892.

4) Auerbach, l. c. — Dass man Metallpulver auch durch den electrischen Funken vom nichtleitenden in den leitenden Zustand überführen kann, wird unter anderem von E. Branly constatirt. Vgl. Phil. Mag. (5) **34.** p. 530. 1892.

um überhaupt noch als Molecül gelten zu können. Auf den letzteren Punkt Bezug nehmend, führen wir folgende neue Beobachtung an: Als wir kürzlich die obengenannte alkoholische Lösung, nachdem dieselbe einige Monate ruhig gestanden hatte, zufällig wieder ansahen, fanden wir, dass sich alles Silber als kirschrothe Masse abgesetzt hatte. Darüber schwebte der klare, farblose Alkohol. Nach starkem Schütteln erhielt man abermals die prächtig tiefrothe Lösung, mit dem Unterschiede, dass sich jetzt das Silber viel rascher (innerhalb weniger Tage) absetzte. Im Verlaufe der Zeit haben sich also die Körperchen bedeutend vergrössert. Man darf aber wohl ohne weiteres annehmen, dass die Lösung, welche sich jetzt als Suspension darthut, auch ursprünglich als Suspension existirt haben wird, nur waren damals die Theilchen unterhalb der Grösse directer physikalischer Wahrnehmung gelegen. Wir glauben daher, dass man durchwegs Partikelchen antrifft, welche die Ordnung der Moleculargrössen bedeutend überschreiten.

Allerdings ist damit noch nicht bewiesen, dass auch diese Theilchen aus normalen Silbermolecülen bestehen müssen: wenn man sich aber von der Nichtleitung des festen Colloids auf physikalische Weise [1]) Rechenschaft geben kann, so ist aus derselben kein zwingender Schluss auf die Existenz eines allotropen Silbermolecüls zu ziehen.

Washington, U. S. A., Phys. Lab. U. S. Geolog. Survey.

1) In erster Linie kommt das Gebiet der Oberflächenerscheinungen in Betracht. — In Bezug auf Farbenerscheinungen möchten wir hier noch auf den fünften Abschnitt der grösseren Kiessling'schen Arbeit („*Dämmerungserscheinungen*“, J. Kiessling; Hamburg und Leipzig, L. Voss. 1888) verweisen.

## VIII. *Beobachtungen des atmosphärischen Potentialgefälles und der ultravioletten Sonnenstrahlung; von Julius Elster und Hans Geitel.*

(Aus den Sitzungsberichten[1]) der Wiener Akademie im Auszuge mitgetheilt von den Hrn. Verfassern.)

(Hierzu Taf. II u. III.)

### Einleitung.

Von den Hrn. v. Bezold[2]) und Arrhenius[3]) ist der Gedanke ausgesprochen worden, dass die Erscheinungen der atmosphärischen Electricität unmittelbar von der Sonnenstrahlung abhängig sein könnten. Nachdem es uns gelungen war, an verschiedenen Substanzen die photoelectrische Wirkung der brechbarsten Strahlen des Sonnenlichtes (im Folgenden kurz *ultraviolette* genannt) nachzuweisen, schien uns diese Auffassung an Gewicht gewonnen zu haben, und wir hielten es für angezeigt, sie auf dem Wege unmittelbarer Beobachtung zu prüfen.

Nach Beschaffung eines auf die lichtelectrische Zerstreuung gegründeten Photometers begannen wir in Wolfenbüttel die Messungen der ultravioletten Sonnenstrahlung an heiteren Tagen im September 1889 und setzten sie bis October 1891 fort. Ein Theil der Beobachtungen wurde im Juli 1890 auf dem Sonnblickobservatorium und in der zugehörigen Thalstation Kolm Saigurn ausgeführt. Gleichzeitig ermittelten wir nach dem Vorgange des Hrn. Exner an störungsfreien Tagen in stündlichen Intervallen die Intensität des electrischen Feldes der Erde.

Indem wir im Folgenden über die angewandten Methoden und ihre Ergebnisse berichten, theilen wir den Stoff in der Art ein, dass wir in dem ersten Abschnitte die Messungen der atmosphärischen Electricität, im zweiten die Einrichtung und Prüfung der photometrischen Apparate, im dritten die

1) Wien. Ber. Bd. 101. Abth. IIa. p. 703. März 1892.

2) v. Bezold, Sitzungsber. der Berl. Akad. 36. p. 905. 1888.

3) Arrhenius, Meteorolog. Zeitschrift V. p. 297. 1888.

Vergleichung der electrischen und photometrischen Beobachtungen und im vierten die Absorption des Ultraviolett in der Atmosphäre behandeln.

### § 1. Messungen des normalen Potentialgefälles der atmosphärischen Electricität in absolutem Maasse.

Die Bestimmung des Potentialgefälles der atmosphärischen Electricität in absolutem Maasse geschah von dem Fenster unserer Wohnung aus in der folgenden Weise:

Eine in einem schweren an dem Fensterbrett befestigten eichenen Klotze verschiebbare Stange von quadratischem Querschnitt und etwa 2 m Länge trägt an ihrem einen Ende einen verticalen, mit Metallfassung versehenen Ebonitstab. Um diesen, der als Träger einer kleinen metallenen Petroleumlampe dient, vor zufälligen Berührungen zu schützen, ist er von einer ihn nirgends berührenden Glasröhre umgeben. Die Lampe wird mittels eines Metalldrahtes mit dem Knopfe eines calibrirten Exner'schen Electroskopes verbunden, während das metallene Gehäuse desselben durch Verbindung mit der Gasleitung des Hauses auf dem Potential der Erde erhalten bleibt. Auf der verschiebbaren Stange brachten wir fünf Marken an, durch welche bestimmte Entfernungen der Flamme von der Hauswand bezeichnet wurden. Für jede der so bezeichneten Stellungen des Collectors wurde der Reductionsfactor der beobachteten Potentialwerthe auf freies Feld und 1 m Höhe mehrfach bestimmt, und das Mittel aus den nahe beieinander liegenden Zahlen der Umrechnung zu Grunde gelegt. Sämmtliche nach dieser Methode gemessenen Werthe geben daher die Potentialdifferenz eines in 1 m Höhe über dem Erdboden auf freiem Felde gelegenen Punktes gegen den Erdkörper an und sind daher sowohl unter sich, als auch mit den von Hrn. Exner[1]) und uns[2]) früher gefundenen und publicirten Potentialwerthen vergleichbar. Jede unter die Messungen aufgenommene Zahl ist als Mittel aus drei Ablesungen gebildet.

Es ist von Hrn. Exner die Forderung gestellt worden,

---

1) F. Exner, Wien. Ber. **96.** IIa. p. 419. 1887 und ebenda **99.** IIa. p. 601. 1890.

2) J. Elster u. H. Geitel, Wien. Ber. IIa. p. 909. 1889.

bei luftelectrischen Messungen die Tage mit normalem Witterungscharakter streng von denen zu scheiden, bei welchen durch Wolken- oder Niederschlagsbildungen, sowie durch lebhafte Luftbewegung erfahrungsgemäss das electrische Feld der Erde beträchtliche Störungen erfährt. Da dieses Princip sich in der That als ein fruchtbringendes erwiesen hat, so sind wir bemüht gewesen, dasselbe so streng zur Durchführung zu bringen, als es unsere klimatischen Verhältnisse gestatten. Falls Niederschlagsgebiete heran- oder abzogen, denen normale Witterung voraufging oder folgte, haben wir die zwei Stunden vor Eintritt der Niederschläge gewonnenen Beobachtungen verworfen und die Messungen erst bei wolkenlosem Himmel wieder aufgenommen.

Dagegen haben wir *die* Beobachtungen nicht ausgeschlossen, während welcher nur hie und da vereinzelte, *keine* Niederschläge entsendende Wolken auftauchten, vereinzelte Cirri mit inbegriffen, da wir einen deutlichen Einfluss derartiger Gebilde auf unsere Messinstrumente nicht erkennen konnten.

Die durch Wind bewirkten Fehler in der Bestimmung des Potentialgefälles sind keinesfalls erhebliche, und zwar aus dem Grunde, weil Tage mit lebhafter Luftbewegung sich von selbst dadurch ausschalten, dass an solchen die als Collector dienende Flamme nicht brennend zu erhalten ist. An jenen Tagen, an denen dies eben noch möglich ist, äussert sich der Einfluss des Windes darin, dass, sobald die Flammengase nach unten gedrückt werden, das Electroscop einen zu tiefen Werth anzeigt, wie sich aus einem Vergleiche mit den beobachteten Ausschlägen bei windstillen Momenten sofort ergibt. Wir haben diesen Fehler nach Möglichkeit dadurch auszugleichen gesucht, dass wir nicht, wie wir sonst zu thun pflegten, das Mittel von drei aufeinanderfolgenden Ablesungen in das Beobachtungsprotokoll eintrugen, sondern nur den im Verlaufe der Messung auftretenden *grössten* Werth der Divergenz der Electroskopblättchen notirten.

Das gesammte vorliegende electrische Beobachtungsmaterial, gewonnen bei wolkenlosem oder heiterem Himmel, umfasst den Zeitraum von October 1888 bis dahin 1891 mit 177 Beobachtungstagen und 1684 Einzelmessungen. Dasselbe lässt sich in Bezug auf den Verlauf des mittleren täglichen Potential-

gefälles von zwei wesentlich verschiedenen Gesichtspunkten aus diskutiren, nämlich entweder geordnet nach der zeitlichen Aufeinanderfolge, oder vom Standpunkte der Exner'schen Theorie aus.

Wir wollen *beide* Wege einschlagen und theilen zunächst den jährlichen Verlauf des Tagesmittels des Potentialgefälles für unseren Wohnort Wolfenbüttel mit.

Wir fanden:

| Monate: | XII | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dv}{dn}\left(\frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}\right)$: | 470 | 391 | 339 | 294 | 138 | 110 | 102 | 123 | 121 | 121 | 188 | 260 |

Wir ersehen daraus, dass das atmosphärische Potentialgefälle im December seinen höchsten durchschnittlichen Werth erreichte ($dv / dn = 470$ Volt/Meter), während das Minimum im Juni mit 102 Volt/Meter beobachtet wurde. In Fig. 1 ist die jährliche Variation des Potentialgefälles graphisch dargestellt, als Abscissen sind die Zeiten (Monate) als Ordinaten die Werthe für $dv / dn$ aufgetragen.

Das Zeichen der Luftelectricität fanden wir fast ausnahmslos *positiv*, nur an einigen aussergewöhnlich kalten Decembertagen des Jahres 1890 (am 28., 29. und 30.) mit einem mittleren Dampfdruck von etwa 1 mm erschien es im Laufe eines Tages bei wolkenlosem Himmel stundenlang negativ. Dabei trieb ein lebhafter SE-Wind feinen Staubschnee über eine ältere Schneelage hinweg. Die ganz abnormen, häufig von + zu − überspringenden Werthe des Potentialgefälles kennzeichneten sich deutlich als Störungen, die vermuthlich in der Reibung des Staubschnees an der übereisten Erdoberfläche ihre Ursache hatten.

Die zweite mögliche Darstellung der jährlichen Variation und zwar in ihrer Abhängigkeit vom Wasserdampfgehalt der Atmosphäre ergibt sich, wie oben erwähnt, wenn wir uns auf den Boden der Exner'schen Theorie stellen.

Nach Herrn Exner[1]) ist:

$$\frac{dv}{dn} = \frac{A}{1 + k q_0},$$

1) F. Exner, Wien. Berichte. **99.** IIa. p. 623. 1890.

wo $A$ das Potentialgefälle bedeutet, das herrschen würde, wenn aller Wasserdampf aus der Atmosphäre niedergeschlagen wäre; $q_0$ bezeichnet die in einem Kubikmeter Luft an der Erdoberfläche enthaltene Menge Wasserdampfes, gemessen in Grammen, $k$ eine Constante.

Für die Constanten der Formel hat Hr. Exner durch ein Näherungsverfahren aus rund 1100 Beobachtungen, die theils in Wien, St. Gilgen, Venedig, Wolfenbüttel, theils in Ceylon gewonnen wurden, folgende Werthe abgeleitet:

$$A = 1410 \,.\, k = 1.15.$$

Da wir zu jeder Messungsreihe des Potentialgefälles den zugehörigen Werth von $q_0$ aus den Beobachtungen der meteorologischen Station zu Braunschweig berechnen konnten, so sind wir in der Lage entscheiden zu können, ob die von uns beobachteten Werthe der Tagesmittel von $q_0$ und $dv/dn$ sich in den Rahmen dieser Formel einordnen. Wir erhalten so die folgende Zusammenstellung:

| $q_0$ | Potentialgefälle | |
|---|---|---|
| | beobachtet | berechnet |
| 1,6 | 502 | 496 |
| 1,9 | 430 | 442 |
| 2,5 | 400 | 364 |
| 3,7 | 318 | 268 |
| 4,6 | 252 | 224 |
| 5,6 | 137 | 189 |
| 6,5 | 184 | 166 |
| 7,6 | 148 | 145 |
| 8,4 | 112 | 133 |
| 9,4 | 115 | 119 |
| 10,6 | 118 | 107 |
| 13,5 | 121 | 85 |

Aus dieser Darstellung ersehen wir, dass für niederen Dampfgehalt — wenn wir von der Anomalie bei Gruppe Nr. 6 ($q_0$ = 5,6) absehen —, die Uebereinstimmung ziemlich befriedigend genannt werden kann, dass dagegen für Dampfgehalte von 8,0—15 g der Verlauf der Curve der entgegengesetzte ist, wie ihn Exner's Theorie verlangt. Während der Dampfgehalt von 8,4—13,5 g steigt, nimmt auch das Potentialgefälle wieder von 112—121 Volt/Meter zu, während theoretisch

(nach Hrn. Exner) eine weitere Abnahme bis zu 85 Volt zu erwarten stand. Zum mindesten muss man hieraus den Schluss ziehen, dass von $q_0 = 8$ g aufwärts eine *deutliche* weitere Abnahme des Potentialgefälles für unseren Wohnort *nicht* zu constatiren ist.

Da die electrischen Beobachtungen in stündlichen Zeiträumen erfolgten, so lässt sich auch die *tägliche* Variation des Potentialgefälles aus denselben ermitteln.

Hierzu wurden die Einzelbeobachtungen in der Weise miteinander combinirt, dass für jeden Monat die Stundenmittel des Potentialgefälles berechnet wurden. Lücken in den Beobachtungen sind, um das Material von willkürlichen Eingriffen frei zu halten, *nicht* durch Interpolation ausgefüllt.

Wir betrachten zunächst die tägliche Variation in den Monaten: November, December, Januar, Februar, März (Winter) unter Zugrundelegung der graphischen Darstellungen in Fig. 2. Wir entnehmen aus denselben, dass der Verlauf während der genannten Monate ein unregelmässiger ist. Diese Unregelmässigkeit zeigt sich übrigens nicht nur in der Verschiedenheit der Monatscurven unter sich, sondern tritt auch schon hervor bei der Vergleichung weniger Tage ein und desselben Monats. Im ganzen zeigt sich, dass die Potentialwerthe gegen Abend höher sind als am Morgen, sodass um 9 oder 10 p. durchschnittlich die höchsten Werthe beobachtet werden. Es erhellt dies sehr deutlich, wenn man die 80 Tage der genannten Monate unter Berücksichtigung der Gewichte zu einer einzigen Curve vereinigt. Diese Curve darf aber durchaus nicht so aufgefasst werden, als gebe sie den wahrscheinlichsten Gang des Potentialgefälles an einem Wintertage wieder. (Fig. 4, die obere Curve.)

Der Verlauf des Potentials in den übrigen Monaten des Jahres ist ein davon gänzlich verschiedener. Ein Blick auf die in Fig. 3 verzeichneten Curven lehrt sofort, dass die tägliche Variation in den Monaten April bis einschliesslich October (Sommer) der *Hauptsache nach die gleiche* ist. Ueberall sinken die hohen Vormittagswerthe bis zu einem tiefen Minimum gegen Sonnenuntergang herab; nur im Juni und Juli eilt es diesem Zeitpunkte um einige Stunden voran. Man wird hier kein Bedenken tragen, den aus einer Combination der Monats-

curven hervorgehenden mittleren Curven die Bedeutung einer Näherungsdarstellung des Potentialverlaufes im Sommer beizulegen, und zwar in dem Sinne, dass selbst einzelne herausgegriffene Tage der genannten Jahreszeit im grossen und ganzen das gleiche Verhalten zeigen. (Fig. 4, die untere Curve.)

Vereinigt man schliesslich die Winter- und Sommercurve und zwar wiederum unter Berücksichtigung der Anzahl der Beobachtungen zu einer einzigen Curve (Jahrescurve), so erhält man eine Linie, die den charakteristischen Gang des Potentialgefälles während der Sommermonate durchaus nicht mehr erkennen lässt. (Fig. 4, die mittlere Curve.)

### § 2. Die Photometrie der ultravioletten Sonnenstrahlung.

Die Wirkung der Sonnenstrahlen, um deren Messung es sich für uns handelt, besteht in der Fortführung negativer Electricität von leitenden Oberflächen, die von ihnen getroffen werden. Sie ist, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, vorzugsweise dem kurzwelligen Lichte eigenthümlich, den Hauptantheil übernehmen die violetten und ultravioletten Strahlen.[1]) Licht beliebiger Herkunft, dass eine Glasschicht passirt hat, ist daher gegenüber den meisten Körpern von geringer photoelectrischer Kraft; es hat die activen Strahlen, wenn es solche überhaupt enthielt, zum grössten Theile durch Absorption im Glase eingebüsst. Nur einige wenige bestimmte Substanzen, die aber ihrer Natur nach nicht in freiem Zustande an der Erdoberfläche vorkommen können, wie die Alkalimetalle[2]), erweisen sich auch unter diesen Verhältnissen noch stark lichtempfindlich. Wollte man daher zur Messung der Intensität der electrisch wirksamen Bestandtheile des Sonnenlichtes Photometer benutzen, bei denen Glas oder andere absorbirende Substanzen in den Gang der Strahlen eingeschaltet sind, so würde man gerade *die* Lichtarten nahezu beseitigen, auf deren quantitative Bestimmung am meisten ankommt. Deshalb würde das Chlorknallgasphotometer von Bunsen[3]) sowie alle die photochemischen Methoden, bei denen die lichtempfindliche Substanz hinter Glas oder in organische Sub-

1) W. Hallwachs, Wied. Ann. **33.** p. 301. 1888.
2) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **43.** p. 225. 1891.
3) Bunsen u. Roscoe, Pogg. Ann. **108.** 1859.

stanzen eingebettet dem Lichte exponirt wird, für unseren Zweck nicht ausreichen, am wenigsten aber die Messung der gesammten Strahlungsenergie durch ihren thermischen Effect, der durch die gebräuchlichen Actinometer gegeben wird.

Es ist vielmehr nothwendig, ein Photometer zu construiren, durch welches gerade diejenige Wirkung des Lichtes gemessen wird, die uns hier interessirt, nämlich die von der ungeschwächten Strahlung abhängige Electricitätszerstreuung. Nach vielen Versuchen, ein geeignetes Material zu finden, kamen wir schliesslich zu der Verwendung des amalgamirten Zinks. Eine kleine Kugel aus chemisch reinem Zink, an einem eingeschraubten Stahlstifte befestigt, lässt sich, wenn sie frisch amalgamirt ist, durch erneutes Eintauches in reines Quecksilber und nachheriges Abreiben mit trockenem Seidenpapier von sehr gleichförmiger Oberflächenbeschaffenheit herstellen. Eine solche Kugel gibt, wenn sie negativ geladen den freien Sonnenstrahlen ausgesetzt ist, ihre Electricität mit grosser Schnelligkeit an die umgebende Luft ab. Der Verlust an Ladung in einer gegebenen Zeit kann leicht an einem Electrometer gemessen werden, und schon der roheste Versuch lässt erkennen, dass die Geschwindigkeit der Entladung in starkem Maasse mit der Erhebung der Sonne über den Horizont zunimmt.

Eine amalgamirte Zinkkugel in Verbindung mit einem Electrometer wird also ein electrisches Actinometer darstellen, sobald es möglich ist, anzugeben, nach welchem Gesetze der in der Zeiteinheit gemessene Electricitätsverlust von der Intensität des die Kugel bestrahlenden Lichtes abhängt. Natürlich sind die Angaben eines solchen Instrumentes zunächst nur auf *die* Strahlengruppe zu beziehen, welche gerade an Zinkflächen die electrische Zerstreuung bewirkt.

Um zu einer Beziehung zwischen Lichtintensität und Electricitätsverlust zu gelangen, machen wir von einer Hypothese Gebrauch, deren experimentelle Prüfung im Folgenden mitgetheilt werden wird; wir nehmen an, dass der Coefficient der Zerstreuung der negativen Electricität von der Zinkfläche eine lineare Function der Intensität des Lichtes sei.

Bezeichnen wir diesen Coefficienten mit $z$, mit $J$ die Intensität der photoelectrisch wirksamen Strahlung, so setzen wir:

$$z = a + b \, . \, J.$$

$a$ bedeutet demnach den Zerstreuungscoefficienten bei Ausschluss des Lichtes, $b$ ist ein Factor, welcher von der Beschaffenheit der lichtempfindlichen Fläche, aber nicht von der Lichtintensität und dem electrischen Potential der Zinkkugel abhängig ist. Bezeichnet $V$ dies Potential, $-dE$ die im Zeitelemente $dt$ aus der Zinkfläche austretende Electricitätsmenge, so ist:

$$-dE = z \,.\, V \,.\, dt.$$

Ist $C$ die Capacität des gesammten, aus Electrometer und Zinkkugel bestehenden Leitersystems, also:

$$E = C V,$$

so wird:

$$C d V = -z V \,.\, dt,$$

also:

$$C \log \frac{V}{V_0} = -z \,.\, t.$$

Durch Einsetzung des Werthes von $z$ ergibt sich:

$$\log \frac{V_0}{V} = \frac{a + b \,.\, J}{C} t.$$

$V_0$ ist das vor Beginn, $V$ das nach Verlauf der Expositionszeit $t$ beobachtete Potential der Zinkkugel. Aus der letzten Gleichung folgt:

$$J = \frac{1}{b} \left\{ \frac{C \,.\, \log \frac{V_0}{V}}{t} - a \right\}.$$

$a$ bestimmt man, indem man für dieselbe Expositionsdauer $t$ das Absinken des Potentials $V_0$ bei Ausschluss des Lichtes $\{J = 0\}$ beobachtet, der Restbetrag sei nun $V'$, so ist:

$$a = \frac{C \,.\, \log \frac{V_0}{V'}}{t}$$

und durch Einsetzung dieses Werthes in die vorige Formel erhalten wir:

$$J = \frac{C}{b \,.\, t} \left\{ \log \frac{V_0}{V} - \log \frac{V_0}{V'} \right\}.$$

Das zweite Glied des Klammerausdrucks stellt eine Correction dar, die durch die gewöhnliche — nicht photoelectrische — Zerstreuung nothwendig wird; um diesen Betrag würde man die Strahlungsintensität zu hoch finden, wenn man die vom

Lichte unabhängige Zerstreuung vernachlässigt. (Es ist, wie weiter unten sich ergeben wird, für den praktischen Gebrauch nicht zweckmässig, der Formel die Gestalt:

$$J = \frac{C}{b \cdot t} \log \frac{V'}{V}$$

zu geben.) Misst man immer mit demselben Apparate in derselben Anordnung der Theile und unveränderter Umgebung, sodass $C$ constant bleibt, ist man ferner sicher, dass sich die Lichtempfindlichkeit der Zinkfläche nicht ändert, ist also auch $b$ constant, setzt man schliesslich eine bestimmte Einheit der Expositionsdauer $t$, etwa 1′ fest, so erhält man die Lichtintensität nach dieser Formel in einem willkürlichen Maasse. Die Constante $C/b$ nimmt man dann zweckmässig gleich der Einheit und verwendet Brigg'sche statt der natürlichen Logarithmen.

Unsere nächste Aufgabe ist nun, zu zeigen, dass die entwickelte Formel mit hinreichender Genauigkeit den Zusammenhang zwischen der Strahlungsintensität und der Electricitätszerstreuung darstellt. Dies kann dadurch geschehen, dass man mittels des Electrometers und der lichtempfindlichen Fläche Lichtintensitäten misst, deren Verhältniss im voraus bekannt ist. Wird dies unter allen Bedingungen, die bei praktischen Messungen der Sonnenstrahlung vorkommen können, durch die Formel wiedergegeben, so ist sie offenbar brauchbar. Da es nicht möglich ist, das Sonnenlicht in zahlenmässig angebbarer Weise in seiner Intensität willkürlich abzuändern, so mussten wir zu künstlichen Lichtquellen greifen. Gas und Petroleumlicht ist auf Zinkflächen so gut wie ohne Wirkung, eine Magnesiumflamme lässt sich nicht in genügender Constanz brennend erhalten, electrisches Bogenlicht stand uns nicht zur Verfügung und würde auch wohl schwerlich gleichmässig genug herzustellen sein. Wir benutzen daher das Licht electrischer Funken, die durch einen kleinen Inductionsapparat (Funkenlänge 2 cm) in Verbindung mit einer Leydener Flasche geliefert wurden.

Dies Licht wirkt wegen seines hohen Gehaltes an Ultraviolett ziemlich stark auf Flächen von amalgamirtem Zink ein, bietet aber den Uebelstand, dass es electrische Kräfte erfordert, welche durch Fernwirkung sowohl die Electricitätszerstreuung

wie die Angaben des Electrometers beeinflussen können. Die hierdurch nothwendig gemachten Schutzvorrichtungen werden noch besprochen werden. Vor der Hand ist nur hervorzuheben, dass es genügt, die lichtempfindliche Fläche in einem dunkeln Raume in Entfernungen von den Funken aufzustellen, die im Verhältnisse 1 : 2 : 3 : 4 etc. stehen, um Beleuchtungsintensitäten zu erhalten, deren Relativzahlen $1 : {}^1/_4 : {}^1/_9 : {}^1/_{16}$ etc. sind. Wenn die obige Formel für beliebige Entfernungen, Expositionsdauern und Anfangsladungen ohne Unterschied das Gesetz der Intensitätsabnahme des Lichtes mit dem Quadrate der Entfernung wiedergibt, so sind wir berechtigt, sie der Construction eines Photometers zu Grunde zu legen.[1])

Als lichtempfindliche Fläche diente eine Platte *P* (vgl. Fig. 5) von amalgamirtem Zink von 64 cm² Oberfläche. Wir wählten die Plattenform, da sie für die Messung von Entfernungen am bequemsten ist, ausserdem würde bei einer Kugel von gleicher Oberfläche ihr Gewicht sehr störend geworden sein. Die Platte *P* wird von einem Siegellackstücke *S* getragen, das rechtwinkelig an eine Holzleiste *LL'* angekittet ist. Von einem Holzkasten von etwa 1 m Länge und 100 cm² (nahezu quadratischem) Querschnitt ist der Deckel frei abnehmbar, die eine der kleinsten Seitenflächen enthält bei *F* ein kreisförmiges mit klarem Gypse verschlossenes Fenster von 2,5 cm Durchmesser. Die gegenüberliegende Wand ist bis auf eine schmale Leiste *MN* ganz entfernt, an dieser ist nach aussen ein Metallring *R* mittels eines Siegellackstäbchens *S'* befestigt. Die Leiste *LL'* lässt sich auf zwei an den Längswandungen des Kastens angebrachten Vorsprüngen, deren einer (*MQ*) in der Figur sichtbar ist, verschieben, *P* schwebt alsdann frei, ohne die Wände zu berühren, innerhalb des Kastens. Von *P* aus ist ein dünner Draht durch *R* gezogen, der durch das kleine Gewicht *G* gespannt erhalten wird. Von *R* führt die Drahtleitung zum Electrometer. Durch Verschieben von *LL'* lässt sich *P* an jede Stelle des Kastens bringen, je nach der Lage ist die Länge des Drahtstückes *RG* verschieden. Der Kasten ist inwendig überall geschwärzt und

1) Hierbei ist für die geringen in Betracht kommenden Entfernungen die Absorption des Ultraviolett in der Luft vernachlässigt.

kann, wenn $P$ eingesetzt ist, durch den ebenfalls unten geschwärzten Deckel oben geschlossen werden.

Als electrischer Messapparat für die Abnahme des Potentials auf $P$ dient ein Aluminiumblattelectroskop. Das Instrument trägt, wie das Exner'sche, eine willkürliche Millimeterscala, der Werth der in Scalentheilen gemessenen Divergenzen wird durch Calibrirung mittelst einer vielpaarigen Kette ermittelt.

Die etwa 1 mm langen electrischen Funken, welche das zur Bestrahlung der Platte $P$ dienende Licht lieferten, sprangen zwischen zwei in ein Funkenmikrometer eingesetzten Zink- oder Aluminiumspitzen in einer Entfernung von 1 cm vor dem Gypsfenster $F$, und zwar hinter einer kreisförmigen Oeffnung einer 21 cm im Durchmesser haltenden Blechscheibe, an die sich ein Netz aus eng geflochtenem Eisendraht anschloss. Durch dies zur Erde abgeleitete Schirmsystem wurde, wie die Beobachtung zeigte, sowohl die electrostatische Einwirkung des Inductionsapparates, als auch der Einfluss des Funkenlichtes auf das Electroskop und die zu ihm führenden Drahtleitungen unmerklich gemacht. Der Unterbrechungshammer des Inductoriums war so eingestellt, dass er mit Schliessung des Hauptstromes sofort in Thätigkeit trat, der Funkenstrom also gleichzeitig vor der Oeffnung $F$ einsetzte. Der Stromschluss wurde mittelst eines Quecksilbercontactes bewirkt, der in unmittelbarer Nähe des Beobachters eingeschaltet war.

Sollte beobachtet werden, so setzten wir die an ihrer Vorderseite frisch amalgamirte und mit Seidenpapier abgeriebene Zinkplatte $P$ an einem durch den Siegellackträger $S$ geführten Stahldrahte festgeschraubt mittelst der Leiste $L L'$ in den Dunkelkasten ein und brachten sie in eine durch einen Centimetermaassstab gemessene Entfernung $r_1$ von der Unterbrechungsstelle des Funkenmikrometers vor $F$. Dann wurde der Deckel des Kastens geschlossen und der Ring $R$ durch einen Draht mit dem Exner'schen Electroskope verbunden, dessen Gehäuse zur Erde abgeleitet war. Vor dem Electroskope nimmt der Beobachter Platz und ertheilt demselben und dadurch auch der Zinkplatte $P$ mittelst einer Zambonischen Säule eine statische negative Ladung, die eine gewisse Divergenz der Aluminiumblättchen bewirkt. Wir

wählten das Potential der Platte bei den meisten Versuchen von immer derselben Grösse und erreichten dies dadurch, dass wir an dem nach $R$ führenden Drahte einen Leinenfaden frei herabhängend befestigten und vermittelst dieses Halbleiters durch den angelegten Finger dem absichtlich zu stark geladenen Instrumente so lange Electricität entzogen, bis es bei der gewünschten Divergenz (25 Scalentheilen) einstand. Dann schliesst der Beobachter den Quecksilbercontact und lässt den Funkenstrom des Inductoriums eine an der Uhr gemessene Zeit ($t'$) vor $F$ übergehen, nach Ablauf derselben wird der Contact unterbrochen. Alsdann liest man das Electroskop von neuem ab und findet nun eine je nach der Stellung der Platte $P$ und der Expositionsdauer $t$ verschiedene Abnahme der Divergenz, hervorgerufen durch die photoelectrische Zerstreuung. Stärkere Unregelmässigkeiten im Gange des Unterbrechers und in der Funkenfolge verrathen sich leicht dem Ohre, Messungsreihen, bei denen sie vorkamen, wurden verworfen. Es erübrigt nun noch, den Betrag der gewöhnlichen Electricitätszerstreuung (ohne Belichtung) zu bestimmen. Arbeitet man im Winter in geheizten Räumen, so ist selbst bei den grössten Expositionszeiten, die wir wählten (2'), der Einfluss derselben nicht oder kaum bemerkbar. $V'$ (vergl. Formel) erweist sich als gleich $V_0$, das Correctionsglied der Formel verschwindet.

Nachdem so die Ablesungen für eine bestimmte Entfernung ($r_1$) und Expositionsdauer ($t_1$) der Platte $P$ ausgeführt sind, wird diese durch Verschiebung in einen anderen, ebenfalls gemessenen Abstand ($r_2$) von der Funkenstrecke gebracht, und wie zuvor die Abnahme des Potentials bei Belichtung beobachtet. Dann bringen wir sie in ihre Anfangslage zurück und wiederholen für diese die Messung, um eine etwaige Veränderung in der Lichtempfindlichkeit erkennen zu können. Liegen die zuerst und zuletzt gefundenen Zahlen nahe zusammen, was stets zutrifft, wenn keine zu lange Zeit (wenige Minuten) zwischen den Messungen verfloss, so sind wir sicher, dass die Platte constant geblieben ist. Es ist so für jede Lage der Platte $P$ bestimmt worden: 1) die Expositionsdauer $t$, 2) die Entfernung $r$, 3) das Anfangspotential $V_0$, 4) das nach $t'$ Belichtungszeit noch vorhandene Potential $V$ und 5) wenn nöthig, für dieselbe Zeit der Betrag $V'$ auf welchen

$V_0$ durch die gewöhnliche, nicht photoelectrische Zerstreuung herabsank. Wird also, wie festgesetzt, die Constante $C/b$ gleich der Einheit genommen, so wird:

$$J = \frac{1}{t}\left\{\log\frac{V_0}{V} - \log\frac{V_0}{V'}\right\}.$$

Durch Einsetzung der den abgelesenen Scalentheilen $s_0$, $s$, $s'$ entsprechenden Werthe von $V_0$, $V$, $V'$ für beide Stellungen der Platte ($r_1$ und $r_2$) sowie der Expositionsdauern $t_1$ und $t_2$ erhält man für $J$ zwei Zahlenwerthe $J_1$ und $J_2$ und es müsste sich herausstellen, dass:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

Wie schon oben bemerkt, war bei unseren Messungen im geheizten Zimmer die gewöhnliche Zerstreuung meist unmerklich (für 1—2′) d. h. $V'$ gleich $V_0$, dann wird:

$$J = \frac{1}{t}\log\frac{V_0}{V},$$

und da die Anfangsladung $V_0$, wenn nichts besonders bemerkt wird, bei allen Versuchen die gleiche war, so sind $V$ und $t$ die einzigen, die Grösse von $J$ bestimmenden Variabeln. Demnach ist:

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{t_2}{t_1}\,\frac{\log\frac{V_0}{V_1}}{\log\frac{V_0}{V_2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

die durch die Beobachtungen zu bestätigende Gleichung.

Zur leichteren Handhabung der Formel legten wir uns eine Tabelle an, in welcher wir (in Brigg'schen Logarithmen) für die Anfangsladung $V_0 = 231$ Volt (25 Scalentheile) für jeden Scalentheil den Betrag von $\log V_0 / V$ verzeichneten. Aus derselben Tafel entnimmt man auch, wenn es erforderlich, den Werth der Correction für die gewöhnliche Zerstreuung. Aus diesem Grunde würde es, wie schon früher erwähnt, unzweckmässig sein, die Correction mit dem Hauptgliede der Formel zu vereinigen. Natürlich ist die Tabelle auch für beliebige Anfangspotentiale brauchbar, man hat nur die der Anfangsladung entsprechende Zahl von der der Restladung zugehörigen abzuziehen.

Aus der grossen Zahl der zur Prüfung der Formel ausge-

führten Beobachtungen heben wir an dieser Stelle nur eine Reihe hervor, die wir bei gleichzeitiger Veränderung der Expositionszeiten und der Entfernungen erhielten. Indem wir für eine bestimmte Entfernung und Expositionsdauer den Werth von log $V_0 / V$ durch Beobachtung bestimmten und mittelst desselben den Betrag dieses Quotienten für eine andere Entfernung und Belichtungszeit berechneten, konnten wir aus der Calibrirungstabelle des Electroskops die zu erwartende Schlussdivergenz entnehmen und diese dann mit der beobachteten vergleichen. Messungen dieser Art sind in Reihe IV zusammengestellt.

Reihe IV. 12. November 1889.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Expositionsdauer $t''$ | | 20 | 15 | 25 | 40 |
| Entfernungen $r$ | | 30 | 15 | 20 | 45 |
| Divergenzen $s$ | beobachtet | 17,0 | 7,1 | 7,7 | 18,1 |
| | berechnet | – | 7,0 | 7,7 | 17,8 |

Die in der ersten Verticalreihe aufgeführten Zahlen sind der Berechnung der Divergenzen für die folgenden zu Grunde gelegt. Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung kann in Anbetracht der Genauigkeitsgrenze der Ablesung wohl als befriedigend bezeichnet werden.

Durch besondere Versuchsreihen überzeugten wir uns ferner davon, dass die zu den photometrischen Versuchen verwandten Zinkflächen durch den Process des Amalgamirens stets in nahe der gleichen Lichtempfindlichkeit wieder hergestellt werden können und dass der Einfluss der Temperatur der Luft, ihrer Dichtigkeit, des Feuchtigkeits- und Kohlensäuregehaltes, sowie ihres Bewegungszustandes in den Grenzen belanglos ist, innerhalb deren diese Veränderlichen in der freien Atmosphäre variiren. Nur das electrische Feld der Erde erfordert bei Messungen im Freien die Vorsicht, dass man die lichtempfindliche Zinkfläche entweder durch ein Geflecht aus Draht oder ein sie umgebendes, den Sonnenstrahlen paralleles Metallrohr schützt.

Die im Vorigen zum Theil angedeuteten, in den Wiener Berichten eingehend beschriebenen Versuche haben zu dem Ergebnisse geführt, dass es unter Anwendung gewisser Vorsichtsmassregeln möglich ist, vermittelst der photoelectrischen Zerstreuung

die Intensität derjenigen stark brechbaren Strahlen des Sonnenlichtes zu messen, welche auf Flächen amalgamirten Zinks electrisch entladend wirken.

Wir haben dem electrischen Actinometer je nach dem Zwecke, für den es bestimmt ist, zwei verschiedene Formen gegeben. Bei der ersten Construction sahen wir besonders darauf, dass es die gesammte Strahlung, der ein Punkt der Erdoberfläche ausgesetzt ist, zu messen erlaubte und, da es fortlaufenden, womöglich täglichen Beobachtungen dienen sollte, dass es leicht zu handhaben und stets zum Gebrauche bereit war. Wir richteten dieses als Standinstrument ein. Die zweite Form construirten wir für die Photometrie der eigentlichen Sonnenstrahlen unter möglichstem Ausschluss des Himmelslichtes; da dieser Apparat zu Beobachtungen an verschiedenen Orten bestimmt war, musste er transportabel sein.

Wir beschränken uns hier auf die Beschreibung des letzteren.

Das transportabele, für die Messung der eigentlichen Sonnenstrahlung construirte Photometer stimmt in seinen wesentlichen Theilen mit dem Standactinometer überein. Der lichtempfindliche Körper ist bei beiden eine Kugel aus amalgamirtem Zink von 13 mm Durchmesser, die von einem eingeschraubten Stahlstifte getragen wird. An einer auf drei Füssen ruhenden Eisenstange sind drei Klammern, $K_1$ $K_2$ $K_3$ verstellbar. (Fig. 6) Die obere trägt das nach Exners Angaben construirte Electroskop. An der zweiten $K_2$ (mit Universalgelenk) ist das 20 cm lange und 3 cm weite innen geschwärzte Messingrohr $R$ befestigt. Ueber die untere Oeffnung lässt sich mit Reibung eine Metallkappe $N$ schieben, diese trägt in ihrer centralen Durchbohrung das gefirnisste Ebonitstück $E$, durch welches der Stift $S$ der lichtempfindlichen Kugel $K$ geführt ist. Die andere Oeffnung ist durch den Pappverschluss $M$ gegen das Licht verschliessbar. Von dem Rohre $R$ aus führt ein Leitungsdraht $D$ nach dem Gehäuse des Electroskops. In die unterste Klammer $K_3$ ist ein Plattencondensator $C$ von 133 cm$^2$ Oberfläche eingeklemmt, dessen Dielectrium aus einer Ebonitplatte, dessen Belegung aus Stanniol gebildet wird. Die eine Belegung steht mit dem Knopfe, die andere mit dem Gehäuse des Electroskops in leitender Verbindung. Die Belegungen sind zum

Schutze gegen Quecksilber und gegen Licht mit einer Lage schwarzen Firnisses überzogen. Der Zweck dieses Condensators ist, die Entladung der Photometerkugel durch das Licht so zu verlangsamen, dass man auch bei den stärksten Lichtintensitäten noch Expositionsdauern von 15″ verwenden kann.

Um mit dem Apparate zu beobachten, entfernt man zunächst von dem Rohre *R* die beiden Verschlüsse, richtet dann dasselbe gegen die Sonne, indem man es so einstellt, dass sein Schatten auf einem dahinter gehaltenen Papiere als Kreisring von gleichförmiger Dicke erscheint. Die Kugel *K* wird frisch amalgamirt und, mit Seidenpapier blank gerieben, mittels der Fassung *N* in die Röhre *R* eingeführt, *S* mit dem Electroskope verbunden, und der Verschluss *M* aufgesetzt. Nun wird durch Vermittelung eines Leinenfadens in der oben angegebenen Art das Electroskop zu der Anfangsdivergenz $s_0$ negativ geladen, durch Abheben des Verschlusses *M* die Kugel eine gemessene Zeit ($t$) exponirt, und der Restbetrag $s$ der Divergenz abgelesen. Die Sonnenhöhe wird mittels eines mit Schattenstift und Bleilot versehenen Theilkreises bestimmt.

Die Vorbereitungen zur Messung dürfen keine zu lange Zeit beanspruchen, weil sonst das Sonnenlicht am Schlusse nicht mehr nahezu axial in die Röhre *R* einfallen würde; durch Uebung ist bald eine gewisse Fertigkeit in den Handgriffen zu erreichen.

Nicht ohne Bedenken hatten wir uns zu dem Gebrauche des Ebonitcondensators entschlossen, wir fürchteten Schwierigkeiten in mangelhafter Isolation, sowie durch Rückstandbildung zu finden. Die erste Befürchtung ist, solange der Condensator nicht erwärmt ist, zutreffend, da aber der Apparat nur im Sonnenschein gebraucht wird, so sind wir ernstlichen Hindernissen nicht begegnet. Erfreulicherweise ist bei den Potentialdifferenzen, wie wir sie im Maximo anwandten, auch von Rückstandbildungen nichts wahrzunehmen, wie ja überhaupt diese im Ebonit relativ klein sind.

Wir stellten das transportable Actinometer in zwei Exemplaren her, die abgesehen von der verschiedenen Empfindlichkeit der Electroskope in allen Stücken möglichst übereinstimmten. Die beiden Instrumente wurden der Controlle wegen öfters gleichzeitig benutzt; ihre Angaben lagen sehr nahe bei einander.

Indem wir uns nun zu den Resultaten der photometrischen Beobachtungen wenden, schicken wir die mit dem Standactinometer erhaltenen voran.

Wir haben in dem Zeitintervalle von October 1889 bis 1891 die Lichtmessungen in stündlichen Terminen zu jeder Tageszeit vorgenommen, sobald es der Zustand der Atmosphäre zweckmässig erscheinen liess, d. h. vorzugsweise bei wolkenlosem Himmel, und nur dann, wenn die Sonne von Wolken frei war.

Wir theilen die Ergebnisse in graphischer Darstellung mit. Fig. 7, Taf. II stellt die Jahrescurve der Mittagsintensitäten, Fig. 8a und 8b die Tagescurven für die einzelnen Monate dar. Man erkennt, dass die Veränderlichkeit der ultravioletten Strahlung von Sonne und Himmel unter Mittag im Laufe eines Jahres im ganzen regelmässig ist mit dem Maximum in der zweiten Hälfte des Juni, dem Minimum in der entsprechenden des December, und zwar beträgt ersteres das 70—80fache des letzteren. Im übrigen ist der Verlauf in Bezug auf diese beiden Extreme nicht völlig symmetrisch, gleichen Sonnenhöhen entsprechen in dem Intervalle December—Juni im ganzen kleinere Werthe der Strahlung, als von Juni bis December (vgl. z. B. die Aequinoctien). Es verräth sich somit eine Art von Nachwirkung in Bezug auf die Transparenz der Luft in ähnlicher Weise, wie sie auch in der Abhängigkeit der Lufttemperatur von der Declination der Sonne zu Tage tritt. Bemerkenswerth sind zwei secundäre Minima, das eine im März, das andere im September.

In Fig. 8a und b tritt zunächst der sehr grosse Unterschied der Lichtmengen hervor, welche die Actinometerkugel in den Winter- und Sommermonaten empfängt, und wie bei dem jährlichen Verlaufe die *vor* dem höchsten Stande der Sonne beobachteten Werthe durchschnittlich niedriger, als die im gleichen Zeitabschnitte nachher gemessenen sind, so zeigen sich auch in der täglichen Variation die Nachmittagsintensitäten vielfach denen der entsprechenden Morgenstunden überlegen. Für die chemischen Strahlen ist diese Erscheinung schon von Hrn. Marchand zu Fécamp bemerkt worden.[1])

1) M. R. Radau, Les Radiations chimiques du soleil, Paris, Gauthier-Villars 1877. p. 71.

Auffallend ist das Vorrücken des Maximums in den Monaten März, April, September, October, in den beiden ersten findet sich sogar eine deutlich ausgeprägte Mittagsdepression vor. Verminderungen der Sonnenstrahlung zur Zeit der Culmination sind übrigens auch bei den calorimetrischen und bolometrischen Bestimmungen zu Tage getreten[1]).

Messungen mit dem transportablen Actinometer wurden nur dann unternommen, wenn der Zustand des Himmels eine über einige Stunden andauernde Klarheit versprach. Da diese Beobachtungen als Grundlage für die Bestimmung der Absorption des Ultraviolett in der Atmosphäre dienen sollten, mussten wir danach streben, an ein und demselben Tage bei möglichst verschiedenen Sonnenhöhen zu messen. Wir beschränkten uns daher auf die Monate Juni, Juli, August. Von den 106 Einzelbeobachtungen entfallen 64 auf Wolfenbüttel (Meereshöhe 80 m), 19 auf Kolm Saigurn (Meereshöhe 1600 m) und 23 auf den Sonnblickgipfel (Meereshöhe 3100 m). An den letzten Stationen maassen wir mit zwei Apparaten, die, wie oben schon bemerkt wurde, möglichst übereinstimmend gebaut waren und nur in der Empfindlichkeit und dem Ladungsbereiche der Electroskope stark differirten. Da hierdurch zwar die Potentiale der Anfangs- und Schlussladung $V_0$ und $V$, nicht aber deren Verhältniss beeinflusst wird, so mussten die Instrumente nahe gleiche Zahlen für $J$ ergeben.

Wir geben zwei Tabellen, von denen die eine den mittleren Verlauf der ultravioletten Strahlung der Sonne in runden Zahlen in den einzelnen Tagesstunden der Monate Juni und August in Wolfenbüttel enthält, während die andere denselben für den Monat Juli in Kolm-Saigurn und auf dem Sonnblick erkennen lässt; zum Vergleich ist in diese die Variation für den Juni in Wolfenbüttel nochmals aufgenommen. (Hierzu die graphische Darstellung, Fig. 9).

1) A. Crova et Houdaille, Annales de chim. et de phys. T. 21. p. 188. 1890.

Verlauf der Sonnenstrahlung im Juni und August in Wolfenbüttel.

| Monat | 7a. | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 m. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 p. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Juni | 8 | 13 | 23 | 25 | 35 | 35 | 33 | 29 | 22 | 14 | 5 | 3 |
| August | 6 | 8 | 22 | 28 | 27 | 36 | 26 | 24 | 18 | 8 | 6 | 2 |

Intensität der ultravioletten Sonnenstrahlung.

| | | 6a. | 7a. | 8a. | 9a. | 10a. | 11a. | 12m. | 1p. | 2p. | 3p. | 4p. | 5p. | 6p. | Bemerkungen |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wolfenbüttel, | 80 m ü. d. Meere | 4 | 8 | 13 | 23 | 25 | 35 | 35 | 33 | 29 | 22 | 14 | 5 | 3 | 9., 10., 25., 28., 30. Juni 1890; sämmtlich nicht völlig wolkenfrei.[1]) |
| Kolm-Saigurn, | 1600 m ü. d. Meere | — | 16 | 30 | 46 | 52 | 59 | 58 | 54 | 48 | 41 | 28 | 18 | — | Sonne in grossen Wolkenlücken frei; 14. u. 15. Juli fast wolkenlose Tage. |
| Sonnblick, | 3100 m ü. d. Meere | 6 | 22 | 42 | 52 | 70 | 80 | 80 | 79 | — | — | — | — | — | 16., 17., 18. bis 12 m. fast wolkenlos; von 2 p. ab stark bewölkt. |

1) In der Originalabhandlung steht durch ein Versehen: „sämmtlich bewölkt“ statt „nicht völlig wolkenfrei“.

Die Verwerthung dieser Resultate zur Bestimmung der Transparenz der Atmosphäre für ultraviolettes Licht bleibt dem vierten Abschnitt vorbehalten.

### § 3. Die Abhängigkeit des Potentialgefälles von der ultravioletten Sonnenstrahlung.

Die Tagesmittel der luftelectrischen Beobachtungen, sowie die um Mittag gemessenen Intensitäten der ultravioletten Sonnenstrahlung bilden die Grundlage für die Prüfung der anfangs genannten Auffassung, nach welcher die Veränderlichkeit des Potentialgefälles an der Erdoberfläche eine Folge der lichtelectrischen Einwirkung der Sonne sein würde. Es war daher zunächst der Versuch zu machen, in dem gleichzeitigen Gange dieser Veränderlichen eine Gesetzmässigkeit zu erkennen. Zunächst zeigt sich, dass im allgemeinen mit zunehmender Stärke der Sonnenstrahlung das Potentialgefälle sinkt. Diese Abhängigkeit ist schon von anderen Beobachtern und an verschiedenen Orten der Erde festgestellt und findet ihren Ausdruck in der jährlichen Periode der atmosphärischen Electricität, sie braucht aber nicht nothwendig auf einen *unmittelbaren* Zusammenhang mit der Sonnenstrahlung gedeutet werden. Eine genauere Erkenntniss dieser Correspondenz ergibt sich, wenn man das vorliegende electrometrische und photometrische Material zu Mittelwerthen zusammenfasst, die bei nahe gleicher Mittagshöhe der Sonne gewonnen wurden und sich über Zeiträume von $^1/_3$ bis $^1/_2$ Monat erstrecken. Dabei haben wir die am Standactinometer gewonnenen Zahlen so reducirt, dass sie — in erster Annäherung — den auf die Flächeneinheit der Erdoberfläche entfallenden Lichtmengen proportional werden. (Bezüglich dieser Umrechnung muss auf die Originalarbeit verwiesen werden). Man erhielt so die graphische Darstellung Fig. 10.

Während der Gang des Photometers im ganzen regelmässig ist, mit dem Maximum Ende Juni, dem Minimum Ende December, verläuft das Potentialgefälle schwankend in der zweiten Hälfte des Februar, im Anfange des März, des Octobers und der Mitte des Novembers. Ob diese Unregelmässigkeiten zufälliger oder constanter Art sind, würde erst durch länger ausgedehnte Beobachtungsreihen zu entscheiden sein. (In den

Monatsmitteln, vgl. Fig. 1, gleichen sich diese Schwankungen fast aus.)

Stellt man die zusammengehörigen Werthe der Sonnenstrahlung $J$ und des Potentialgefälles zusammen, so erhält man folgende Uebersicht:

| Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $J$ | 2,9 | 5,8 | 9,1 | 21,4 | 58,8 | 77,1 | 113,7 | 121,9 | 181,3 | 194,5 | 268,4 |
| $\frac{dv}{dn}$ | 445 | 430 | 368 | 325 | 198 | 181 | 138 | 126 | 120 | 106 | 102 |

Die Art der Abhängigkeit zwischen $dv/dn$ und $J$ legt den Gedanken nahe, ein Gesetz, durch welches die beiden Veränderlichen verknüpft sind, nach Analogie der Exner'schen Gleichung zu muthmaassen. Schliesst man die obengenannten Stellen unregelmässigen Charakters aus, so lassen sich die Beobachtungen durch die Gleichung:

$$\frac{dv}{dn} = \frac{470}{1 + 0.02\,J}$$

angenähert darstellen.

| $J$ | $\frac{dv}{dn}$ berechnet | $\frac{dv}{dn}$ beobachtet | $\Delta$ |
|---|---|---|---|
| 2,9 | 444 | 445 | + 1 |
| 5,8 | 421 | 430 | + 9 |
| 9,1 | 398 | 368 | − 30 |
| 21,4 | 329 | 325 | − 4 |
| 58,8 | 216 | 198 | − 18 |
| 77,1 | 185 | 181 | − 4 |
| 113,7 | 144 | 138 | − 6 |
| 121,9 | 137 | 126 | − 11 |
| 181,3 | 102 | 120 | + 18 |
| 194,5 | 96 | 106 | + 10 |
| 268,4 | 74 | 102 | + 28 |

Vorstehende Tabelle (graphisch dargestellt in Fig. 11) enthält die nach dieser Gleichung construirte Curve, sowie die den Beobachtungen selbst entsprechende; die durch Kreuze markirten Stellen der Figur bezeichnen die bei Berechnung der Curve ausgeschlossenen Punkte.

Die Darstellung der Beobachtungen durch die bezeichnete Formel kann in Anbetracht der Empfindlichkeit luftelectrischer Messungen gegen störende Einflüsse als einigermaassen befriedigend gelten.

Bei der oben durchgeführten Rechnung war die ungleiche Dauer der Insolation des Erdbodens in den verschiedenen Abschnitten des Jahres nicht berücksichtigt. Man kann diese dadurch in Betracht ziehen, dass man jede der Zahlen $J$ mit einem Factor multiplicirt, der der Länge des Beobachtungstages proportional ist. Auch durch dies Produkt ($J'$) lässt sich mittels einer ähnlichen Formel die Veränderlichkeit von $dv/dn$, wenn auch weniger gut, wiedergeben.

Wir glauben somit aussprechen zu dürfen, dass eine durch empirische Formeln ausdrückbare Beziehung zwischen den Tagesmitteln des atmosphärischen Potentialgefälles und der Mittagsintensität der ultravioletten Sonnenstrahlung besteht, durch welche für gegebene Werthe des letzteren das erstere mit einem ziemlich befriedigenden Grade der Annäherung dargestellt werden kann. Ob beide Grössen durch eine dritte noch unbekannte unabhängige Variabele bestimmt sind, oder ob sie unmittelbar im Verhältnisse von Wirkung und Ursache stehen, ist aus den Beobachtungen allein nicht zu entscheiden. Hierzu sind bestimmte, womöglich experimentell festgestellte Thatsachen erforderlich. Wir glauben eine solche in der Eigenschaft des Lichtes zu erkennen, den Uebergang negativer Electricität von belichteten Oberflächen auf die sie umhüllenden Gase zu bewirken. Soll diese Wirkung des Lichtes auf die Erdoberfläche als Ursache des Zusammenhanges zwischen Sonnenstrahlung und Luftelectricität betrachtet werden dürfen, so ist zuerst zu zeigen, dass die Erdoberfläche mit negativer Electricität geladen ist, und dann, dass das Sonnenlicht im Stande ist, solchen Substanzen, aus denen die Erdrinde sich zusammensetzt, eine negative Ladung zu entziehen.

Es darf gegenwärtig wohl kaum ein Zweifel an der ersten Behauptung laut werden; soweit electrische Beobachtungen vorliegen, ist das Potentialgefälle bei heiterem Himmel — und um dieses handelt es sich ja nur bei vergleichenden Beobachtungen mit der Intensität des Sonnenlichtes — an den verschiedensten Orten fast ausnahmslos positiv gefunden, d. h. die Erdoberfläche ist mit einer Schichte negativer Electricätät bedeckt. Bekanntlich ist dies schon von Erman und Peltier ausgesprochen worden und neuerdings durch Hrn. Exner wohl endgültig festgestellt.

Was den zweiten Punkt anbelangt, die Möglichkeit des Transportes dieser negativen Electricität von der Erdoberfläche in die Luft unter dem Einfluss des Sonnenlichtes, oder die Frage nach der photoelectrischen Empfindlichkeit des Erdbodens selbst, so glauben wir eine solche für mehrere Mineralien, welche einen Theil derselben bilden, nachgewiesen zu haben.[1]) Wenn auch die mit Wasser und Vegetation bedeckten Gebiete der Erde hinsichtlich ihres lichtelectrischen Verhaltens noch als zweifelhaft anzusehen sind, so dürfte es doch nicht irrationell sein, die Hypothese zu wagen, dass die Erdoberfläche, im ganzen betrachtet, während der Insolation negative Electricität an die Atmosphäre abgibt. Im Sinne dieser Hypothese möchten wir die Grundlage der von Hrn. Arrhenius aufgestellten Theorie der atmosphärischen Electricität modificirt wissen, die in der von ihrem Urheber gegebenen Form mit den neuen photoelectrischen Untersuchungen nicht verträglich ist. Nicht die Luft selbst wird, wie Hr. Arrhenius meinte, durch Bestrahlung mit Sonnenlicht electrolytisch leitend, sondern eine in Luft eingeführte electrisirte Oberfläche kann, wenn sie von geeigneter (empfindlicher) Art ist und ihre Ladung das negative Zeichen hat, sobald sie selbst vom Sonnenlichte getroffen wird, diese Electricität an die Luft abgeben.

Wesentlich ist für diese Auffassung, das betonen wir nochmals, das *negative* Zeichen der Erdladung, da die photoelectrische Zerstreuung. wie es scheint, zu den streng unipolaren Erscheinungen gehört und nur von einer belichteten *Kathode* aus erfolgt.

Der erste Schluss, den wir aus unserer Voraussetzung ziehen, ist der, dass nach genügend langer Insolation jede Ladung der Erdoberfläche auf einen Betrag von beliebig kleiner Grösse herabsinken müsste, wenn nicht andere Ursachen da sind, durch welche für die in die Luft entwichene Electricität dem Erdkörper wieder Ersatz zugeführt wird. Die Electricität würde eben solange unausgesetzt von der Erdoberfläche in die Luft entweichen und in dieser der Richtung der electrischen Kraftlinien folgen, bis ihre Flächendichtigkeit am Erdboden auf Null heracgesunken ist. Thatsächlich beobachtet man nun

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **44**. p. 722. 1891.

aber, das in gleichen Tages- und Jahreszeiten das Potentialgefälle an demselben Erdorte nahe die gleiche Intensität zeigt, d. h. es muss eine Ursache existiren, welche etwa das gleiche Quantum negativer Electricität, das unter dem Einflusse des Sonnenlichtes in einer bestimmten Zeit in die Luft entweicht, der Erde wieder zurückerstattet. Nimmt man an, dass die einmal in die Luft eingedrungene Electricität sich allmählich in den Weltraum zerstreut, so müsste eine unbekannte kosmische Ursache herangezogen werden, welche das Potentialniveau der Erdoberfläche nahezu constant erhält. Ohne diese Möglichkeit, die an sich nicht unwahrscheinlich ist, ausschliessen zu wollen, möchten wir sie für die folgende Betrachtung nicht zulassen, sondern hierbei die einfachere von Hrn. Arrhenius angenommene und im ganzen plausible Vorstellung zu Grunde legen, dass die atmosphärischen Niederschläge die in der Luft enthaltene negative Electricität (für die ganze Erde betrachtet in nahezu stationärer Weise) der Erdoberfläche wieder zuführen.[1]) Hiernach dringt also die Bodenelectricität nur bis in solche atmosphärischen Schichten vor, in denen noch eine Condensation des Wasserdampfes möglich ist, und die Gesammtladung der Erde muss eine constante sein.

Wäre die Erdatmosphäre nicht vorhanden, so würde die Dichtigkeit der Electricität auf der Erdoberfläche (von Unebenheiten sehen wir ab) überall dieselbe sein, wir wollen sie mit $\varrho$ bezeichnen. Da die Höhe der atmosphärischen Schichten, bis zu denen die Bodenelectricität vordringt, jedenfalls sehr klein gegen den Erdradius ist, so wird man als angenäherte Gleichgewichtsbedingung die aufstellen können, dass die Summe der Electricitätsmengen, welche die Flächeneinheit der Erdoberfläche und die über ihr lagernde Luft enthält, constant und derjenigen gleich ist, welche die Flächeneinheit der ohne Atmosphäre gedachten Erde bedecken würde. Bezeichnen wir die electrische Dichtigkeit auf dem Erdboden mit $\varrho_e$, die in

1) Zur Erklärung der electrischen Erscheinungen während des Falles von Niederschlägen (insbesondere der Gewitterelectricität) reicht diese Annahme *nicht* aus. Vgl. J. Elster u. H. Geitel, Beobachtungen, betreffend die electrische Natur der atmosphärischen Niederschläge. Wien. Ber. **99**. IIa. p. 421. 1890.

der darüber lagernden Säule der Atmosphäre enthaltene Electricitätsmenge mit $\varrho_A$, so muss $\varrho_\varepsilon + \varrho_A = \varrho$ sein.

Bezeichnet man den Werth von $\varrho_\varepsilon$ bei Sonnenaufgang mit $\varrho_{1\varepsilon}$, den bei Sonnenuntergang mit $\varrho_{2\varepsilon}$, so wird unter der Annahme, dass während des Tages nur eine *Vertical*bewegung der Electricität stattfindet, die im Laufe des Tages in die Luft übergetretene Electricitätsmenge $\varrho_{1\varepsilon} - \varrho_{2\varepsilon}$ sein. Wir setzen diese proportional dem Mittelwerthe $\varrho_{\mu\varepsilon}$ für den betreffenden Tag, der mittäglichen Strahlungsintensität $J$ und der Zeit $T$ zwischen Sonnenauf- und Untergang, d. h. wir nehmen an, dass:

$$\varrho_{1\varepsilon} - \varrho_{2\varepsilon} = \varkappa J \varrho_{\mu\varepsilon} T.$$

Da nun angenähert:

$$\varrho_{1\varepsilon} + \varrho_{2\varepsilon} = 2\varrho_{\mu\varepsilon}$$

ist, so folgt:

$$2\varrho_{1\varepsilon} = \varrho_{\mu\varepsilon}(2 + \varkappa J T)$$

und daher:

$$\varrho_{\mu\varepsilon} = \frac{2\varrho_{1\varepsilon}}{2 + \varkappa J T} = \frac{\varrho_{1\varepsilon}}{1 + \frac{\varkappa}{2} J T}.$$

$JT$, das Product aus Tageslänge und Mittagsintensität ist schon oben eingeführt, bezeichnen wir es mit $J'$ und $\varkappa/2$ mit $\varkappa'$, so wird:

$$\varrho_{\mu\varepsilon} = \frac{\varrho_{1\varepsilon}}{1 + \varkappa' J'},$$

und da

$$\frac{dv}{dn} = -4\pi\varrho,$$

so wird:

$$\left(\frac{dv}{dn}\right) \text{Mittel} = \frac{\left(\frac{dv}{dn}\right)_1}{1 + \varkappa' J'},$$

wo $(dv/dn)_1$ den zu Sonnenaufgang beobachteten Werth des Potentialgefälles bedeutet.

Nimmt man an, dass selbst zur Zeit des Sommersolstitiums die Länge der Nacht in unseren Breiten ausreicht, um die am vorigen Tage in die Luft eingedrungene negative Electricität durch Convection nach Niederschlagsgebieten völlig zu entfernen, so wäre $\varrho_{1\varepsilon} = \varrho$ und $(dv/dn)$ bedeutete dann das Maximum $A$ des erreichbaren Potentialgefälles. Dann wäre die Formel:

$$\frac{dv}{dn} = \frac{A}{1 + \varkappa' J'}$$

ohne weiteres für beliebige Jahreszeiten anwendbar.

Die Möglichkeit, die Beobachtungen durch eine Formel dieser Art in gewisser Annäherung wiederzugeben, ist demnach vielleicht nicht zufällig; doch möchten wir dieser Uebereinstimmung in Anbetracht der Unvollkommenheit der Messungen kein grosses Gewicht beilegen. Unsere Absicht war nur zu zeigen, dass gewisse einfache Voraussetzungen über die Art der photoelectrischen Einwirkung der Sonne auf die Erde eine Veränderlichkeit des atmosphärischen Potentialgefälles ergeben, die der beobachteten wenigstens nicht widerspricht.

In erster Linie betrachten wir unsere Formeln als empirische und bemerken, dass wir auch der Gleichung des Hrn. Exner von demselben Standpunkte aus Werth beilegen. Ist doch mit ihrer Aufstellung der erste erfolgreiche Versuch gemacht, eine Gesetzmässigkeit in dem Gange der Luftelectriciät zu erkennen. Allerdings scheint uns der experimentelle Beweis für die Richtigkeit der Grundhypothese des Hrn. Exner, dass die negative Bodenelectricität durch den *Wasserdampf* von der Erdoberfläche in die Luft getragen werde, nicht erbracht zu sein. In dieser Beziehung verdient unserer Meinung nach die photoelectrische Theorie entschieden den Vorzug, wenn auch eingeräumt werden muss, dass bei dieser ein grosser Theil der Einfachheit wegfällt, welche die des Hrn. Exner auszeichnet.

Diese Zurückhaltung, die wir uns gegenüber der theoretischen Verwerthung unserer Resultate auferlegen, ist zum Theil noch durch folgende Erwägung veranlasst.

Die Intensität der ultravioletten Sonnenstrahlung wurde an Kugeln von amalgamirtem Zink gemessen; die so gefundenen Zahlen gingen alsdann in eine Formel für das Potentialgefälle in der freien Atmosphäre ein, d. h. sie wurden angewendet auf einen photoelectrischen Vorgang, in welchem die Erde die Rolle des lichtempfindlichen Körpers spielt. Es ist von vornherein nicht abzusehen, ja vielleicht nicht einmal wahrscheinlich, dass die am Zinkphotometer gefundenen Zahlen gleichzeitig den Gradmesser für die electrische Einwirkung der Sonne auf die Erdoberfläche liefern. Soweit die recht schwierigen photoelectrischen Untersuchungen an Mineralien erkennen

liessen, wirken auf diese Körper schon Strahlen von so grosser Wellenlänge merklich ein, die am Zink im Vergleich mit den kurzwelligen sehr zurücktreten.

Es ist daher vielleicht möglich, dass unsere für die ultraviolette Strahlung der Sonne gefundenen Zahlen, wenn man nach ihnen die Stärke der lichtelectrischen Wirkung auf den Erdkörper abschätzen will, keinen richtigen Maassstab bieten, und zwar in der Weise, dass die sommerlichen Intensitäten im ganzen zu hoch, die des Winters zu niedrig gefunden sein würden.

Wenn thatsächlich unter dem Einflusse des Sonnenlichtes negative Electricität von der Erde aus in die Atmosphäre eindringt, so muss die Menge derselben von zwei Factoren, der augenblicklichen Flächendichte an dem in Betracht gezogenen Punkte und der auf denselben entfallenden Lichtintensität abhängig, und zwar dem Producte beider Grössen proportional sein. Diese Producte lassen sich nun aber aus der täglichen und jährlichen Variation der ultravioletten Strahlung und des Potentialgefälles (da letzteres der Flächendichte proportional ist) leicht bilden. Führt man diese Rechnung nach der Formel $(dv/dn)J/100$ aus, so erhält man in den so gefundenen Zahlen ein Maass für die Intensität eines positiven electrischen Stromes, der am Beobachtungsorte in der Atmosphäre absteigt. Fig. 12 und 13 stellen den jährlichen und täglichen Verlauf (den letzteren für die Monate Juni und December) dar.

Es ist einleuchtend, dass ein solcher Strom electromagnetische Wirkungen ausüben muss, d. h. man erkennt die Möglichkeit, aus seinen Schwankungen Aufschluss über die Variation der magnetischen Elemente zu erhalten.

Wir fügen hinzu, dass nach einer Untersuchung des Hrn. A. Schuster[1]) die tägliche Variation der magnetischen Elemente thatsächlich gedeutet werden kann unter der Annahme electrischer Ströme in der Atmosphäre, die von dem Sonnenstande abhängig sind.

Eine eigenthümliche Beziehung zwischen der ultravioletten Sonnenstrahlung und dem Wasserdampfgehalte der Luft möge

1) A. Schuster, Phil. Trans. of the Roy. Soc. of London. **80.** A. p. 467—518. 1889.

noch kurz Erwähnung finden. Im allgemeinen wird nämlich die ultraviolette Strahlung der Sonne um so höher gefunden, je reicher die Luft an Wasserdampf ist; es kommen Steigerungen bis auf den doppelten Betrag bei gleicher Sonnenhöhe vor. Diese Wirkung der atmosphärischen Feuchtigkeit erscheint so paradox, dass wir zunächst einen Fehler in der Messungsmethode vermutheten. In der That, mag man dem Wasserdampfe auch eine vollständige Transparenz für das ultraviolette Licht beilegen, so kann man doch bei dem relativ geringen Procentsatz, den derselbe auch im extremen Falle vom Gesammtvolumen der Luft ausmacht, seiner Anwesenheit allein eine so beträchtliche Steigerung der Durchlässigkeit der Luft nicht zuschreiben. Der naheliegende Einwand, dass die lichtelectrische Entladung an sich eine Beschleunigung erführe, falls die Zinkkugel des Actinometers von *feuchter* Luft umspült wird, kann nicht erhoben werden, da bei Verwendung von Funkenlicht sich eine Zunahme der Entladungsgeschwindigkeit bei Vertauschung von trockener mit feuchter Luft nicht nachweisen liess.

Ebensowenig lässt sich die beobachtete grössere Intensität der ultravioletten Strahlung bei höherem Dampfgehalt auf einen Einfluss der Temperatur auf die Empfindlichkeit der Zinkkugel zurückführen. Die Aenderungen derselben sind nach Versuchen an künstlich erwärmten Zinkflächen innerhalb des in der Natur vorkommenden Temperaturintervalls viel zu gering, als dass daraus ein derartiges Anwachsen der Lichtintensität als ein scheinbares erklärt werden könnte.

Schliesslich liegt es noch nahe, zu vermuthen, dass an feuchten Tagen die in dem Actinometer vorhandenen isolirenden Stützen eine grössere Electricitätsmenge entführten, als an Tagen geringen Dampfgehaltes. Gegenüber diesem Einwande ist zu bemerken, dass selbst an den feuchtesten Tagen dieser Betrag im Zeitraum *einer* Minute höchstens zwei Scalentheile betrug, während die Intensitätsbestimmung meist nur 5—10 Secunden in Anspruch nahm. Dass obiger Verlust nicht unberücksicht gelassen wurde, ist schon früher dargethan.

Hierzu kommt noch, dass Hr. Roscoe[1]) für die *chemisch*

1) Radau, l. c. p. 57.

wirksamen Strahlen der Sonne ein ähnliches Verhalten schon vor einer Reihe von Jahren nachgewiesen hat. Er fand unter sonst gleichen Verhältnissen die Intensität dieser Strahlen grösser bei hoher als bei niederer Lufttemperatur und schrieb diese Anomalie der Verminderung der Opalescenz der Atmosphäre mit steigender Temperatur zu. Nun ist aber die Atmosphäre in unserem Klima durchschnittlich um so wasserdampfreicher, je höher ihre Temperatur. Wir halten es deshalb für sehr wahrscheinlich, dass Hr. Roscoe derselben Erscheinung gegenüberstand und nur in der Angabe der Ursache von uns abweicht. Wir glauben daher die grössere Transparenz der Atmosphäre bei hohem Feuchtigkeitsgehalte als Thatsache betrachten zu dürfen; auch scheint uns ihre Erklärung keineswegs grossen Schwierigkeiten zu begegnen.

Aus den Untersuchungen von Kiessling, Aitken u. a. ist bekannt, dass die Condensation des Wasserdampfes in der freien Luft an das Vorhandensein feinster in der Luft schwebender Staubpartikelchen gebunden ist. Die Atmosphäre wird daher um so mehr zur Nebelbildung neigen, je mehr Wasserdampf und feinen Staub sie enthält. Herrscht nun bei hoher Luftfeuchtigkeit klarer Himmel — und das ist die Vorbedingung aller actinometrischen Messungen — so ist dies im allgemeinen als ein Anzeichen geringen Staubgehaltes anzusehen. Mit anderen Worten: Bei hohem Feuchtigkeitsgehalt der Luft hat man entweder bedeckten Himmel, dann enthält die Atmosphäre viel Staubkerne, oder wolkenlosen, dann ist sie relativ staubfrei. Tage mit bedecktem Himmel kommen aber für uns nicht in Betracht. Das Fehlen des Staubes an Tagen letzterer Art bedingt dann die gesteigerte Transparenz der Atmosphäre für ultraviolettes Licht.

### § 4. Ueber die Absorption des ultravioletten Sonnenlichtes in der Erdatmosphäre.

Die sehr beträchtlichen Unterschiede in der Intensität des ultravioletten Sonnenlichtes, die wir mittelst des electrischen Actinometers für verschiedene Sonnenhöhen fanden, eröffneten die Möglichkeit, auf dem Wege directer Beobachtung die Absorption dieser Strahlen in der Atmosphäre zu bestimmen.

Wir haben zu diesem Zwecke in Wolfenbüttel in den

Monaten Juni und August, in Kolm-Saigurn und auf der Sonnblickstation im Juli 1890 die ultraviolette Sonnenstrahlung mittelst des transportabeln Actinometers in stündlichen Intervallen gemessen.

Bezeichnet man mit $J_0$ die Intensität eines monochromatischen Lichtstrahles, der ein absorbirendes homogenes Medium trifft, mit $z$ die Wegstrecke, die er darin zurückgelegt hat, mit $J$ die Intensität am Ende dieser Wegstrecke, so ist bekanntlich:

$$J = J_0 a^z.$$

$a$ ist kleiner als Eins und bedeutet denjenigen Bruchtheil, der am Ende des Weges 1 von der ursprünglichen Intensität noch übrig geblieben ist.

Der Betrag von $a$ ist im Allgemeinen für verschiedene absorbirende Mittel und Strahlengattungen verschieden, wir wollen im Folgenden die — für die Rechnung ausserordentlich vereinfachende — Voraussetzung machen, dass in der Atmosphäre für jede Strahlengattung *des* ultravioletten Lichtes, das auf die Zinkkugel des Photometers wirkt, diese Zahl von derselben Grösse sei. Ob die Beobachtungen sich dieser Annahme fügen, muss die Rechnung ergeben.

Aus mindestens zwei unabhängigen Beobachtungen liessen sich nun, die Kenntniss von $z$ für jede Sonnenhöhe vorausgesetzt, mittelst der Gleichungen:

$$J_1 = J_0 a^{z_1}$$
$$J_2 = J_0 a^{z_2}$$

sowohl $a$ wie $J_0$, d. h. der Transparenzcoëfficient der Luft und die and der oberen Grenze der Atmosphäre herrschende Intensität bestimmen. Den Betrag von $z$ ermittelten wir für jede Sonnenhöhe nach einem in der Originalarbeit näher erörterten Verfahren.

Um zu erkennen, wie weit die Beobachtungen durch die genannte Formel darstellbar sind, wurden die Coëfficienten der hieraus resultirenden Gleichung:

$$\log J = \log J_0 + z \log a$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Die so gefundenen Werthe von log $J_0$ und log $a$ dienten alsdann zur

Berechnung von $J$ für dieselben Sonnenhöhen, für welche Beobachtungen vorlagen; die Differenzen zwischen Beobachtung Rechnung sind an jeder Stelle hinzugefügt.

Wir geben zunächst die Verwerthung der Wolfenbüttler Beobachtungen.

I.

Wolfenbüttel (Seehöhe 80 m). 25. Juni 1890.

| Sonnenhöhe ($\theta$) | Reducirte Weglänge ($z$) | $J$ (beobachtet) | $J$ (berechnet) | Differenz |
|---|---|---|---|---|
| 12° | 4,64 | 1,3 | 1,1 | + 0,2 |
| 18½° | 3,01 | 4,2 | 5,2 | − 1,0 |
| 24° | 2,43 | 7,7 | 9,2 | − 1,5 |
| 39° | 1,57 | 22,2 | 21,3 | + 0,9 |
| 52½° | 1,25 | 29,4 | 29,3 | + 0,1 |
| 58½° | 1,16 | 34,2 | 31,9 | + 2,3 |
| 61° | 1,13 | 39,9 | 32,8 | + 7,1 |

Formel: $\log J = 1,9976 - 0,42561\ z$.

Hieraus berechnet: $J_0 = 99,45$, $a = 0,375$.

II.

18. August 1890.

| Sonnenhöhe ($\theta$) | Reducirte Weglänge ($z$) | $J$ (beobachtet) | $J$ (berechnet) | Differenz |
|---|---|---|---|---|
| 20° | 2,87 | 6,3 | 5,2 | + 1,1 |
| 27° | 2,18 | 7,7 | 10,5 | − 2,8 |
| 38° | 1,61 | 17,6 | 18,8 | − 1,2 |
| 45° | 1,40 | 19,4 | 23,2 | − 3,8 |
| 48° | 1,33 | 29,2 | 24,9 | + 4,3 |
| 50½° | 1,28 | 31,6 | 26,1 | + 5,5 |

Formel: $\log J = 1,9848 - 0,44246\ z$

Hieraus berechnet: $J_0 = 96,6$, $a = 0,361$.

Zu den Messungen in Kolm-Saigurn und auf dem Sonnblick ist folgendes zu bemerken. Am 15. Juli war die Luft von auffälliger Durchsichtigkeit während der ganzen Dauer der Beobachtungsreihe. Auch am 17. Juli Morgens war auf dem Sonnblick der Himmel völlig rein und die Fernsicht ungehindert, erst gegen 11½ Uhr trat eine leichte Trübung ein. Am 18. blieb bis 9 Uhr morgens der Himmel nahe wolkenlos, von da an nahm die Bewölkung zu; abends und nachts hatten wir starkes Gewitter. Wir bezeichnen hiernach als die besten Reihen die vom 15. und 17. Juli.

Die Beobachtungen in den Alpen geschahen, wie in Wolfenbüttel, auf einem im Freien stehenden Tische. Für gute Erdleitung war durch einen Draht gesorgt, der bei den Messungen in Kolm in eine fest auf den feuchten Erdboden gepresste Metallplatte endigte, auf dem Sonnblick zu dem Blitzableiter des Stationsgebäudes führte. Wie schon bemerkt wurde, beobachteten wir mit zwei Instrumenten gleichzeitig; der Rechnung legten wir die Mittel der Ablesungen zu Grunde.

Man erhält so die Tabellen:

III.

Kolm-Saigurn (Seehöhe 1600 m) 15. Juli 1890.

| Sonnenhöhe ($\Theta$) | Red. Weglänge ($z$) | $J$ (beob.) | $J$ (ber.) | Differenz |
|---|---|---|---|---|
| 26 | 1,87 | 15,7 | 15,5 | + 0,2 |
| 36 | 1,39 | 30,5 | 31,0 | − 0,5 |
| 45½ | 1,15 | 44,7 | 44,4 | + 0,3 |
| 56½ | 0,98 | 55,3 | 56,6 | − 1,3 |
| 62½ | 0,92 | 61,5 | 61,7 | − 0,2 |
| 64 | 0,91 | 65,0 | 62,8 | + 2,2 |

Formel: $\log J = 2,3767 - 0,63533\, z$.

Hieraus berechnet: $J_0 = 238,1$, $a = 0,231$.

IV.

Sonnblick (Meereshöhe 3100 m) 17. Juli 1890.

| Sonnenhöhe ($\Theta$) | Red. Weglänge ($z$) | $J$ (beob.) | $J$ (ber.) | Differenz |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 2,16 | 13,3 | 12,7 | − 0,4 |
| 24 | 1.65 | 23,5 | 25,1 | − 1,6 |
| 34 | 1,21 | 45,4 | 45,5 | − 0,1 |
| 45 | 0,96 | 59,8 | 64,1 | − 4.3 |
| 54 | 0,84 | 77,0 | 75,5 | + 1,5 |
| 62 | 0,77 | 88,1 | 83,0 | + 5.1 |

Formel: $\log J = 2,3693 - 0,58662\, z$.

Hieraus berechnet: $J_0 = 234,0$, $a = 0,259$.

V.

Sonnblick (Meereshöhe 3100 m) 18. Juli 1890.

| Sonnenhöhe ($\Theta^0$) | Red. Weglänge ($z$) | $J$ (beob.) | $J$ (ber.) | Differenz |
|---|---|---|---|---|
| 13 | 2,92 | 6,6 | 5,7 | + 0,9 |
| 24 | 1,65 | 20,6 | 26,4 | − 5,8 |
| 34 | 1,21 | 37,8 | 44,7 | − 6,9 |
| 45 | 0,96 | 55,6 | 60,5 | — 4,9 |
| 55 | 0,83 | 83,6 | 70,8 | + 12,8 |
| 62 | 0,77 | 92,4 | 76,1 | + 16.3 |

Formel: $\log J = 2,2811 - 0,5206\, z$.

Hieraus berechnet: $J_0 = 191,0$, $a = 0,302$.

Sieht man von dem 18. Juli ab, an dem sich die stärksten Abweichungen von Beobachtung und Rechnung zeigen, und der, da schon früh Wolkenbildung und Abends Gewitter eintrat, wahrscheinlich schon am Morgen keine normale Schichtung der Luft aufwies, so erkennt man, dass die Darstellbarkeit der beobachteten Lichtintensitäten durch die Formel befriedigend genannt werden darf. Bemerkenswerth ist, dass die Mittagswerthe durchweg etwas höher sind, als die Formel verlangt. Dagegen ist überraschend die grosse Verschiedenheit der für $J_0$ und $a$ aus den Beobachtungen im Tieflande und im Gebirge abgeleiteten Zahlen. Während der Transparenzcoefficient $a$ in Wolfenbüttel etwa 0,37 beträgt, sinkt er in Kolm-Saigurn und auf dem Sonnblick auf 0,24, zugleich steigt $J_0$ (die im willkürlichen Masse gemessene „Solarconstante" der ultravioletten Strahlung) von 98 auf 236. Wäre das Absorptionsgesetz $J = J_0\, a^z$ von unbedingter Giltigkeit, so könnte der Transparenzcoefficient nicht von der Meereshöhe des Beobachtungsortes abhängen, und es müsste aus Messungen an beliebig gewählten Stellen der Atmosphäre der Grenzwerth $J_0$ als eine und dieselbe Zahl resultiren.

Der grosse Unterschied in den Werthen von $J_0$ und $a$ beweist also, dass jene Voraussetzung unzutreffend ist. In der That liegt kein zwingender Grund zu der Annahme vor, dass das auf die Zinkkugel wirkende Licht etwa monochromatisch sei, ist es ein Gemisch von Strahlen verschiedener Wellenlänge und verschiedener Absorptionsfähigkeit, so kann seine Schwächung nicht durch eine Formel von der Gestalt $J = J_0\, a^z$ dargestellt werden. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, es bestände aus zwei monochromatischen Componenten, deren eine viel stärker als die andere absorbirt wird, so müsste die Formel:

$$J = J_{01}\, a_1^z + J_{02}\, a_2^z,$$

zur Wiedergabe der Beobachtungen genügen. Hierin möge, entsprechend unserer Annahme, $a_2$ beträchtlich kleiner als $a_1$, $J_{01}$ und $J_{02}$ aber von gleicher Grössenordnung sein. Dann wird für grosse $z$, das letzte Glied der Formel gegen das erste vernachlässigt werden können, für kleine dagegen erheblich ins Gewicht fallen. Es lagern sich also in diesem Beispiele zwei Exponentialcurven übereinander. deren eine mit wachsendem

$z$ viel steiler abfällt, als die andere. Infolgedessen wird für kleine Werthe von $z$ die Ordinate ($J$) der resultirenden Curve grösser, als es dem reinen Exponentialgesetze $J = J_0\, a^z$ entsprechen würde, während für mittlere und grosse $z$ der Anschluss befriedigend sein kann. Auf die Beobachtungen angewandt, würden diese Schlüsse zu folgendem Ergebnisse führen: Misst man die Lichtintensitäten an demselben Orte zu verschiedenen Tageszeiten, so müssen die Mittagswerthe (entsprechend dem Minimum von $z$) grösser ausfallen, als die berechnete Formel ergibt, vergleicht man ferner Beobachtungen von zwei in verschiedener Höhe gelegenen Stationen, so müssen die der höheren stärkere Intensitäten anzeigen, als man gemäss dem einfachen Absorptionsgesetz nach denen der unteren erwarten sollte. Im Zusammenhange hiermit steht die Abnahme der Transparenzcoëfficienten $a$ mit zunehmender Meereshöhe. Diese Zahlen geben denjenigen Bruchtheil der Lichtintensität an, der nach dem Durchgang durch die aus Luft normaler Dichtigkeit gebildete Schichtdicke 1 noch übrig ist. Je mehr stark absorbirbare Strahlen das Licht noch enthält, umso kleiner wird daher $a$ ausfallen. Licht, das bis zu 80 m Meereshöhe vorgedrungen ist, wird gewisse Wellenlängen überhaupt nicht mehr enthalten, die auf dem Sonnblickgipfel noch energisch wirksam sind, die *weitere* Schwächung in den tieferen Schichten wird daher geringer sein, als in den oberen.

Unsere Beobachtungen zeigen dies zur Evidenz. Die Mittagsstrahlung übertrifft durchgehends den aus den Gesammtmessungen berechneten Werth, und die im Gebirge gefundenen Intensitäten sind im Vergleich zu den im Tieflande gemessenen unverhältnissmässig gross. Zugleich ist die Luft — scheinbar — in 80 m Seehöhe transparenter, als in 1600 und 3100 m.

Die Resultate werden anschaulicher, wenn man für die drei Meereshöhen: 80 m (Wolfenbüttel), 1600 m (Kolm-Saigurn), 3100 m (Sonnblickgipfel) und die Grenze der Atmosphäre die bei senkrechtem Einfall der Sonnenstrahlen ($\Theta = 90^0$) in die aufeinanderfolgenden Schichten eindringenden und in ihnen absorbirten Lichtmengen zusammenstellt. Man erhält so die Tabelle:

| | $J_{90}$ | Differenz | Meereshöhe | Differenz | Durchstrahlte Schichtdicke | Differenz | Absorption in jeder Schicht |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Grenze der Atmosphäre | 236 [1]) | | — | | 0 | | |
| | | 142 | | — | | 0,6779 | 0,60 |
| Sonnblick | 94 | | 3100 | | 0,6779 | | |
| | | 22 | | 1500 | | 0,1403 | 0,23 |
| Kolm-Saigurn | 72 | | 1600 | | 0,8182 | | |
| | | 34 | | 1520 | | 0,1718 | 0,47 |
| Wolfenbüttel | 38 | | 80 | | 0,9900 | | |

Während demnach von den aus dem Weltraum senkrecht auffallenden ultravioletten Strahlen 0,60 auf dem Wege bis zum Niveau 3100 m verloren gehen, erlöschen von den bis hierhin vorgedrungenen noch 0,23 bis zum Niveau von 1600 m. Von diesen werden wiederum 0,47 in der Schicht von 1600 bis 80 m zurückgehalten. Die auf gleiche Dichtigkeit reducirten Wegelängen des Strahles in den letzten beiden verhalten sich dabei etwa wie 14 : 17. Hier springt deutlich die starke Absorption in der dem Erdboden nahen Luftschicht ins Auge. Man geht wohl kaum fehl, wenn man den Staubgehalt der Tiefenluft als eine der Ursachen dieser Unregelmässigkeit in der Transparenz auffasst.

Schliesslich bemerken wir noch, dass die Luft auch gegenüber der Gesammtenergie der Sonnenstrahlen ein ähnliches Verhalten wie gegen das ultraviolette Licht erkennen lässt. Nach den Beobachtungen von Herrn Langley auf dem Mount Whitney und von den Herren Crova und Houdaille[2]) auf dem Mont Ventoux erscheint der Grenzwerth dieser Energie beim Eintritt in die Erdatmosphäre (die Solarconstante) von der Meereshöhe des Beobachtungsortes abhängig und wächst mit dieser, während zugleich die Transparenz der Luft gegen die von aussen eingedrungenen Strahlen in grösseren Höhen kleiner ist, als im Meeresniveau.

Wolfenbüttel, November 1892.

1) Berechnet aus den Sonnblickbeobachtungen und denen von Kolm-Saigurn.

2) Crova und Houdaille, l. c.

## IX. *Apparat zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents; von C. Christiansen.*

(Mitgetheilt aus dem physikalischen Institut der Universität Kopenhagen.)

Bei den physikalischen Uebungen im hiesigen Laboratorium benutzen wir folgenden Apparat[1]) zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents. Derjenige Theil desselben, in dem die Arbeit durch Reibung von Wasser in Wärme umgesetzt wird, ist im wesentlichen der Joule'schen Anordnung nachgebildet. Die Fig. 1 gibt einen Längsschnitt in $^1/_3$ der natürlichen Grösse, *X* ist die Axe des Rotationsapparates. In einem Messingcylinder *A*, der auf der Axe *X* befestigt werden kann und durch einen schlechten Wärmeleiter von ihr isolirt wird, sind in Abständen von je 90° vier messingene Flügelsysteme *B* von der Gestalt, wie sie die Fig. 1 zeigt, angebracht. In der Mitte des Bodens von *A* ruht auf einer Spitze eine hohle, mit einer Reihe von Oeffnungen versehene messingene Axe *M*, die durch den Deckel des Messingcylinders mit verschwindender Reibung hindurchgeht. An diese Axe *M* sind in Abständen von je 45° acht Flügelsysteme *F* angelöthet. Rotirt das äussere Gefäss, so gehen die vorspringenden Theile der Flügel an demselben mit wenig Spielraum durch die einspringenden Theile der Flügel an der Axe *M* hindurch. An dem oberen Ende von *M* ist der Hebel *h* wie bei dem bekannten Puluj'schen Apparat angebracht, er kann sich zwischen den beiden Stäben einer Gabel *g* (Fig. 2) bewegen. In die Höhlung der Axe *M* wird das Thermometer *C* gesteckt.

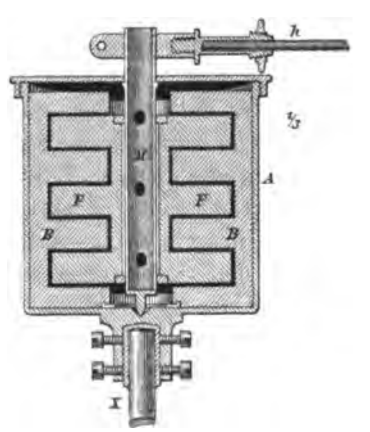


Fig. 1.

1) Der Apparat wird von dem Mechaniker Böhner in Erlangen mit Centrifugalmaschine und Zählwerk zu 175 M. geliefert.

Die Axe $X$ ist entweder die einer Centrifugalmaschine wie bei dem Apparat von Puluj [2]), oder die letzte Axe eines Räderwerkes wie in Fig. 2, die die Gesammtanordnung unseres Apparates wiedergiebt; die Anzahl der Zähne sind von der Kurbel angefangen 50, 25, 120, 30. $A$ rotirt also achtmal schneller als die Kurbel. Die Axe $M$ wird mittels des Arms $h$ festgehalten; am äusseren Ende $F$ desselben ist eine Schnur befestigt, die über eine Rolle läuft und mit einem passenden Gewicht $P$ belastet ist. Um $A$ wird ein Messinggefäss $E$ zum Schutz gegen äussere Störungen angebracht.

Beim Gebrauche wird das folgende, von Hrn. Docent K. Prytz angegebene Verfahren befolgt.

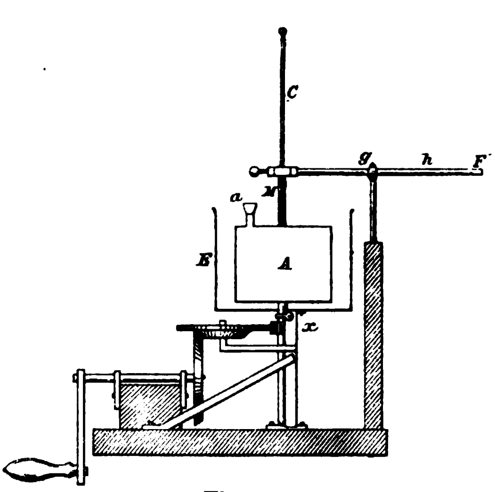


Fig. 2.

Das Calorimeter wird ganz mit Wasser gefüllt und die Oeffnung $a$ mit einem Korkpfropfen verschlossen. Es enthalte dann $p$ g Wasser; das Calorimeter wiege $\pi$ g, und es sei die specifische Wärme desselben (es ist von Messing) gleich $c$. Der Wasserwerth des Ganzen ist dann $U = p + c\pi$. Das Wasser darf nicht wärmer als die umgebende Luft sein, gewöhnlich nimmt man es 2—3° C. kälter. Nachdem man ein passendes Gewicht $P$ gewählt hat, gewöhnlich 80—120 g, prüft man, wie gross die Rotationsgeschwindigkeit sein muss, um $h$ zwischen den Schenkeln der Gabel $g$ schwebend zu erhalten. Nun wird der Arm $h$ weggenommen, das Thermometer in die hohle Axe $M$ gebracht und die Temperatur $\vartheta_1$ des Calorimeters abgelesen. Nun wird das Thermometer wieder weggenommen und man dreht mit der früher bestimmten Geschwindigkeit den

1) Puluj, Pogg. Ann. **117.** p. 437 Taf. VI Fig. 5. 1876.

Kurbel 200mal herum. Dann misst man wieder die Temperatur $\vartheta_2$ des Calorimeters.

Dann wird der Arm $h$ wieder an seinen Platz gesetzt und die Temperatur $t_1$ abgelesen. Man dreht das Calorimeter, indem der Arm $h$ wie vorher in der Gabel frei schwingt, zählt die Rotationen $N$ der Kurbel, bis die Temperatur ungefähr um 4° C. gestiegen ist; hört mit der Rotation auf und liest wieder die Temperatur $t_2$ ab.

Der Arm $h$ wird wieder entfernt, man dreht die Kurbel 200mal mit der vorigen Geschwindigkeit; die Anfangs- und Endtemperaturen $\vartheta_1'$ und $\vartheta_2'$ werden gemessen. Dann ist die an der Temperaturerhöhung $t_2 - t_1$ anzubringende Temperaturcorrection:

$$\frac{N}{200} \tfrac{1}{2} (\vartheta_2 - \vartheta_1 + \vartheta_2' - \vartheta_1').$$

Ist $l$ die Länge von $h$, so haben wir die Arbeit $A$ gleich:

$$A = 2\pi l . 8 N . P = 16 \pi l N P.$$

Die dadurch entwickelte Wärmemenge $Q$ ist:

$$Q = U\left(t_2 - t_1 - \frac{N}{400}(\vartheta_2 - \vartheta_1 + \vartheta_2' - \vartheta_1')\right).$$

Das Aequivalent $J$ der Wärme:

$$J = \frac{A}{Q}.$$

Für unseren Apparat ist $l = 26$ cm, $p = 565$ g, $\pi = 1353$g, $c = 0{,}094$; $U = 692{,}3$.

Es seien zwei Versuche mitgetheilt, in beiden war das schwebende Gewicht $P = 100$ g. Wir haben somit, wenn

$$\tau = t_2 - t_1 - \frac{N}{400}(\vartheta_2 - \vartheta_1 + \vartheta_2' - \vartheta_1')$$

$$J = \frac{2\pi . 26 . 8 . 100}{692{,}3} \frac{N}{\tau} = \frac{41600}{692{,}3} \frac{N}{\tau}.$$

Versuch I: $N = 600$, $\vartheta_1 = 17{,}38$, $t_1 = 17{,}38$, $t_2 = 19{,}84$, $\vartheta_2' = 19{,}72$, $\vartheta_2 = t_1$, $\vartheta_1' = t_2$, $\tau = 2{,}64$, $J = 42900$.

Versuch II: $N = 500$, $\vartheta_1 = 19{,}40$, $t_1 = 19{,}53$, $t_2 = 21{,}26$, $\vartheta_2' = 21{,}12$, $\vartheta_2 = t_1$, $\vartheta_1' = t_2$, $\tau = 2{,}192$, $J = 43060$.

## X. *Erfahrungen mit der selbstthätigen Quecksilberluftpumpe; von A. Raps.*

Die in diesen Annalen (Bd. 43, p. 629) beschriebene selbstthätige Quecksilberpumpe hat bei ihrer ausgedehnten Anwendung in der Technik einige Modificationen erhalten, welche dem raschen Evacuiren wesentlichen Vorschub leisten.

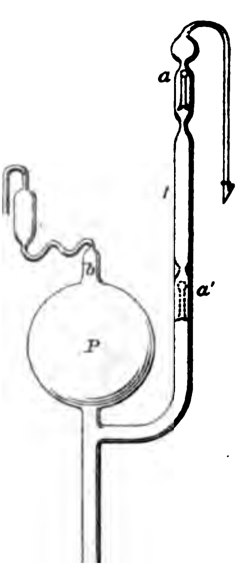


Fig. 1.

Das in Fig. 1 gezeichnete Glasventil *a*, welches sich früher in der Höhe der oberen Kugelmündung befand, ist ca. 30 cm höher gelegt worden. Hierdurch kann die Pumpe bedeutend rascher arbeiten. Bei der früheren Lage des Ventils in *a'* konnte sich nämlich die lebendige Kraft des sehr schnell aufsteigenden Quecksilbers nur durch ein Anschlagen an die Mündung *b* der Kugel *P* äussern, da das Quecksilber bei *a'* eine starre Wand vorfand. Bei einer höheren Lage dagegen leistet das Ventil dem Quecksilber keinen Widerstand mehr. Dasselbe kann in dem Rohre *f* frei aufsteigen und wird daher der Schlag an der oberen Kugelmündung bedeutend abgeschwächt.

Auch sind die Abflusswege des Wassers in den Schläuchen und dem Dreiweghahne (siehe die Figur zu der oben erwähnten Abhandlung) bedeutend weiter gemacht worden, wodurch ein wesentlich schnelleres Ablaufen des Quecksilbers aus der Pumpenkugel erzielt wird. Man kann bei einer Pumpenkugel von 600 ccm Inhalt einen ganzen Hub (Auf- und Niedergang) in 30—40 Secunden ausführen lassen, selbst bei sehr hohen Verdünnungen. Mit einer in der angegebenen Weise modificirten Pumpe wurde ein Raum von 400 ccm in 10 Minuten auf ca. $^1/_{1000}$ mm Quecksilberdruck ausgepumpt, ein Raum von 4 l wurde in einer Stunde auf ca. $^1/_{1000}$ mm Druck gebracht.

Die bei dieser Pumpe verwandte Quecksilbermenge braucht nicht sehr gross zu sein. Man kann sehr schnell arbeitende Pumpen bauen, welche nur 8—12 kg Quecksilber fassen. Denn wenn auch bei jedem Hube weniger Luft weggeschafft wird, so geht das Auspumpen doch ebensoschnell von statten, wie bei einer grossen Kugel, weil ein rascheres Aufeinanderfolgen der Pumpenzüge stattfindet.

Da die Wasserluftpumpe beim Evacuiren eine wesentliche Rolle spielt, wurden Versuche mit verschiedenen Systemen von Wasserluftpumpen angestellt. Am besten bewährte sich hierbei ein von Geb. Körting in Hannover gelieferter Ejector, welcher äusserst schnell evacuirt und selbst bei bedeutenden Druckschwankungen der Wasserleitung niemals Wasser zurücksteigen lässt.

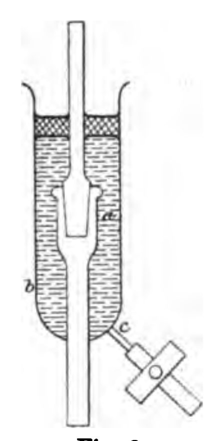


Fig. 2.

Auch die Quecksilberschliffe erfuhren eine kleine Abänderung, welche Hr. Dr. Arons eine dauerhafte Form gab. Es hatte sich nämlich bei den früher angegewandten Quecksilberschiffen der Uebelstand gezeigt, dass beim Herausnehmen des Schliffes immer etwas unreines Quecksilber in die Pumpe gelangte. Auch war es sehr umständlich, auf das Quecksilber gegossene Schwefelsäure u. dergl. zu entfernen. Es wurde deshalb die in Fig. 2 dargestellte Form gewählt. Unterhalb des Schliffes *a* ist ein Glasrohr *b* umgeschmolzen, welches mit einem Abflusse *c* versehen ist. Wenn nun das Quecksilber durch den Abfluss *c* abgelassen wird, sinkt sein Niveau und das der aufgegossener Schwefelsäure unter die Mündung des Schliffes und letztere kann entfernt werden, ohne dass Quecksilber oder Schwefelsäure in die Pumpe fliesst.

Von einigen Seiten wurden Bedenken erhoben gegen die Anwendung der schwarzen, biegsamen Gummischläuche. Es hat sich jedoch gezeigt, dass solche Bedenken nicht gerechtfertigt sind, da bei keiner der Pumpen, welche schon in mehreren hundert Exemplaren ununterbrochen thätig sind, irgend eine Verunreinigung des Quecksilbers durch die Schläuche bemerkt wurde.

Um die Grenzen der Verdünnung zu bestimmen, welche sich mit der beschriebenen Pumpe erreichen lassen, wurden einige Messungen ausgeführt, welche jedoch mit allen derartigen Messungen anhaftenden Fehlern behaftet sind und deshalb nur als Näherungen betrachtet werden können. Es wurde vermittels verschiedener Methoden ein Partialdruck der Luft von $^1/_{600000}$—$^1/_{800000}$ mm Quecksilberdruck gemessen.

Berlin, Physik. Institut d. Univ., Weihnachten 1892.

---

## XI. *Ueber die Gültigkeit eines von* Kirchhoff *in der Theorie des Electromagnetismus aufgestellten Satzes; von* P. Culmann.

Hr. du Bois[1]) hat einen seinerzeit von Kirchhoff[2]) beiläufig bewiesenen Satz unter die Hauptsätze einer Theorie des Ferromagnetismus mit aufgenommen. Es mag daher wohl am Platze sein, auf die beschränkte Gültigkeit dieses Satzes aufmerksam zu machen, zumal Hr. du Bois ihn in Fällen anwendet, in welcher seine auch nur angenäherte Gültigkeit aus dem von Kirchhoff gegebenen Beweise nicht gefolgert werden kann.

Der Satz lautet bei Hrn. du Bois folgendermaassen: „Ein beliebig gestalteter ferromagnetischer Körper befinde sich in einem beliebig vertheilten äusseren Felde. Falls dann die Intensität des letzteren ins Unendliche wächst, nähert sich überall die Richtung der Magnetisirung derjenigen des Feldes und ihr Werth dem Maximalwerth für die Substanz.“

Der Satz selbst lässt, wie man sieht, nicht erkennen, welche Vernachlässigung man begeht, wenn man ihn bei endlichen, wenn auch sehr grossen, Werthen des äusseren Feldes anwendet. Man wird also, um darüber Aufschluss zu erhalten, auf den Beweis des Satzes zurückgehen müssen. Kirchhoff's Beweis beruht auf folgender Ueberlegung. Da die Intensität des im Eisen inducirten Magnetismus einen Maximalwerth hat, so müssen die von ihm ausgeübten Kräfte endlich bleiben. Wenn man also eine endliche Grösse gegen eine unendlich grosse vernachlässigt, so kann man das Potential $U$ der Kräfte, welche von dem in der Eisenmasse inducirten Magnetismus herrühren, gleich Null setzen. Kirchhoff vernachlässigt dann im Verlauf des Beweises auch die Differentialquotienten von $U$. Strenger und zugleich einfacher ist es, gleich davon auszugehen, dass in dem betrachteten Falle die von dem inducirten Magnetismus ausgehenden endlichen Kräfte $\mathfrak{H}_i$ gegen die unendlich grosse Intensität des äusseren Feldes $\mathfrak{H}_e$ vernachlässigt werden kann. Dann folgt der Satz unmittelbar aus der Vector-

1) du Bois, Wied. Ann. **46.** p. 491. 1892.

2) Kirchhoff, Ges. Abhandl. p. 223. 1853.

gleichung für die Intensität $\mathfrak{J}$ des Magnetismus $\mathfrak{J} = k\,\mathfrak{H}_t$, in welcher $\mathfrak{H}_t$ die Resultirende von $\mathfrak{H}_i$ und $\mathfrak{H}_e$ darstellt. Wenn $\mathfrak{H}_i$ verschwindet, wird $\mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_e$, $\mathfrak{J} = k\,\mathfrak{H}_e$, und da $k$ nur von der Grösse und nicht von der Richtung von $\mathfrak{H}_e$ abhängt (es wird ein homogener isotroper Körper vorausgesetzt), so fällt die Richtung von $\mathfrak{J}$ mit der Richtung von $\mathfrak{H}_e$ zusammen und $\mathfrak{J}$ erreicht, wenn $\mathfrak{H}_e$ ins Unendliche wächst, seinen Maximalwerth.

Hinreichend ist für die Gültigkeit der Gleichung $\mathfrak{J} = k\,\mathfrak{H}_e$ das Verschwinden von $\mathfrak{H}_i$ innerhalb des magnetischen Körpers. Die Ueberlegung, welche zur Vernachlässigung von $\mathfrak{H}_i$ innerhalb des magnetischen Körpers führt, kann aber genau mit demselben Rechte auch für einen äusseren Punkt, wenn er nur innerhalb des Feldes $\mathfrak{H}_e$ liegt, angewendet werden. Man kann daher, um sich einen Begriff von dem Zustande zu machen, welchen Kirchhoff's Satz voraussetzt, sagen: wenn sein Satz, oder besser, wenn der von ihm gegebene Beweis seines Satzes gültig werden soll, so muss $\mathfrak{H}_i$ die Intensität des von dem betrachteten Eisenkörper ausgehenden Feldes gegen $\mathfrak{H}_e$ der Intensität des äusseren Feldes verschwinden. Innerhalb des ganzen Feldes $\mathfrak{H}_e$ kann dann von der Gegenwart des Eisens ganz abstrahirt werden, das magnetische Kraftfeld $\mathfrak{H}_e$ wird durch die Gegenwart des Eisens nicht afficirt. Bedenkt man nun, dass die grössten Felder, die wir zu erzeugen im Stande sind, wesentlich der Wirkung des Eisens, also der mit $\mathfrak{H}_i$ bezeichneten Grösse zuzuschreiben sind, so sieht man sofort, dass man den Kirchhoff'schen Satz, wenn man keinen neuen Beweis für denselben gibt, nicht anwenden darf, solange man nicht ohne Eisen Felder zu erzeugen im Stande ist, gegen welche die grössten bisher erzeugten als unendlich klein angesehen werden dürfen.

Man könnte denken, der Kirchhoff'sche Beweis allein setze so ungeheuere Felder voraus, während in Wirklichkeit sein Satz schon bei verhältnissmässig geringen Feldern zur Geltung käme. Es mag daher ein Beispiel zeigen, dass die Felder jedenfalls gross sein müssen. Verlangt man, dass ein Rotationsellipsoid aus weichem Eisen, dessen Aequatorealdurchmesser fünfmal länger ist, als seine Rotationsaxe in der Richtung dieser Axe eine Magnetisirung annehme, deren Intensität gleich $^9/_{10}$ des für dieses Eisen gültigen Maximal-

werthes $\mathfrak{J}_m$ sei und berechnet dieses Feld unter der Annahme, dass $\mathfrak{J}_m = 1700$ C. G. S. Einheiten sei, so findet man, dass die Intensität des Feldes 14 000 C. G. S. Einheiten übersteigen muss.

In gewissen Körpern, wie z. B. in einem geschlossenen Ringe, wird der von Kirchhoff beschriebene Zustand freilich schon sehr angenähert für verhältnissmässig geringe Felder erreicht. Dies ist dann aber nicht dem Kirchhoff'schen Satz, der ausdrücklich eine beliebige Gestalt des Körpers voraussetzt, zuzuschreiben, sondern der besonderen Gestalt dieses Körpers, die es mit sich bringt, dass $\mathfrak{H}_i$ in seinem Innern klein oder gar Null ist.

Ganz ähnlich verhält sich die Sache in dem von Hrn. du Bois untersuchten Falle eines geschlitzten Ringes. Hr. du Bois macht in erster Annäherung die Annahme, dass die durch ein gleichmässiges peripherisches Feld in diesem Ringe wachgerufene Magnetisirung peripherisch sei und sagt, die unter dieser Annahme abgeleitete Formel werde bei genügender Steigerung des äusseren Feldes den Thatsachen entsprechen. Die Versuche des Hrn. du Bois zeigen[1]), dass schon für Felder, deren Intensität unter 400 C. G. S. Einheiten bleibt, die durch Messung gefundenen Werthe der aus der Formel berechneten sich nähern. Dass bei so geringem Felde ein Hinweis auf den Kirchhoff'schen Satz nicht am Platze ist, leuchtet ein. Dass $\mathfrak{H}_i$ im Innern des geschlitzten Ringes klein ist, erklärt sich daraus, dass $\mathfrak{H}_i$ eine Function der Spaltbreite $l$ ist, die mit $l$ verschwindet. Bleibt daher $l$, wie bei den Versuchen des Hrn. du Bois, klein, so ist $\mathfrak{H}_i$ klein gegen $\mathfrak{H}_e$. Wächst nun $\mathfrak{H}_e$, so wächst zunächst $\mathfrak{H}_i$ im grossen und ganzen proportional mit $\mathfrak{H}_e$. Da aber $\mathfrak{H}_i$ im Innern des geschlitzten Ringes klein ist, wird die Sättigung des Eisens rasch erreicht. $\mathfrak{H}_i$ wächst dann langsamer als $\mathfrak{H}_e$, und die Annäherung an den von Kirchhoff beschriebenen Zustand wird immer vollkommener.

In dem soeben citirten Aufsatze berichtet Hr. du Bois zugleich über Experimente mit dem geschlitzten Ringe, aus welchen hervorgeht, dass der Streuungscoefficient $\nu$ in diesem Falle mit wachsendem Felde abnimmt. Hr. du Bois weist schon darauf hin, dass möglicherweise in einigen Fällen, die

1) du Bois, The Electrician **29.** p. 450. 1892.

er als Ausnahmefälle zu betrachten scheint, $v$ zunehmen werde. Es möge mir gestattet sein, bei dieser Gelegenheit darauf aufmerksam zu machen, dass in den meisten in der Praxis vorkommenden Fällen $v$ in der That, wie man bisher annahm, zunehmen wird, während der Fall des geschlitzten Ringes in der Praxis eher als ein Ausnahmefall zu betrachten ist.

Hopkinson's Streuungscoefficient $v$ ist ein Quotient, in dessen Zähler die Gesammtzahl der erzeugten Inductionslinien steht, während sein Nenner die Zahl der Linien angibt, welche durch einen Querschnitt $q$ hindurchgehen, der so gewählt ist, dass er alle durch die Maschine nutzbar gemachten Linien umfasst. Nun dient in fast allen Maschinen, man denke nur an die von Hopkinson selbst untersuchte Dynamomaschine, das Eisen nicht nur dazu, die absolute Zahl der Inductionslinien zu vermehren, sondern es sammelt zugleich diese Linien und führt sie in einen Raum, in welchem sie bequem nutzbar gemacht werden können. Diesen Raum umschliesst der Querschnitt $q$. Solange nun $\mathfrak{H}_i$ im grossen und ganzen proportional mit $\mathfrak{H}_e$ anwächst, bleibt die Vertheilung der Inductionslinien angenähert dieselbe, nur ihre Zahl steigt proportional mit $\mathfrak{H}_e$; sobald aber infolge der Sättigung des Eisens das Anwachsen von $\mathfrak{H}_i$ mit dem Anwachsen von $\mathfrak{H}_e$ nicht mehr Schritt hält, wächst die Gesammtzahl der Linien langsamer als $\mathfrak{H}_e$, und da nach unserer Annahme die Inductionslinien, welche durch den Querschnitt $q$ hindurchgehen, dem Einflusse des Eisens zuzuschreiben sind, wird die Verzögerung im Wachsen der Anzahl der Linien im Querschnitt $q$ fühlbarer sein, als ausserhalb dieses Querschnittes: $v$ wird zunehmen müssen.

Gerade umgekehrt gestalten sich die Verhältnisse in dem von Hrn. du Bois untersuchten Falle des geschlitzten Ringes. Hier gehen ohne das Eisen *alle* Inductionslinien durch den Querschnitt $q$ — der etwa in der Mitte des Spaltes zu denken ist und gleiche Grösse, Gestalt und Lage wie der Ringquerschnitt hat — hindurch, und es sind dem Eisen allein die Linien zuzurechnen, welche ausserhalb $q$ hindurchgehen. Nähert man sich der Sättigung, so wird also die Verzögerung in der Zunahme der Linien ausserhalb des Querschnittes $q$ fühlbarer sein als innerhalb: $v$ wird abnehmen.

Paris, November 1892.

# XII. *Ueber die Verwendung und Wirkungsweise des Telephons bei electrischen Nullmethoden, eine Entgegnung; von A. Winkelmann.*

Hr. E. Cohn[1]) beschäftigt sich in seinen Bemerkungen zu dem obengenannten Aufsatz mit den Abschnitten I und II desselben und behandelt zunächst den Abschnitt II. In diesem hatte ich gezeigt[2]), „*dass die von Cohn aufgestellten Bedingungen für das Verstummen des Telephons zu eng gefasst sind.* Die erste Bedingung, dass die Potentiale der mit dem Telephon verbundenen Platten zu jeder Zeit einander gleich sein müssen. ist unmittelbar einleuchtend; dagegen ist die zweite Bedingung. dass die Electricitätsmengen $e_1$ und $e_2$ — dies sind die Mengen der mit dem Telephon verbundenen Platten — constant seien. nicht nothwendig; vielmehr genügt es, dass die Aenderungen dieser Mengen gleich seien, dass also

$$\frac{d e_1}{d t} = \frac{d e_2}{d t} \tag{4}$$

sei". Diese Gleichung (4) wird jetzt von Cohn bei Berücksichtigung der Telephoncapacität in der Form

$$e_1 - e_2 = \text{const.}$$

als richtig acceptirt.

Cohn zeigt dann, dass seine frühere Bedingung[3])

$$e_1 = \text{const.}; \quad e_2 = \text{const.} \tag{$\gamma$}$$

sich ergibt, wenn die Telephoncapacität gleich Null gesetzt wird. In diesem Falle wird ferner die Bedingungsgleichung für die Constanten $c$ und $\gamma$:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \tag{A}$$

die Cohn ebenfalls schon früher abgeleitet hatte. Indessen war bei dieser Ableitung die Einschränkung, unter der die

1) Cohn, Wied. Ann. **47**. p. 752. 1892.
2) Winkelman, Wied. Ann. **46**. p. 669. 1892.
3) Cohn, Wied. Ann. **46**. p. 137. 1892.

Gleichungen ($\gamma$) und (A) gelten, dass nämlich die Telephoncapacität Null sei, nicht angegeben; denn von der Telephoncapacität war überhaupt nicht die Rede. Sieht man aber von dieser damals nicht genannten Einschränkung ab und sieht man die Gleichungen ($\gamma$) als allgemein gültig an, so musste man folgern: Die Bedingung für das Verstummen des Telephons ist die, dass in dem Telephondraht keinerlei Bewegung von Electricität stattfindet. Gegen diese zwar naheliegende aber unrichtige Auffassung habe ich mich in dem II. Abschnitte meiner Arbeit besonders gewandt und betont, *dass auch beim Verstummen des Telephons fortwährende hin- und herwogende Electricitätsbewegungen von beiden Enden des Telephons aus stattfinden, die aber gegenseitig in ihrer Wirkung sich aufheben.*

Wenn deshalb Cohn sagt: „Sie (d. h. die Telephoncapacität) hat aber nicht die von Winkelmann ihr beigelegte Bedeutung; denn die Einführung der Telephoncapacität ändert in Wahrheit nichts irgendwie wesentliches am Resultat", so kann sich dieser Satz nur auf das aus der Gleichung (A) abgeleitete Resultat beziehen, nicht aber auf jenes, welches aus den Gleichungen ($\gamma$) folgt. Letzteres hatte allerdings für Cohn kein Interesse, wohl aber für mich. Denn da mein früherer Aufsatz sich mit der „Wirkungsweise" des Telephons beschäftigt, war die Frage, ob beim Verstummen des Telephons in diesem selbst nachweisbare electrische Bewegungen vor sich gehen, nicht überflüssig, und das Resultat, dass solche Bewegungen in der That stattfinden, steht mit den Cohn'schen Gleichungen ($\gamma$) (diese ohne Einschränkung als gültig angenommen) in Widerspruch, stimmt dagegen mit der Gleichung (4) überein.

Wird die Telephoncapacität nicht gleich Null gesetzt — eine Annahme, die allein der Wirklichkeit entspricht —, so sind die Gleichungen ($\gamma$) unrichtig, und ferner erhält man, wie Cohn zeigt, an Stelle von (A), je nach den Bedingungen, die man für $V$ und $V_0$ statuirt, entweder

$$c_1 = c_2; \quad \gamma_1 = \gamma_2$$

oder

B) $$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_1 + \frac{1}{2} c_3}{\gamma_2 + \frac{1}{2} c_3},$$

wo $c_3$ die Telephoncapacität bezeichnet. Cohn betont besonders, dass alles, was er aus Gleichung (A) geschlossen habe, ebenso auch aus Gleichung (B) folge. Das ist richtig und rührt daher, dass die von ihm gezogenen Schlussfolgerungen von der Art, wie die $c$ und $\gamma$ miteinander verknüpft sind, nicht abhängen. Die Hauptsache in dieser Beziehung ist eben, dass nicht bloss die $c$, sondern auch die $\gamma$ für das Verstummen des Telephons von Bedeutung sind. Dies ist von mir in dem Abschnitte I meiner Arbeit bei der Behandlung der Cohn'schen, den Zusammenhang der $c$ und $\gamma$ umfassenden Forderung, dass während des Versuches ausser der Einführung der dielectrischen Schicht im ganzen Felde keine Veränderungen vor sich gehen dürfen, anerkannt. Um diesen Punkt von der Kritik loszulösen, die ich an der Cohn'schen Formulirung in dem II. Abschnitte geübt habe, und die diesen Punkt nicht berührt, habe ich ihn der Kritik vorangestellt. — Bei dieser Gelegenheit möchte ich noch Folgendes erwähnen. In seinem früheren Aufsatze sagte Cohn: „Die Coefficienten $\gamma_1$ und $\gamma_2$ werden im allgemeinen nicht einander gleich sein; das Verstummen des Telephons wird folglich im allgemeinen nicht bei symmetrischer Stellung der Platten $b$ und $d$ gegenüber $c$ (und Luft auf beiden Seiten) eintreten. So verhielt es sich thatsächlich bei Winkelmann's Versuchen.“ Aus dem Verhalten, dass bei symmetrischer Stellung der Platten $b$ und $d$ gegenüber $c$ kein Verstummen des Telephons eintritt, darf man nicht schliessen, dass dann nothwendig die Coefficienten $\gamma_1$ und $\gamma_2$ verschieden seien. Denn das Nichtverstummen kann auch in einer inneren Unsymmetrie des Telephons begründet sein. Diese Unsymmetrie lässt sich, wie ich im III. Abschnitte meiner Arbeit nachgewiesen habe, sehr deutlich wahrnehmen und war auch bei dem Telephon, das mir im Jahre 1889 zur Bestimmung von Dielectricitätsconstanten gedient hatte, wie sich später zeigte, vorhanden.

Die von mir gegen die Cohn'sche Formulirung erhobenen Einwände, dass nämlich die Gleichungen

$$(\gamma) \qquad e_1 = \text{const.}; \quad e_2 = \text{const.}$$

und

$$(\text{A}) \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

nicht richtig seien, werden nach dem Obigen durch Cohn's eigene Darstellung für den Fall bestätigt, dass die Telephoncapacität von Null verschieden ist. Dieser Fall trifft aber immer zu und zwar ist die Capacität eines gewöhnlichen Telephons gross genug, um die Ladungsströme des Telephondrahtes deutlich wahrnehmbar zu machen.

Nach Cohn beruht aber „alles, was von *U* Winkelmann im Abschnitt II gegen meinen früheren Aufsatz vorgebracht wird", auf Versehen. Gegenüber dieser unzutreffenden Behauptung will ich nur noch auf einen Punkt eingehen. Aus der Gleichung

$$\frac{c_1}{\gamma_1} = -\frac{d\,U - d\,V_0}{d\,U - d\,V}, \tag{3}$$

die sich unmittelbar aus dem Cohn'schen Ansatz ergab, hatte ich den Schluss gezogen, dass sie unerfüllbar sei für den Fall, dass $V$ und $V_0$ willkürliche Aenderungen erleiden, die von einander unabhängig sind. Dies ist vollständig zutreffend; denn man kann $c_1$ und $\gamma_1$ fest annehmen und dann mit einem Telephon von der beliebig gewählten aber von Null verschiedenen Capacität $c_3$ die Grössen $c_2$ und $\gamma_2$, ohne an $c_1$ und $\gamma_1$ etwas zu ändern, so bestimmen, dass bei willkürlichen Aenderungen von $V$ und $V_0$ das Telephon schweigt. Da $c_1$, $\gamma_1$, $d\,V_0$ und $d\,V$ unabhängig von der Telephoncapacität $c_3$ sind, $d\,U$ dagegen von $c_3$ abhängt, so ist die linke Seite der Gleichung (3) von $c_3$ unabhängig, die rechte dagegen nicht; oder anders ausgedrückt: würde die Gleichung (3) erfüllbar sein, so wäre $d\,U$ durch diese Gleichung bestimmbar und würde sich als unabhängig von $c_3$ ergeben; in Wirklichkeit ist aber $c_3$ auf $d\,U$ von Einfluss und deshalb ist die Gleichung (3) unerfüllbar. Aus dieser Thatsache ist in meiner früheren Arbeit der zutreffende Schluss gezogen, dass Cohn's Ansatz, aus dem die Gleichung (3) folgt, unrichtig sein müsse. Statt der Gleichung (3) ergibt sich bei richtigem Ansatz die Gleichung (5) resp. (7). Die letztere ist insofern als Bedingungsgleichung aufzufassen, als sie beim Verstummen des Telephons erfüllt sein muss und beim Nichtverstummen nicht erfüllt wird. Ein Versehen meinerseits liegt hier ebensowenig vor, wie bei der sonstigen Besprechung.

Cohn sagt von der Anordnung meines Apparates, dass

die Grössen $\gamma$ schlecht definirt und Veränderungen unterworfen sind, die dem Beobachter entgehen können. Dem gegenüber bemerke ich, dass die schlechte Definition der $\gamma$ keinen Einfluss auf das Resultat ausübt, und dass nur die Veränderungen, welche die $\gamma$ etwa während des Versuches erleiden, schädlich werden können. Diese sind aber, wie ich im I. Abschnitte meiner Arbeit gezeigt habe, leicht zu vermeiden. Da indessen Cohn die frühere Behauptung, dass meiner Methode „ein principieller Fehler“ anhafte, nicht mehr aufrecht erhält, vielmehr jetzt ebenso wie ich selbst nur von einer „Gefahr“ spricht und da diese Gefahr auch nach Cohn vermieden werden kann, so ist es unnöthig, die Frage, ob dies mit mehr oder weniger Schwierigkeiten verknüpft sei, nochmals zu erörtern.

Jena, Januar 1893.

---

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1893. ANNALEN № 3.

DER

PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XLVIII.

## I. *Electromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung; von H. von Helmholtz.*

Eine genügende Erklärung der Farbenzerstreuung auf Grundlage der electromagnetischen Theorie des Lichtes scheint mir bisher gänzlich zu fehlen. Dass eine solche nicht ohne Rücksichtnahme auf die ponderablen Massen, die dem Aether eingelagert sind, zu bilden ist, dürfte keinem Zweifel unterliegen, da die Dispersion des Lichtes zu denjenigen Vorgängen gehört, welche, wie auch die Brechung desselben, die galvanische Leitung, die Ansammlung wahrer Electricität und das Bestehen magnetischer Pole niemals im reinen Aether eines Vacuum, sondern nur in oder an der Grenze von Räumen vorkommen, die ausser dem Aether auch ponderable Masse enthalten. Nun zeigt die mathematische Theorie von Maxwell allerdings an, dass auch ponderomotorische Kräfte innerhalb des von electrischen Oscillationen durchzogenen Aethers wirksam werden müssen und eventuell schwere Atome, die im Aether liegen, in Bewegung setzen könnten. Aber wenn die ponderablen Theilchen nicht selbst electrisch sind, wären diese Kräfte den *Quadraten* der electrischen und magnetischen Momente des oscillirenden Aethers proportional, und also für negative Werthe derselben in Grösse und Richtung gleich denen für positive. Sie würden deshalb während jeder Schwingungsperiode zweimal ihren grössten und zweimal ihren kleinsten Werth erreichen, sodass sie in der Regel nicht Schwingungen von der Länge einer einfachen Periode hervorbringen oder unterstützen könnten.

Nur wenn die wägbaren Theilchen Ladungen wahrer Electricität enthalten, können die periodischen Wechsel der electrischen Momente im Aether ponderomotorische Kräfte der gleichen Periode hervorbringen. Die entsprechende Annahme,

dass eingelagerte Atome nur nördlichen oder nur südlichen Magnetismus enthalten sollten, lasse ich als zu unwahrscheinlich bei Seite liegen. Dagegen haben uns die electrolytischen Erscheinungen, namentlich Faraday's Gesetz der electrolytischen Aequivalente, schon längst zu der Annahme geführt, dass electrische Ladungen von bestimmter Grösse an den Valenzstellen chemisch verbundener Ionen haften, die bald positiv, bald negativ sein können, aber überall dieselbe absolute Grösse für jede Valenzstelle eines jeden Atoms haben müssen.

Obgleich diese Annahme die Electricität wieder an einen substantiellen Träger heftet, so ist sie in keiner Weise im Widerspruch mit Maxwell's mathematischer Formulirung seiner Theorie. Denn auch in dieser kommt die Möglichkeit unveränderlicher Ladung gewisser Volumenelemente in Isolatoren vor, und Maxwell's Gleichungen sagen aus, dass die Quanta bei allem Wechsel electrischer, magnetischer und ponderomotorischer Bewegungen unverändert bleiben, wenn sie auch nach seiner Deutung der Erscheinungen nur als Integrationsconstanten, nicht als reelle Substanzen anzusehen sind.

Dass schliesst nicht aus, dass die Kräfte, die von diesen Ionen als ihren Centren ausgehend sich im Raume ausbreiten, bei eintretenden Lageänderungen der Molecüle sich in solcher Art verändern, und im Raume fortschieben, wie es Maxwell's Gleichungen beschreiben.

Das Einzige, was die electrochemische Theorie mehr verlangt, als bisher in Maxwell's Gleichungen vorgesehen ist, ist die Möglichkeit, dass diese Centralpunkte electrischer Kräfte bei chemischen Umsetzungen von einem zum anderen Ion herübergleiten können, und zwar unter grosser Arbeitsleistung, so als ob sie an einem substantiellen Träger hafteten, der von den Valenzstellen verschiedenartiger Ionen mit verschiedener Kraft angezogen würde.

Wird der ein Paar verbundener Ionen umgebende Aether von electrischen Kräften getroffen und dadurch dielectrisch polarisirt, so werden die entgegengesetzt polarisirten Ionen den in Richtung der Kraftlinien fallenden Spannungen ausgesetzt, also zwei gleich grossen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräften, die mit einander ein Kräftepaar bilden, welches

den Schwerpunkt des Molecüls nicht in Bewegung setzen, wohl aber die electrische Axe des Molecüls verlängern oder verkürzen, sie der Richtung der Kraftlinie zu- oder ablenken würde.

Wir wollen im Folgenden die Bezeichnungsweise meines letzten Aufsatzes vom Mai d. J. beibehalten, und also die Componenten der electrischen Momente der Volumeneinheit mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bezeichnen. Dabei ist aber zu bemerken, dass in den dort aufgestellten Gleichungen die Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ betrachtet werden, als nur abhängig von den electrischen Kräften $X$, $Y$, $Z$, und diesen proportional. Die möglicherweise in einzelnen Stellen des Raumes lagernde *wahre Electricität*, deren Dichtigkeit in Gleichung (1) mit

$$\sigma = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} \tag{1}$$

bezeichnet wurde, spielt dort allerdings eine Rolle, indem sie Vertheilung und Richtung der Momente mit bestimmt. Aber sie wird nicht derjenigen Electricität zugerechnet, welche die Polarisation der Volumenelemente bewirkt. So sind auch in den nun zu bildenden Bewegungsgleichungen die electrischen Momente, welche durch die wahre Electricität der Ionen gebildet werden, da sie von veränderlicher Grösse und Richtung sind, und auch von nicht electrischen Kräften, Beharrungsvermögen, Reibung etc. angegriffen werden, von denen des freien Aethers zu trennen; wir bezeichnen sie mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, für die Volumeneinheit. Ein solcher mit Aether und Ionenpaaren gefüllter Raum würde für die theoretische Betrachtung nach der älteren Vorstellung von der Existenz bipolarer magnetischer Molecüle, dem Innern eines magnetisirten Körpers ganz analog sein, und da die Gesetze der Vertheilung magnetischer und electrischer Kräfte für ruhende Zustände aus Maxwell's Theorie sich vollkommen übereinstimmend mit denen von Poisson's Theorie ergeben, die mit magnetischen Molecülen und Fernkräften rechnet, so lassen sich auch die aus jener älteren Theorie hergeleiteten Berechnungen des Energievorrathes in den Volumenelementen eines solchen Raumes mit molecularer Vertheilung der Electricität hier verwenden. Dass sowohl die Erscheinungen der dielectrischen Polarisation, wie die der ponderomotorischen Kräfte solcher

polarisirter Massen auf denselben Werth der Energie zurückführen, habe ich in einem früheren Aufsatze erwiesen. [1])

Nach der hier aufgestellten Hypothese unterscheiden sich unsere Ionenpaare von den dielectrisch polarisirten Molecülen isolirender Substanzen nur dadurch, dass sie träge Masse haben und deshalb nicht immer in der Gleichgewichtslage sich befinden, vielmehr um diese oscilliren können, sodass die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ unabhängig von den $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sich verändern können, und dass also die potentielle Energie der Electrisirung nicht blos von den letzteren drei Grössen, sondern auch von den ersteren abhängt. Ich habe es vorgezogen, statt von den Maxwell'schen Gleichungen auszugehen, die neu hinzukommenden Einflüsse in die von mir für die Electrodynamik entwickelte Form des Princips der kleinsten Wirkung aufzunehmen, weil man dadurch vor dem Uebersehen einzelner nothwendig vorhandener Gegenwirkungen in dem hier schon ziemlich verwickelten Spiel der Kräfte geschützt wird, und dadurch die Anzahl der unabhängigen Hypothesen von zweifelhafter Richtigkeit wesentlich vermindert wird.

Uebereinstimmend mit Poisson und Maxwell setzen wir die electrische Kraft, welche nothwendig ist um ein Moment $\mathfrak{x}$ in der Volumeneinheit einer mit bipolaren Molecülen beladenen Substanz hervorzubringen, diesem Momente proportional also

$$(11) \qquad X = \frac{1}{\vartheta} \cdot \mathfrak{x}, \qquad Y = \frac{1}{\vartheta} \cdot \mathfrak{y}, \qquad Z = \frac{1}{\vartheta} \cdot \mathfrak{z}.$$

Darin ist, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen der Polarisationsstärke, $\vartheta$ eine Constante. Wenn wir mit $\delta\mathfrak{x}$, $\delta\mathfrak{y}$, $\delta\mathfrak{z}$ verschwindend kleine Aenderungen dieser Werthe bezeichnen, so erhalten wir

$$(11a) \qquad X.\delta\mathfrak{x} + Y.\delta\mathfrak{y} + Z.\delta\mathfrak{z} = \frac{1}{2\vartheta}\delta[\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist offenbar gleich der Arbeit, welche die polarisirenden Kräfte bei der Aenderung der Momente gethan haben, und deshalb stellt die rechte Seite der

---

1) Vgl. meinen Aufsatz: „Ueber die auf das Innere magnetisch oder dielectrisch polarisirter Körper wirkenden Kräfte" in Monatsber. d. Berl. Akad., 17. Febr. 1881. — Wied. Ann. **13.** p. 385—400. Gleichung (2) und (4c), nebst den Bemerkungen am Schlusse.

Gleichung die Aenderung der durch die Polarisation gewonnenen Energie dar, ohne dass die Gültigkeit dieses Ausdruckes, wie in meiner früheren Arbeit, auf den Fall des Gleichgewichts zwischen den polarisirenden Kräften und der dadurch gewonnenen Polarisation beschränkt ist.

Denken wir uns die beweglichen Molecüle, deren Momente wir mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet haben, eingelagert in ein continuirliches Medium, dessen dielectrische Constante wir mit $\varepsilon$ bezeichnen, sodass seine Momente und electrischen Spannungen zusammenhängen durch die Gleichungen

$$\mathfrak{X} = \varepsilon . X, \quad \mathfrak{Y} = \varepsilon . Y, \quad \mathfrak{Z} = \varepsilon . Z,$$

so wird der Werth der electrischen Energie (Gleichung 3a entsprechend):

$$\text{(11b)} \quad \Phi_e = \iiint dx.dy.dz. \left\{ \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2\varepsilon} - \frac{\mathfrak{X}.\mathfrak{x} + \mathfrak{Y}.\mathfrak{y} + \mathfrak{Z}.\mathfrak{z}}{\varepsilon} + \frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}{2\vartheta} \right\}$$

Denkt man sich den Aether zwischen den Molecülen ungemischt mit inducirbarer ponderabler Substanz, so wäre $\varepsilon = 4\pi$ zu setzen.

Der zweite, mit $\Phi_m$ bezeichnete, magnetische Theil des kinetischen Potentials kann unverändert bleiben, da die Ionen nicht nothwendig ein anderes magnetisches Inductionsvermögen zu haben brauchen als der Aether, und die Unterschiede in Wirklichkeit meist sehr klein sind. Die Anwesenheit permanent magnetisirter Substanz brauchen wir nicht zu berücksichtigen. Also

$$\text{(11c)} \quad \Phi_q = \iiint \cdot \frac{dx.dy.dz}{2\mu} \left\{ \left( \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

Der dritte, *electromagnetische*, Theil $\Phi_q$ reducirt sich, indem wir die Glieder dritten Grades kleiner Grössen (zu denen aber $\sigma$ nicht gehört) weglassen auf:

$$\text{(11d)} \quad \Phi_q = A \iiint dx.dy.dz \left\{ \mathfrak{U} \left( \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \alpha\sigma \right) + \mathfrak{V} . \left( \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \beta\sigma \right) + \mathfrak{W} . \left( \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \gamma . \sigma \right) \right\}$$

Das $\sigma$ ist überall gleich Null ausser an den electrisch geladenen Stellen der Ionen: also kommen auch deren Geschwindigkeiten in Betracht. Da die electrischen Kräfte, die auf sie wirken, reine Kräftepaare sind, so muss, wie schon bemerkt, der Schwerpunkt der Molecüle in Ruhe bleiben, und unter diesen Umständen ist zu setzen

$$(11\text{e})\qquad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} = \alpha \, . \, \sigma, \qquad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} = \beta \, . \, \sigma, \qquad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} = \gamma \, . \, \sigma.$$

und also:

$$(11\text{f})\quad \Phi_q = A \iiint dx \, . \, dy \, . \, dz \left\{ \mathfrak{U} \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{X} + \mathfrak{x}) + \mathfrak{V} \, . \, \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{Y} + \mathfrak{y}) + \mathfrak{W} \, . \, \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{Z} + \mathfrak{z}) \right\}$$

Endlich in den letzten Theil der Arbeit $R_1$ haben wir einzusetzen mit negativem Vorzeichen, die lebendige Kraft und die Reibung der bewegten Ionen.

$$(11\text{g})\quad \left\{ \begin{aligned} R = & -\tfrac{1}{2} \iiint m_1 \left[ \left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2 \right] \\ & + \iiint [\mathfrak{x} \, . \, \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{y} \, . \, \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{z} \, . \, \mathfrak{r}_3] \, dx \, . \, dy \, . \, dz \end{aligned} \right\}$$

wo $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{r}_3$ die der Variation nicht unterworfenen Componenten der Reibungskraft darstellen, deren Werth durch

$$(11\text{h})\qquad \mathfrak{r}_1 = k_1 \, . \, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}, \qquad \mathfrak{r}_2 = k_1 \, . \, \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}, \qquad \mathfrak{r}_3 = k_1 \, . \, \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}$$

ausgedrückt werden mag.

Wenn man nun die Bedingungen dafür sucht, dass

$$(12)\qquad \delta \{ \Phi_e + \Phi_m + \Phi_q + R \} = 0$$

werde, so ergibt sich:

1. Bei Variation der $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$

$$(12\text{a})\quad \frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{x}}{\varepsilon} = A \, . \, \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}, \qquad \frac{\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}}{\varepsilon} = A \, . \, \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}, \qquad \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{z}}{\varepsilon} = A \, . \, \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t},$$

woraus auch in der schon früher angewendeten Weise (vgl. Gleichungen (2), (4c) und (4d) der früheren Abhandlung) die Gleichungen gewonnen werden können:

$$(12\text{b})\quad \left\{ \begin{aligned} A \, . \, \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}}{\varepsilon}\right) \\ A \, . \, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{z}}{\varepsilon}\right) \\ A \, . \, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) \end{aligned} \right.$$

2. Bei Variationen der $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$:

$$(12\text{c}) \quad \left\{ \begin{aligned} A \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{X} + \mathfrak{x}) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) \\ A \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{Y} + \mathfrak{y}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) \\ A \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{Z} + \mathfrak{z}) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) \end{aligned} \right.$$

3. Endlich bei der Variation nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$

$$-\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\vartheta}\mathfrak{x} - A\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} - m_1 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + \mathfrak{r}_1 = 0,$$

was combinirt mit den Gleichungen (11h) und (12a) gibt:

$$(12\text{d}) \quad \left\{ \begin{aligned} &+\frac{2\mathfrak{X}}{\varepsilon} = \frac{1+\vartheta}{\vartheta}\mathfrak{x} + m_1 \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + k_1 \cdot \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}: \\ &\text{und entsprechend} \\ &+\frac{2\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = \frac{1+\vartheta}{\vartheta} \cdot \mathfrak{y} + m_1 \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} + k_1 \cdot \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} \\ &+\frac{2\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = \frac{1+\vartheta}{\vartheta}\mathfrak{z} + m_1 \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2} + k_1 \cdot \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

Der kürzeren Schreibweise halber setzen wir

$$(12\text{e}) \quad \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1+\vartheta}{\vartheta} = a^2, \quad \frac{\varepsilon}{2} m_1 = m, \quad \frac{\varepsilon}{2} k_1 = k,$$

somit wird

$$(12\text{f}) \quad \left\{ \begin{aligned} +\mathfrak{X} &= a^2 \mathfrak{x} + m \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} \\ +\mathfrak{Y} &= a^2 . \mathfrak{y} + m . \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} + k . \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} \\ +\mathfrak{Z} &= a^2 . \mathfrak{z} + m . \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2} + k . \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} . \end{aligned} \right.$$

System ebener Wellen in Richtung der $x$-Axe ablaufend.

Setze

$$(13) \quad \mathfrak{Y} = B . e^{in(t+px)}, \quad \mathfrak{N} = C . e^{in(t+px)}, \quad \mathfrak{y} = b . e^{in(t+px)}$$

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Z} = \mathfrak{L} = \mathfrak{M} = \mathfrak{x} = \mathfrak{z} = 0,$$

so geben die Gleichungen (12b) für die Werthe der Coefficienten:

$$(13\text{a}) \quad \left\{ \begin{aligned} &p\frac{(B-b)}{\varepsilon} = A\,C; \quad \text{und (12c):} \\ &A(B+b) = C\frac{p}{\mu}; \end{aligned} \right.$$

endlich (12f):

(13b) $$B = a^2 b - m n^2 b + i n k b.$$

Setzt man

(13c) $$\begin{cases} b = h B, \quad \text{also:} \\ h = \dfrac{1}{a^2 - m n^2 + i n k}, \end{cases}$$

so geben die Gleichungen (13a):

(13d) $$\frac{p}{A} \cdot \frac{1-h}{1+h} = \frac{\varepsilon \mu A}{p}.$$

Nach der Art des Vorkommens in den Gleichungen (14) ist offenbar $1/p$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen. Wenn nicht $k = 0$ ist, wird deren Werth complex sein, was bekanntlich Dämpfung der fortlaufenden Wellen anzeigt.

Um die physikalische Bedeutung dieses Ausdruckes deutlicher zu machen und um die reellen und imaginären Theile voneinander zu trennen, bemerken wir zunächst, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\mathfrak{C}_0$ im continuirlichen Aether gegeben ist durch:

(14) $$\mathfrak{C}_0^2 = \frac{1}{A^2 \,.\, \varepsilon \,.\, \mu}.$$

Setzen wir dann

(14a) $$p = -\frac{q}{i n} + \frac{1}{\mathfrak{C}},$$

so ist nach der oben gemachten Anwendung des Exponenten $p$ offenbar $\mathfrak{C}$ die reelle Fortpflanzungsgeschwindigkeit der von uns betrachteten Wellen und $q$ der Dämpfungscoefficient für die Längeneinheit des Weges.

Dadurch wird Gleichung (13d)

(14b) $$p = -\frac{q}{i n} + \frac{1}{\mathfrak{C}} = \frac{1}{\mathfrak{C}_0} \cdot \sqrt{\frac{1+h}{1-h}}$$

$$\frac{1+h}{1-h} = \frac{a^2 - m n^2 + k i n + 1}{a^2 - m n^2 + k i n - 1}.$$

Setze

(14c) $$\begin{cases} a^2 - m n^2 + 1 = \varrho_0 \,.\, \cos \vartheta_0 \\ a^2 - m n^2 - 1 = \varrho_1 \,.\, \cos \vartheta_1 \\ k n = \varrho_0 \,.\, \sin \vartheta_0 = \varrho_1 \,.\, \sin \vartheta_1, \end{cases}$$

wobei $\varrho_0$ und $\varrho_1$ immer positiv genommen werden können, und die Winkel $\vartheta_0$ und $\vartheta_1$ in den zwei ersten Quadranten, sodass $\sin \vartheta_0$ und $\sin \vartheta_1$ immer positive Grössen sind, so wird

(14d) $$p = \frac{1}{\mathfrak{E}_0} \cdot \sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}} \cdot e^{\frac{1}{2} i (\vartheta_0 - \vartheta_1)}$$

und

(14e) $$+ \frac{q}{i n} = \frac{1}{\mathfrak{E}_0} \cdot \sqrt{\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0}} \sin \tfrac{1}{2} (\vartheta_0 - \vartheta_1),$$

(14f) $$\frac{\mathfrak{E}_0}{\mathfrak{E}} = \sqrt{\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_0}} \cdot \cos \tfrac{1}{2} (\vartheta_0 - \vartheta_1).$$

Dieses letztere Verhältniss ist zugleich das Brechungsverhältniss schwach gedämpfter Wellen für die betreffenden Schwingungen bei dem Uebergang aus dem mit beweglichen Molecülen beladenen Aether in den davon freien.

Zu bemerken ist, dass der Wurzelausdruck, der in den beiden Gleichungen (14e) und (14f) vorkommt, in beiden dasselbe Vorzeicheu haben muss.

Aus den Gleichungen ergeben sich die Werthe der Tangenten:

(14g) $$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{k n}{a^2 - m n^2 + 1}, \qquad \operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{k n}{a^2 - 1 - m n^2},$$

oder wenn wir

(15) $$N^2 = \frac{a^2 + 1}{m}, \quad P^2 = \frac{a^2 - 1}{m}$$

setzen,

(15a) $$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{k}{m N} \cdot \frac{1}{\frac{N}{n} - \frac{n}{N}}, \qquad \operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{k}{m P} \cdot \frac{1}{\frac{P}{n} - \frac{n}{P}},$$

welche zeigen, dass der Winkel $\vartheta_0$ ein rechter wird, wenn $n = N$. $N$ ist aber der Werth, den $n$ annehmen würde, wenn die Phasen der electrischen Verschiebungen $\mathfrak{X}$ im Aether und $\mathfrak{x}$ im Molecül gleiche Richtung haben und ohne Reibung unter dem Einflusse ihrer eigenen Anziehungskräfte vor sich gehen, die in der Constante $a^2$ zusammengefasst sind.

Wenn $a^2 > m / s$ und daher $P$ reell ist, bezeichnet $P$ eine andere kleinere Schwingungszahl, welche eintreten würde, wenn die genannten beiden electrischen Kräfte einander gerade entgegenwirken.

Die in den Gleichungen (15a) für die beiden Tangenten gegebenen Werthe zeigen, dass, wenn die Reibungsconstante $k$ sehr klein ist, die Tangenten nur dann endliche Grösse haben können, wenn auch ihr Nenner nahe gleich Null wird, d. h. $n$ nahehin gleich $N$ oder gleich $P$ wird. Wenn dies eintritt, so

wird für $n = P$ der Winkel $\vartheta_1 = \pi/2$, für $n = N$ dagegen $\vartheta_0 = \pi/2$.

Das Verhältniss der beiden in (14g) und (15a) gegebenen Tangenten findet sich:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 : \operatorname{tg}\vartheta_0 = (N^2 - n^2) : (P^2 - n^2).$$

Da zum absolut grösseren Werthe der Tangente auch der grössere Sinus gehört, und für Winkel die nahehin $= 0$ oder $= \pi$ sind, das Verhältnis der Sinus mit dem der Tangenten zusammenfällt, so ergibt sich hieraus, dass der in den Gleichungen (14e) und (14f) vorkommende Factor $\sin\vartheta_1/\sin\vartheta_0$ für $n = 0$ den Werth $N^2/P^2$ hat, also grösser als Eins ist; für $n = \infty$ dagegen wird $\sin\vartheta_1 = \sin\vartheta_0$.

Der genannte Factor wird steigen, bis $n = P$ geworden ist, wird $= 1$ sein, wenn $n^2 = \frac{1}{2}(P^2 + N^2)$; wird noch weiter abnehmen, bis $n = N$ geworden, endlich wenn $n$ sehr gross, wieder zunehmen, bis er für $n = \infty$ wieder $= 1$ geworden ist.

Wie schon früher hervorgehoben, ist $\mathfrak{C}_0/\mathfrak{C} = \mathfrak{n}$ das Brechungsverhältniss zwischen leerem und belastetem Aether, dagegen

$$\mathfrak{q} = \frac{q \cdot \mathfrak{C}}{\mathfrak{n}} \tag{16}$$

ist der Erlöschungscoefficient für eine Wellenlänge der betreffenden Strahlen, dessen Werth sich auch aus (14e) und (14f) ergibt, gleich

$$\mathfrak{q} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\vartheta_0 - \vartheta_1), \tag{16a}$$

$$\mathfrak{n}^2(1 + \mathfrak{q}^2) = \frac{\sin(\vartheta_1)}{\sin(\vartheta_0)} = \frac{\varrho_0}{\varrho_1}.$$

Für kleine Werthe von $k$ ergibt sich aus den vorher angestellten Betrachtungen, dass der hier vorkommende Winkel $\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_0)$ bei $n = 0$ sehr klein ist, bei $n = P$ ziemlich schnell bis nahe an $\pi/2$ steigt und bei $n = N$ wieder ebenso schnell auf seinen früheren Werth zurückgeht. Sein Sinus ist also für $n = 0$, wie für $n = \infty$, sehr klein, zwischen $n = P$ und $n = N$ dagegen wird er nahe gleich 1, und wird also nach Gleichung (16a) zwischen beiden Linien starke Absorption hervorbringen.

Die Werthe des Brechungsverhältnisses dagegen ergeben sich aus obigen Gleichungen:

$$\mathfrak{n} = \sqrt{\frac{\sin\vartheta_1}{\sin\vartheta_0\,(1 + \mathfrak{q}^2)}}, \tag{16b}$$

sie werden also in dem ganzen Streifen starker Absorption herabgedrückt gegen die durch den Ausdruck $\sqrt{\sin\vartheta_1 / \sin\vartheta_0}$ dargestellten Werthe. Letztere sind aber, wie wir gesehen, auf der Seite vom Absorptionsstreifen gegen das Roth hin höher, als auf der Seite gegen das Violett hin. Es zeigt dieses Verhalten also *anomale Dispersion* an für die neben dem Absorptionsstreifen sichtbar bleibenden Farben.

Bei den farblos durchsichtigen Körpern, bei denen gewöhnlich die Brechungsverhältnisse untersucht worden sind, finden wir in dem sichtbaren Theile des Spectrums keine deutliche Absorption, diese kann nur jenseits der Grenzen desselben vorkommen. Der Verlauf der Curve der Brechungsverhältnisse, wie er der viel gebrauchten Formel von Cauchy zu Grunde liegt, stimmt in unserer Theorie mit dem Theil der Curve für Werthe von $n$, welche kleiner sind, als $P$. Es wären also im allgemeinen die Absorptionsstreifen, welche dies veranlassen, jenseits des Ultraviolett zu suchen. Natürlich ist nicht ausgeschlossen, dass auch Molecüle vorkommen können mit mehreren eigenen Schwingungsperioden, die mehrere Absorptionsstreifen und entsprechend verwickeltere Brechungsverhältnisse geben.

Zu bemerken ist noch, dass in stark absorbirten Stellen des Spectrums, wo der Factor $\cos\frac{1}{2}(\vartheta_0 - \vartheta_1)$ sehr klein wird, unsere Theorie die Möglichkeit offen lässt, dass Brechungsverhältnisse kleiner als 1, oder Geschwindigkeiten höher als im leeren Aether vorkommen, wie das nach den Untersuchungen von Hrn. Kundt in einigen Metallen der Fall ist.

### Fälle mit imaginärem $P$.

Die Fälle, wo

$$a^2 < 1\,,$$

bei denen $P$ imaginär wird, ergeben einen anderen Verlauf. In diesen wird $\operatorname{tang}(\vartheta_1)$ immer negativ, also $\vartheta_1 > \pi/2$, und desto grösser, je höher $n$; wenn $k$ klein ist, ist $\vartheta_1$ immer nur wenig von $\pi$ unterschieden. Dagegen verhält sich $\vartheta_0$ wie in den früher besprochenen Fällen. Sobald $n$ den Werth $N$ passirt hat, wird auch $\vartheta_0$ sich schnell dem Werthe $\pi$ nähern. $(\vartheta_1 - \vartheta_0)/2$, welches vorher immer wenig kleiner war als ein Rechter, wird für $n > N$ klein werden, und erst für solche

Werthe würde also die Dämpfung schwach werden, sodass die betreffenden Strahlen gesehen werden könnten. Die Brechung würde ein Minimum in der Gegend von $n = N$ erreichen, von da ab, wo die Strahlen anfingen sichtbar zu werden, weiter steigen und endlich für $n = \infty$ den festen Werth $= 1$ asymptotisch erreichen. Körper von diesem Typus der Brechung lassen sich unter den bisher untersuchten noch nicht erkennen.

### Phasendifferenz.

Zu bemerken ist noch, dass aus Gleichung (13c) folgt:

$$\frac{b}{B+b} = \frac{e^{-i\vartheta_0}}{\varrho_0}. \tag{16c}$$

Aus (13a) aber folgt:

$$\frac{B+b}{C} = \frac{p}{A\mu},$$

da andererseits

$$p = \frac{1}{\mathfrak{E}_0}\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}}\cdot e^{\frac{1}{2}i(\vartheta_0 - \vartheta_1)}$$

gefunden ist, ergibt sich

$$\frac{b}{C} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\cdot\mu\,\varrho_0\,\varrho_1}}\,e^{-\frac{1}{2}(i\vartheta_0 + \vartheta_1)}.$$

Daraus geht hervor, dass eine Phasendifferenz zwischen den magnetischen und den ponderablen Schwingungen besteht, welche $\frac{1}{2}(\vartheta_0 + \vartheta_1)$ beträgt. Das Verhältniss ihrer Amplituden wird durch den ersten Factor bestimmt:

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\cdot\mu\cdot\varrho_0\cdot\varrho_1}}.$$

Die Grössen $\varrho_0$ und $\varrho_1$ können nicht Null werden, aber sie werden bei kleinem Werthe von $k$ sehr klein, wenn entweder $n = N$ oder $n = P$.

Die Gleichung (13e) lässt erkennen, dass zwischen der Oscillation der electrischen Momente und der der Ionen auch eine Phasendifferenz ist. Setzt man

$$a^2 - m n^2 = \varrho_2 . \cos\vartheta_2$$

$$k n = \varrho_2 . \sin\vartheta_2 ,$$

so ist

$$\frac{b}{B} = h = \frac{1}{\varrho_2}\cdot e^{i\vartheta_2}.$$

Das Verhältniss der Amplituden wird ein Minimum, wenn

$$n^2 = \tfrac{1}{2}(P^2 + N^2).$$

Starke Schwingungen dieser Art würden möglicherweise die Ionen aus ihren Verbindungen reissen können, namentlich wenn noch eine electrostatische Ladung der Substanz hinzukommt, und bei allen Substanzen, wo starke Absorption an der Grenze des Ultraviolett vorkommt, würde die von Hrn. Hertz beobachtete Entweichung der Electricität unter dem Einflusse der ultravioletten Strahlen eintreten können. Dass überwiegend leicht negative Electricität ausströmt, weist allerdings auf eine besondere Beschaffenheit der negativen Ionen hin.

### Verhalten der nicht absorbirenden Medien.

Wenn der Absorptionscoefficient $k = 0$ ist, ist $h$ reell, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{p} = \mathfrak{C}_0 \sqrt{\frac{1-h}{1+h}} \tag{17}$$

wird alsdann rein reell. Der erste Factor dieses Werthes

$$\mathfrak{C}_0 = \frac{1}{A\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{12}$$

ist bekanntlich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im continuirlichen Aether, und für reelle Werthe ist

$$\frac{1+h}{1-h} = \frac{a^2\varepsilon + 1 - mn^2}{a^2\varepsilon - mn^2 - 1}. \tag{13}$$

Dieser Factor ist positiv und das Verhältniss $\mathfrak{C} : \mathfrak{C}_0 = 1 : \mathfrak{n}$ demnach reell, wenn entweder

$$mn^2 < a^2\varepsilon - 1 \quad \text{oder} \quad mn^2 > a^2\varepsilon + 1.$$

Der erste Fall ergibt constant werdendes Brechungsverhältniss für langsamere Schwingungen; die Geschwindigkeit ist in durchsichtigen nicht absorbirenden Medien kleiner, als im Vacuum. Der zweite Fall ergibt constant werdendes Brechungsverhältniss für sehr schnelle Schwingungen, und das Brechungsverhältniss kleiner als Eins. Der erste Fall entspricht also besser den Beobachtungen an den bekannteren sehr durchsichtigen Medien.

Wenn wir bemerken, dass $a^2/m = N^2$ das Quadrat der Schwingungszahl der vom Aether befreiten Ionen bezeichnet, so wird

$$\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0}\right)^2 = \frac{N^2 - n^2 - \frac{1}{m}}{N^2 - n^2 + \frac{1}{m}},$$

und da $\lambda = \mathfrak{C} / n$ ist, kann man setzen

$$(\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{C}_0^2)\left(N^2 - \frac{\mathfrak{C}^2}{\lambda^2}\right) + (\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{C}_0^2)\frac{1}{m} = 0,$$

$$\mathfrak{C}^2(N^2\lambda^2 + \mathfrak{C}_0^2) - \mathfrak{C}^4 + \frac{\lambda^2\mathfrak{C}_0^2}{m} - \mathfrak{C}_0^2 N^2\lambda^2 + \mathfrak{C}^2\frac{\lambda^2}{m} = 0,$$

$$\mathfrak{C}^2 = \tfrac{1}{2}\left(N^2\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{m} + \mathfrak{C}_0^2\right)$$

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}\left(N^2\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{m} + \mathfrak{C}_0^2\right)^2 + \frac{\lambda^2\mathfrak{C}_0^2}{m} - N^2\lambda^2\mathfrak{C}_0^2}.$$

Da $\mathfrak{C}^2 < \mathfrak{C}_0^2$ sein soll, kann nur das untere Zeichen gelten.

Dürfen wir

$$\lambda^2\mathfrak{C}_0^2\left[\frac{1}{m} - N^2\right]$$

als klein ansehen, so lässt der letzte Ausdruck eine Entwickelung der Wurzel zu

$$\mathfrak{C}^2 = \frac{\lambda_0^2\mathfrak{C}^2\left(N^2 - \frac{1}{m}\right)}{N^2\lambda^2 + \mathfrak{C}_0^2 + \frac{\lambda^2}{m}} = \frac{\left(N^2 - \frac{1}{m}\right)}{\frac{N^2}{\mathfrak{C}_0^2} + \frac{\mathfrak{C}_0^2}{\lambda^2} + \frac{1}{m\mathfrak{C}_0^2}}$$

$$\frac{\mathfrak{C}_0^2}{\mathfrak{C}^2} = \frac{N^2 + \frac{\mathfrak{C}_0^2}{\lambda^2} + \frac{1}{m\mathfrak{C}_0^2}}{N^2 - \frac{1}{m}}.$$

Dies ist eine Formel, die sich der von Cauchy nähert, wenigstens für Medien mit kleiner Dispersion, in der $\mathfrak{C}_0 / \lambda$ als klein gegen $N$ betrachtet werden kann. Denn dann kann man annähernd die Wurzel durch den binomischen Satz aus der letzten Gleichung ausziehen, und erhält

$$n = \alpha + \frac{\beta}{\lambda^2}$$

$$\alpha = \frac{N + \frac{1}{m\mathfrak{C}_0^2}}{\sqrt{N^2 - \frac{1}{m}}}, \quad \beta = \frac{\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{C}_0^2}{N^2}}{\sqrt{N^2 - \frac{1}{m}}}.$$

### Polarisation durch Brechung.
### Electrische Schwingungen in der Einfallsebene.

Für den einfallenden Strahl sei beim Einfallswinkel $\alpha$ die $yx$-Ebene die Einfallsebene, die Amplitude der magnetischen Schwingung $C$, dem $z$ parallel; die der electrischen Schwingungen

liegt dann in der Einfallsebene, hat den Betrag nach Gleichung (13a) und (14b)

$$\frac{B}{C} = \frac{1}{\mathfrak{C} \, . \, A \mu \, . \, (1 + h)}$$

und der Winkel zwischen diesen Schwingungen und der $y$-Axe ist gleich dem Einfallswinkel $\alpha$, und ihre in die Richtung der $y$ fallende Componente ist also

$$\mathfrak{Y} = B \cos \alpha = \frac{C \, . \cos \alpha}{\mathfrak{C} \, A \mu (1 + h)} \, .$$

Die Grenzbedingungen ergeben sich aus den Gleichungen (12a) und (12b) dadurch, dass an der Grenzfläche die dort nach $x$ genommenen Differentialquotienten nicht unendlich werden dürfen, d. h. dass die Werthe, von denen sie genommen sind, ebenda nicht discontinuirlich sein dürfen. Es müssen also die Werthe von $(\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}) / \varepsilon$, $(\mathfrak{Z} - \mathfrak{z}) / \varepsilon$ und $\mathfrak{N} / \mu$ sowie $\mathfrak{M} / \mu$ auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich gross sein. Bezeichnen wir die Grössen, die sich auf das Mittel des einfallenden Strahles beziehen, mit dem Index 1, die des gebrochenen Strahles mit dem Index 3, so ist also an der Grenze zu setzen:

1. Für den einfallenden Strahl:

$$\frac{\mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{y}_1}{\varepsilon_1} = \frac{(B_1 - b_1)}{\varepsilon_1} \cos \alpha$$

$$\frac{\mathfrak{N}_1}{\mu_1} = \frac{C_1}{\mu_1} \, .$$

2. Für den gebrochenen Strahl:

$$\frac{\mathfrak{N}_3}{\mu_3} = \frac{C_3}{\mu_3}$$

$$\frac{\mathfrak{Y}_3 - \mathfrak{y}_3}{\varepsilon_3} = \frac{B_3 - b_3}{\varepsilon_3} \, . \cos \beta .$$

3. Für den gespiegelten Strahl:

$$\frac{\mathfrak{Y}_2 - \mathfrak{y}_2}{\varepsilon_1} = - \frac{B_2 - b_2}{\varepsilon_1} \, . \cos \alpha$$

$$\frac{\mathfrak{N}_2}{\mu_1} = - \frac{C_2}{\mu_1} \, .$$

Nach Gleichung (13a) ist für die verschiedenen Indices

$$\frac{B - b}{C} = \frac{A \varepsilon}{p} = \mathfrak{C} \, . \, A \, . \, \varepsilon$$

oder

$$\frac{B_1 - b_1}{\varepsilon_1} = C_1 . \mathfrak{C}_1 . A, \quad \frac{B_2 - b_2}{\varepsilon_1} = C_2 . \mathfrak{C}_1 . A, \quad \frac{B_3 - b_3}{\varepsilon_3} = \mathfrak{C}_3 . C_3 . A.$$

Die Grenzbedingungen fordern also:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \dfrac{C_1 + C_2}{\mu_1} = \dfrac{C_3}{\mu_3} \text{ und} \\ (C_1 - C_2) A \mathfrak{C}_1 \cos\alpha = C_3 A . \mathfrak{C}_3 . \cos\beta. \end{cases}$$

Da die Wellenphasen an der Grenzfläche $x = 0$, beiderseits mit gleicher Geschwindigkeit fortlaufen müssen, ist bekanntlich

$$\frac{\mathfrak{C}_1}{\sin\alpha} = \frac{\mathfrak{C}_3}{\sin\beta},$$

und die Gleichungen (I) ergeben

$$\text{(Ia)} \quad \frac{\mu_3}{\mu_1} (C_1 + C_2) \cos\beta . \sin\beta = (C_1 - C_2) . \cos\alpha . \sin\alpha.$$

Da $\mu_3$ und $\mu_1$ bei den bekannten ungefärbt durchsichtigen Körpern kaum unterschieden sind, kann man ihr Verhältniss gleich 1 setzen, und erhält

$$C_1 (\sin 2\beta - \sin 2\alpha) = - C_2 (\sin 2\beta + \sin 2\alpha),$$

also $C_2 = 0$, wenn

$$\sin 2\beta = \sin 2\alpha,$$

was eintritt, wenn $\beta + \alpha = (\pi / 2)$.

Es ist dies der Fall, wo der reflectirte Strahl auslöscht. Die Grösse des Polarisationswinkels entspricht Fresnel's bekanntem Gesetze, und zwar *für alle Farben.*

### Magnetische Schwingungen in der Finfallsebene.

Wir bezeichnen wieder die Amplitude derselben in den drei Strahlen mit $C_1$, $C_2$, $C_3$ und die der electrischen mit $B_1$, $B_2$, $B_3$.

Die Grenzbedingung für die magnetischen Oscillationen wird

$$\frac{C_1 - C_2}{\mu_1} . \cos\alpha = \frac{C_3}{\mu_3} \cos\beta$$

und für die electrischen:

$$\frac{B_1 - b_1}{\varepsilon_1} + \frac{B_2 - b_2}{\varepsilon_1} = \frac{B_3 - b_3}{\varepsilon_3}.$$

Indem wir diese Grössen wieder durch die entsprechenden $C$ ausdrücken, erhalten wir

$$[C_1 + C_2]\mathfrak{C}_1 . A = C_3 \mathfrak{C}_3 A,$$

oder wenn wir $\mu_1 = \mu_3$ setzen:

(II) $$(C_1 - C_2) . \cos\alpha \sin\beta = (C_1 + C_2) \sin\alpha . \cos\beta,$$

(IIa) $$C_1 . \sin(\beta - \alpha) = C_2 . \sin(\alpha + \beta),$$

was Fresnel's *bekannter Werth für die Intensität des reflectirten Strahles in der anderen Polarisationsrichtung ist.*

Sobald Absorption stattfindet, haben wir, wie bekannt, elliptische Polarisation. Ihre Gesetze sind aus der vorgetragenen Theorie ohne Lücke abzuleiten.

## II. *Magnetisirung radial geschlitzter Eisenringe; von Heinrich Lehmann.*

(Hierzu Taf. IV.)

---

### § 1. Einleitung.

Ein in ein gleichförmiges magnetisches Feld gebrachter Eisenkörper erfährt nur dann eine gleichförmige Magnetisirung, wenn er durch eine Fläche zweiten Grades begrenzt ist. Ein verlängertes Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe in die Richtung der erzeugenden Kraftlinien fällt, artet bei unbegrenzt wachsender Rotationsaxe in einen unendlich langen, gleichförmig magnetisirten Cylinder aus. Denkt man sich diesen Cylinder mitsammt dem umgebenden Felde kreisförmig gekrümmt, so geht er über in einen durch ein gleichförmiges peripherisches Feld gleichförmig magnetisirten Ring, wobei die „peripherische Gleichförmigkeit" so zu verstehen ist, dass man jedes Längenelement der Ringaxe als unendlich wenig gekrümmt betrachtet. Diese Gleichförmigkeit bleibt auch für endliche Dimensionen bestehen, solange die Querdimensionen des Ringes als verschwindend klein gegen seinen Radius betrachtet werden können.

Hierbei macht sich der Unterschied zwischen endlosen und nicht endlosen Gebilden in der Weise geltend, dass bei den letzteren eine selbstentmagnetisirende Kraft auftritt, infolge deren die magnetische Kraft im Innern des Körpers eine andere, kleinere wird, als ausserhalb. Diese selbstentmagnetisirende Kraft, welche als herrührend von den „Endflächen" des magnetisirten Körpers zu denken ist, ist eine Function der Magnetisirung, und zwar ist sie ihr beim Ellipsoid proportional. Der Proportionalitätsfactor heisst „Entmagnetisirungsfactor" und lässt sich aus den Dimensionen des Ellipsoids berechnen.

Die Beobachtung ergibt die Werthe der Magnetisirung als Function der äusseren magnetischen Kraft. Will man daraus die Werthe der inneren („totalen") magnetischen Kraft ermitteln, welche jene Magnetisirungen hervorgebracht haben,

so muss man von den Werthen der äusseren Kraft die mit dem Entmagnetisirungsfactor multiplicirten zugehörigen Magnetisirungen subtrahiren. Diese Operation ist graphisch in einfacher Weise auszuführen [1]), indem man durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine gerade Linie zieht, welche mit der Ordinatenaxe (der Axe der Magnetisirungen) einen Winkel bildet, dessen Tangente dem Entmagnetisirungsfactor gleich ist. [2]) Man kann nun entweder die Aufgabe stellen, aus der Beobachtungscurve die „Normalcurve" (Magnetisirung als Function der totalen magnetischen Kraft) abzuleiten oder umgekehrt aus der gegebenen Normalcurve die Beobachtungscurve für ein gegebenes Axenverhältniss zu construiren. In beiden Fällen wird die bezeichnete Gerade als neue Ordinatenaxe behandelt, auf welche die aus der gegebenen zu construirende Curve bezogen wird, nur mit dem Unterschiede, dass im ersteren Falle die Gerade nach Seite der negativen Werthe der magnetischen Kraft, im letzteren nach der positiven Seite zu ziehen ist. Dementsprechend kann man das Uebergangsverfahren im letzteren Falle als „Scheerung", im ersteren als „Rückscheerung" bezeichnen.

Bei dem geschlossenen Ring tritt, ebenso wie bei dem unendlichen Cylinder, eben infolge der Endlosigkeit, keine selbstentmagnetisirende Kraft auf. Die Beobachtung liefert daher direct die Magnetisirung (resp. die Induction) als Function der totalen magnetischen Kraft.

Ist der Ring aber nicht vollständig geschlossen, sondern durch einen schmalen radialen Schlitz unterbrochen, so entsteht eine selbstentmagnetisirende Kraft, die mit wachsender Schlitzweite zunimmt. Es wird unsere Aufgabe sein, letztere in ihrer Abhängigkeit von der Magnetisirung und der geometrischen Gestaltung des Systems zu erforschen.

Was die theoretische Behandlung dieses Problems betrifft, so liegt eine Eigenthümlichkeit darin, dass die Inductionslinien fast ganz innerhalb des Eisens verlaufen. Davon aus-

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **22**. p. 175. 1886.

2) Unter der Annahme, dass für Ordinaten und Abscissen der gleiche Maassstab verwendet werde, was in Wirklichkeit aus praktischen Rücksichten in der Regel unzweckmässig wäre.

gehend hat Hr. du Bois[1]) eine Theorie des geschlitzten Ringes entwickelt.

Die von Hrn. du Bois aus dieser Theorie hergeleiteten Gleichungen finden, wie wir sehen werden, durch die Versuche innerhalb der Fehlergrenzen eine völlige Bestätigung.

## § 2. Methode.

Von den drei bei magnetischen Messungen üblichen Methoden, der ballistischen, der magnetometrischen und der optischen, konnte hier nur die erstere in Betracht kommen. Die Versuchsanordnung war im wesentlichen die von früheren Beobachtern[2]) angewandte. Dieselbe werde an dem Schema

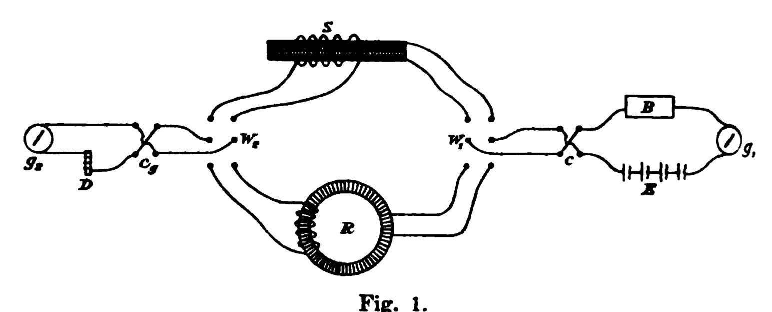



Fig. 1.

Fig. 1 erläutert. Die rechte Seite der Figur enthält die primäre, die linke Seite die secundäre Leitung und es bedeuten:

- $R$ den Ring;
- $S$ das Solenoid zur Aichung des Galvanometers $g_2$;
- $g_2$ Galvanometer im secundären Kreise;
- $D$ eine Spirale zur Dämpfung der Galvanometerausschläge;
- $g_1$ das Galvanometer im primären Kreise;
- $E$ die Batterie;
- $B$ die Widerstände im primären Kreise;
- $c$ den Commutator des Hauptstromes;
- $c_g$ den Commutator des Galvanometers;

1) du Bois, Wied. Ann. **46.** p. 486. § 15 ff. (vgl. auch du Bois, Verh. d. Phys. Ges. Berlin 27. Juni 1890 p. 81).

2) Rowland, Phil. Mag. **48.** p. 321. 1874. Ewing: Magnetic induction in iron and other metals. London 1892; Uebers. Berlin 1892. Cap. III.

$W_1$ Wippe, welche gestattet, nach Belieben die primäre Leitung des Ringes oder des Solenoides einzuschalten;

$W_2$ Wippe, welche das Gleiche für die secundären Leitungen leistet.

Die Ausschläge des durch das Solenoid geaichten Galvanometers dienen zur Messung des magnetischen Zustandes des Eisenringes, welcher durch den seine primären Windungen durchfliessenden Hauptstrom magnetisirt wird. Die Formeln, mittels deren die charakteristischen Grössen aus den Angaben des Galvanometers in absoluten Einheiten brechnet werden, werden unten (§ 5) abgeleitet.

## § 3. Apparate.

Das *Galvanometer* war ein Wiedemann-Edelmann'sches. Um dasselbe als ballistisches zu verwenden, war seine volle Schwingungsdauer durch Vergrösserung des Trägheitsmomentes und durch Astasirung auf 12 Sec. gebracht.

Fig. 2.

Die Aichung des Galvanometers geschah mit Hülfe des *Solenoids* $S$. Dasselbe bestand aus einem cylindrischen Holzkern, welcher mit einer Lage von 298 Windungen 1,5 mm dicken, mit Seide doppelt umsponnenen Kupferdrahtes bewickelt war. Seine Dimensionen waren folgende:

$$2r_1 = 33{,}85 \text{ mm}, \quad 2r_2 = 37{,}2 \text{ mm},$$
$$2\varrho = 35{,}52 \text{ mm} = 2\frac{r_1 + r_2}{2},$$
$$N = 298; \quad l = 48{,}7 \text{ cm}; \quad \frac{N}{l} = 6{,}12 \text{ cm}^{-1},$$
$$A = \varrho^2 \pi = 990{,}9 \text{ mm}^2 = 9{,}909 \text{ cm}^2;$$
$$u = 2\pi\varrho = 11{,}16 \text{ cm},$$
$$F = NA = 2953 \text{ cm}^2,$$
$$\frac{F}{l} = \frac{N.A}{l} = 60{,}64 \text{ cm}^2,$$
$$L = N.u = 33{,}3 \text{ m}.$$

Hierin bedeuten $N$ Windungszahl, $l$ Länge der Spule, $A$ Querschnitt, $\varrho$ den Radius (die Drahtaxe als Umfang genommen vgl. Fig. 2), $u$ Länge einer Windung, $F$ Windungsfläche einer Windung, $L$ gesammte Drahtlänge. Diese Mes-

sungen wurden mit Calibermaass (Schubleere) und Theilmaschine ausgeführt.

Auf dieses Solenoid wurde eine zweite Spule von etwas grösserem Durchmesser geschoben; diese bestand aus einer in der Längsrichtung (zur Vermeidung Foucault'scher Ströme) geschlitzten Messinghülse, welche mit vier Lagen 0,3, mm dicken mit Seide doppelt umsponnenen Kupferdrahts in einer Länge von 57 mm bewickelt war. Die Windungszahl betrug $n = 632$, der Widerstand des Drahtes 203 Ohm, während der der primären Rolle 0,33 Ohm war.

Die vier Spiralen des Galvanometers, welche zu je zwei auf die beiden Rollen vertheilt waren, wurden parallel geschaltet und ergaben einen Widerstand von 15 Ohm.

Zur *Strommessung* wurde theils ein „platform ampèremeter" von Lord Kelvin, theils ein Siemens'sches Torsionsgalvanometer benutzt, deren Aichungen voltametrisch controllirt wurden.

Als *Stromquelle* wurden Accumulatoren benutzt.

Zu erwähnen ist noch ein *Flüssigkeitsrheostat* zur Entmagnetisirung des Eisenringes mittels stetig abnehmender Stromwechsel. [1]) Seine Dimensionen waren: 35 cm Höhe und 11 cm Durchmesser. Mit einer Lösung von Zinksulfat in einer Concentration von etwa 40 Proc. hatte derselbe einen Widerstand von ca. 10 Ohm.

## § 4. Der Eisenring.

Ein quadratisches Stück bester schwedischer Eisenplatte (Marke: P. S. B. A.) wurde sorgfältig 48 Stunden lang ausgeglüht und aus diesem ein ringförmiges Stück ausgeschnitten und roh abgedreht, und, nachdem dieses noch einmal ausgeglüht war, der Ring in seiner endgültigen Form vollkommen kreisförmig und mit kreisförmigem Querschnitt mittels einer dazu hergestellten Leere abgedreht.

Seine Dimensionen wurden theils durch Ausmessung mit Calibermaass, Contactschraube und Theilmaschine, theils durch Wägung gemessen.

---

1) Welcher im wesentlichen nach Ewing l. c. ausgeführt war. Die Angabe wurde vor Erscheinen des Buches einem Artikel desselben Autors im „Electrician" entnommen.

Die Längenmessungen ergaben folgende Dimensionen:

$$r = 70{,}65 \text{ mm}, \quad R = 88{,}55 \text{ mm},$$

$$\varrho = \frac{R + r}{2} = 79{,}6 \text{ mm} = 7{,}96 \text{ cm};$$

$$2\pi\varrho = 500{,}1 \text{ mm} = 50{,}01 \text{ cm},$$

$$a = 8{,}95 \text{ mm},$$

woraus $S = a^2\pi = 251{,}6 \text{ mm}^2 = 2{,}516 \text{ cm}^2$

und $V = 125{,}86 \text{ cm}^3$.

Die Bedeutung der Bezeichnungen ergiebt sich aus den Fig. 3 und 4. Fig. 3 stellt einen axialen, Fig. 4 einen äquatorialen Schnitt dar. Letzterer enthält den Kreis, auf welchem die Mittelpunkte der Querschnitte liegen (Centralkreis).

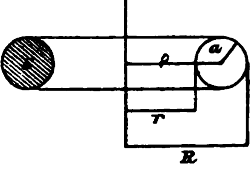


Fig. 3.

Hiernach bedeuten:

$R$ den Radius des äusseren Kreises des Aequatorialschnittes,

$r$ den Radius des inneren Kreises des Aequatorialschnittes,

$\varrho = \frac{R + r}{2}$ den Radius des Centralkreises,

$a$ den Radius des kreisförmigen Querschnittes;

ferner $V = 2\varrho\pi . a^2\pi$ das Volumen des Ringes und $S = a^2\pi$ den Querschnitt des Ringes.

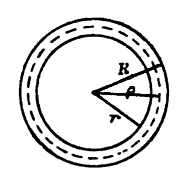


Fig. 4.

Eine zweite Bestimmung des Querschnittes wurde nach dem Vorgange von Rowland[1]) durch Wägung, also auf einem von diesem völlig unabhängigen Wege gemacht. Aus dem Gewichtsverlust des in Wasser getauchten Ringes ergab sich (unter Berücksichtigung der Correction für die Temperatur)

$$V_2 = 126{,}21 \text{ cm}^3,$$

woraus

$$S_2 = \frac{V}{2\pi\varrho} = 252{,}3 \text{ mm}^2 = 2{,}523 \text{ cm}^2.$$

Gleichzeitig ergab sich das specifische Gewicht zu 7,82. Die beiden Werthe von $V$ und $S$ weichen nur um 0,3 Proc. von einander ab. Die Mittelwerthe aus beiden Bestimmungen sind:

$$V = 126{,}03 \text{ cm}^3; \quad S = 2{,}519 \text{ cm}^2.$$

Nach der stattgehabten genauen Ausmessung der Dimensionen

1) Rowland, Phil. Mag. 48. p. 321. 1874.

wurde der Ring[1]) bewickelt in der unten zu berichtenden Weise. Um den für das spätere Ausfräsen des Schlitzes erforderlichen Raum freizuhalten, wurden an einer Stelle in einem mittleren Abstand von 8 mm zwei den Ringquerschnitt umschliessende Messingbacken von etwa 4 mm Dicke und 15 mm äusseren Radius aufgelöthet. Die Fig. 5 zeigt die Art der Auflöthung im Querschnitt, wobei *ll* die Löthstellen der beiden Halbringe einer Backe, Fig. 6 die Anordnung im Aequatorialschnitt, wobei der Abstand der beiden Backen $b_1$ und $b_2$ absichtlich zu gross gezeichnet ist. Ausserdem war diametral zu der Mitte des durch $b_1$ und $b_2$ abgesperrten Ringstückes eine dritte ebensolche Backe $b_3$ angebracht, welche es ermöglichte, die beiden Ringhälften getrennt zu bewickeln.

Fig. 5.

Der Ring erhielt drei primäre Windungslagen von 1,5 mm dickem doppeltseidebesponnenem Kupferdraht. Nach Vollendung einer Windungslage wurde auf dieselbe eine Mischung von Wachs und Kolophonium (etwa halb und halb) aufgetragen und mittels eines flachen heissen Eisenstücks so vertheilt, dass sich nach erfolgter Erkaltung der nächstfolgenden Windung wieder eine vollkommen glatte Ringfläche darbot. Hierdurch wurde das Einsinken der Windungen in die darunter befindliche Lage verhütet und eine möglichst grosse Constanz des Querschnittes jeder Lage gewährleistet. In dieser Weise wurden drei primäre Lagen übereinander gewickelt und über die dritte und oberste Lage ebenso eine secundäre Windungslage von $^1/_2$ mm dickem doppelt besponnenem Kupferdraht.

Fig. 6.

Die nachstehende Tabelle enthält die Windungszahlen ($N$), Radien ($a$) und Querschnitte ($S$) der drei primären Lagen, welche durch die Indices 1, 2, 3 der Reihe nach (von innen nach aussen) unterschieden sind:

| | | |
|---|---|---|
| $N_1 = 241$ | $N_2 = 227$ | $N_3 = 227$ |
| $a_1 = 9{,}9$ mm | $a_2 = 11{,}6$ mm | $a_3 = 13{,}2$ mm |
| $S_1 = a_1^2 \pi = 307{,}9\ \text{mm}^2$ | $S_2 = a_2^2 \pi = 422{,}7\ \text{mm}^2$ | $S_3 = 547{,}4\ \text{mm}^2$ |

1) Von mir unter Beihülfe des Hrn. O. Wolff, in dessen mechanischer Werkstatt der Ring hergestellt war.

$N_r = N_1 + N_2 + N_3 = 695$; $N = 613$, wo $N$ die Windungszahl der secundären Lage. Der zwischen $b_1$ und $b_2$ für das Anbringen des Schlitzes freigelassene Raum liess Platz für weitere drei Lagen von je drei Windungen; diese sind in den vorstehenden Zahlen $N_1$, $N_2$, $N_3$ mit einbegriffen, sodass $N_r = 695$ die gesammte Windungszahl der primären Wickelung bedeutet.

Die beiden Ringhälften waren mit je einem zusammenhängenden Stück primären Drahtes bewickelt, welche bei allen Versuchen hintereinandergeschaltet waren; dasselbe gilt von den beiden Hälften der secundären Spirale. Der Widerstand der primären Windung betrug in dieser Schaltung 0,51 Ohm, derjenige der secundären $R = 4,97$ Ohm.

## § 5. Messungsverfahren.

### a) Aichung des Galvanometers.

Wie oben (§ 3) erwähnt, wurde zur Auswerthung der Galvanometerausschläge in absolutem Maasse ein gerades Solenoid angewandt, dessen Dimensionen und Constanten l. c. angegeben sind. Die Anwendung des Solenoids hat vor der des Erdinductors den Vorzug, dass man von der erdmagnetischen Intensität, also auch von ihren Variationen unabhängig ist; sie beruht auf der absoluten Messung einer Stromstärke.

Bezeichnen wir mit $C$ den (in absoluten electromagnetischen Einheiten gemessenen) Strom, mit $H$ das durch denselben im Innern des Solenoids erzeugte magnetische Feld, mit $Q_s$ das Zeitintegral der electromotorischen Kraft, welche in einer den Querschnitt der Rolle umschliessenden Windung durch das plötzliche Entstehen oder Verschwinden des Stromes $C$ hervorgebracht wird oder, in der Sprache Faraday's, die Zahl der Kraftlinien, welche jene Windung durchsetzen, so erhalten wir unter Anwendung der in § 3 erläuterten Bezeichnungen und unter Voraussetzung eines gleichförmigen Feldes[1]) im Innern der Rolle

1) Die genannte Voraussetzung ist natürlich nur bei einem unendlich langen Solenoid streng erfüllt, lässt sich aber mit beliebiger Annäherung durch passende Wahl des Verhältnisses zwischen Länge und Querschnitt befriedigen. Der strenge Werth von $H$ für einen Punkt auf der Mitte der Axe eines Solenoids von der Länge $l$ und dem Radius $r$ (Wiedemann, Electr. 3. p. 208. 3. Aufl.) ist:

$$H = \frac{4\pi C N}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}}.$$

$$H = \frac{4\pi C N}{l}$$

$$Q_s = H \,.\, A = \frac{4\pi C N A}{l} = \frac{4\pi C \,.\, F}{l} \,.$$

Wir erhalten also:

$$Q_s = 4\pi C \,.\, 60,\ 64 = 762\, C,$$

oder, wenn wir die Stromstärke, statt in absoluten Einheiten, in Zehnteln, d. i. in Amp., messen:

$$Q_s = 76{,}2\, i,$$

wo $i$ die in Amp. gemessene Stromstärke bedeutet.

Ist $n$ die Zahl der secundären Windungen, $r$ der Widerstand der secundären Leitung einschliesslich des Galvanometers, so ist die in das Galvanometer bei Oeffnen und Schliessen des Stromes geschickte Strommenge:

$$Q_s \cdot \frac{n}{r} \,.$$

Sind nun die Ausschläge des Galvanometers, wie es die Theorie des ballistischen Galvanometers für kleine Ausschlagswinkel fordert, proportional der in einer gegen die Schwingungsdauer der Nadel sehr kurzen Zeit hineingeschickten Strommenge, so können wir setzen:

$$Q_s \frac{n}{r} = b \,.\, d_s\,,$$

wo $d_s$ der auf Bogen reducirte Scalenausschlag, welcher durch das Oeffnen oder Schliessen des Stromes im Solenoid hervorgerufen ist, $b$ ein Proportionalitätsfactor, den wir als den „ballistischen" Reductionsfactor des Galvanometers bezeichnen

---

Nun hatte in unserem Solenoid $\sqrt{r^2 + (l\,/\,2)^2}$ den Werth 487,3, wich also nicht um 0,1 Proc. von $l$ = 487,0 mm ab. Der Forderung der Endlosigkeit war also mit hinreichender Annäherung Genüge gethan. Da die Länge der secundären Rolle, welche die Mitte des Solenoides umschloss, 57 mm (gegen 487 mm der Länge der Rolle, also nur etwas über $^1/_9$) betrug, so waren die sämmtlichen secundären Windungen genügend von den Endflächen des Solenoids entfernt, um einen merklichen Einfluss derselben auszuschliessen. Uebrigens ergaben Controllversuche, dass kleine Verschiebungen der secundären Rolle nach den Enden zu keinen merklichen Einfluss auf den Ausschlag des Galvanometers hatten, wodurch eine experimentelle Bestätigung für die Gleichförmigkeit des Feldes im mittleren Theile des Solenoids geliefert wurde.

könnten und welcher die durch einen Ausschlag von einem Scalentheil (nach vorgenommener Reduction auf Bogen) gemessene Strommenge angibt.

Wird anstatt Oeffnens oder Schliessens der Strom commutirt, so wird der Ausschlag doppelt so gross, und statt $Q_s$ ist $2\,Q_s$ zu setzen, sodass bei Commutirung:

$$2\,Q_s \cdot \frac{n}{r} = b \,.\, d_s\,,$$

daraus:

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{d_s} Q_s \cdot \frac{n}{r} = \frac{1}{d_s} \cdot \frac{n}{r} \cdot 76{,}2\,i\,,$$

und da $n = 632$, $r = 36{,}44$ Ohm $= 36{,}44 \,.\, 10^9$ [cm sec$^{-1}$]

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{d_s} \cdot \frac{632 \,.\, 762}{36{,}44}\, i \,.\, 10^{-9} = 1321\, \frac{i}{d_s} \cdot 10^{-9}\,.$$

Es ergab sich im Verlaufe der Untersuchung, d. h. während mehr als der Dauer eines Jahres, stets:

$$b = 66{,}0 \,.\, 10^{-9} \pm 1 \text{ Proc.},$$

ein Beweis für die Constanz des Galvanometers.

### b) Berechnung der magnetischen Kraft ($\mathfrak{H}$) und der Magnetisirung ($\mathfrak{J}$).[1]

Wir wollen kurz die anzuwendenden Formeln auf Grund der von Kirchhoff[2]) gegebenen Theorie des gleichförmig magnetisirten Eisenringes ableiten.

Wir nehmen zunächst ein einziges Ringsolenoid an; für dieses als ein endloses Solenoid ist die magnetische Kraft:

$$\mathfrak{H} = \frac{4\,\pi\, C N}{l}\,;$$

$N/l$, die Windungszahl pro Längeneinheit, und demzufolge $\mathfrak{H}$ variirt von innen nach aussen (in Cylinderflächen, die coaxial der Rotationsaxe des Ringes sind), weil $l = 2\,\pi\,r$ und $r$ von $r_1$ bis $r_2$ variirt. Dadurch würde sich streng genommen für ein variables $r$ ergeben:

$$\mathfrak{H} = \frac{4\,\pi\, C N}{2\,\pi\, r} = \frac{2\, C N}{r}\,,$$

---

1) Eine übersichtliche Darstellung der verschiedenen Methoden zur Untersuchung magnetischer Körper findet man bei Ewing, Magn. ind. etc. Cap. II u. III.

2) Kirchhoff, Ges. Abhandl. p. 223.

und die Zahl der Kraftlinien, welche den ganzen Querschnitt des Ringes erfüllen (das Flächenintegral der magnetischen Kraft über den Querschnitt), wäre

$$= \int \mathfrak{H}\, dS = 2\, C N \int \frac{dS}{r} = 4\, C N \pi \left(\varrho - \sqrt{\varrho^2 - a^2}\right)\ ^{1)},$$

wo $a$ der Radius des Querschnittes und $\varrho$ der Abstand des

---

1) Drücken wir das Flächenelement $dS$ durch Polarcoordinaten $r'$ und $\vartheta$ aus (vgl. Fig. 7), so wird:

$$\int \frac{dS}{r} = 2 \int_0^\pi \int_0^a \frac{r' . dr' . d\vartheta}{\varrho + r' . \cos\vartheta} = 2 \int_0^a r' dr' \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\varrho + r' \cos\vartheta}\ ;$$

setzt man:

$$z = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\,,$$

so wird:

$$\int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\varrho + r' \cos\vartheta} = \int_0^\infty \frac{2\, dz}{(1 + z^2)\left[\varrho + r' \cdot \frac{1 - z^2}{1 + z^2}\right]}\,,$$

und nach einigen Umformungen:

$$= \frac{1}{\varrho + r'} \int_0^\infty \frac{2\, dz}{1 + \frac{\varrho - r'}{\varrho + r'}\, z^2}\,,$$

setzt man wiederum:

$$u = z \sqrt{\frac{\varrho - r'}{\varrho + r'}}\,,$$

Fig. 7.

so wird dies:

$$= \frac{1}{\varrho + r'} \int_0^\infty \frac{2\, du}{\sqrt{\frac{\varrho - r'}{\varrho + r'}}\,(1 + u^2)} = \frac{2}{\sqrt{\varrho + r'}\,\sqrt{\varrho - r'}} \Big[\operatorname{arctg} u\Big]_0^\infty$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\varrho^2 - r'^2}} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{\varrho^2 - r'^2}}\,.$$

Es folgt also:

$$\int \frac{dS}{r} = 2\pi \int_0^a \frac{r' . dr'}{\sqrt{\varrho^2 - r'^2}} = -\, 2\pi \Big[\sqrt{\varrho^2 - r'^2}\Big]_0^a = 2\pi \left[\varrho - \sqrt{\varrho^2 - a^2}\right]$$

wie oben angegeben; dieser Beweis ist bei Kirchhoff l. c. nicht geführt.

Querschnittcentrums von der Axe des Ringes. Dieser Ausdruck, durch den Querschnitt $a^2\pi$ dividirt, würde die mittlere Feldintensität ergeben. Entwickeln wir die Wurzel in einer binomischen Reihe, so folgt:

$$\sqrt{\varrho^2 - a^2} = \varrho\sqrt{1 - \left(\frac{a}{\varrho}\right)^2} = \varrho\left[1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 - \tfrac{1}{8}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^4 - \tfrac{1}{16}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^6 \dots\right],$$

sodass

$$\int \mathfrak{H}\, d\,S = 4\,\pi\, C N \varrho\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 + \tfrac{1}{8}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^4 \dots\right]$$

$$= 2\,\pi\, C N \varrho\left[\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^4 + \dots\right]$$

Nun war in unserem Falle der mittlere Werth von

$$\frac{a}{\varrho} = \frac{11,6}{79,6} = \text{ca. } \frac{1}{7};$$

also angenähert $(a/\varrho)^2 = \frac{1}{50}$ und $\frac{1}{4}(a/\varrho)^4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{50}\cdot\frac{1}{50}$, d. h. das zweite Glied $\frac{1}{4}(a/\varrho)^4$ ist nur $\frac{1}{200}$ des ersten $(a/\varrho)^2$. Wir machen also nur einen Fehler von ca. $1/2$ Proc., wenn wir das zweite Glied (und wegen der raschen Convergenz alle weiteren Glieder) fortlassen, sodass übrig bleibt:

$$\int \mathfrak{H}\, d\,S = 2\,\pi\, C N \varrho\left(\frac{a}{\varrho}\right)^2 = 2\,\pi\, C N \frac{a^2}{\varrho},$$

und als Mittelwerth der Feldintensität:

$$\frac{\int \mathfrak{H} . d\,S}{a^2\pi} = \frac{2\,C N}{\varrho}.$$

Dies ist aber der Werth von $\mathfrak{H}$ im Mittelpunkte des Querschnittes, weil hier $r = \varrho$.

Wir können also unbedenklich, indem wir diesen Werth an Stelle des Mittelwerthes von $\mathfrak{H}$ setzen, die Aenderung der magnetischen Kraft mit dem Radius vernachlässigen. Wenden wir dieses Ergebniss auf alle drei den Ring umschliessenden Solenoide an, so erhalten wir als resultirende magnetische Kraft die Summe der drei von jenen herrührenden:

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 + \mathfrak{H}_3 = \frac{2\,C N_1}{\varrho} + \frac{2\,C N_2}{\varrho} + \frac{2\,C N_3}{\varrho}$$

$$= \frac{2\,C}{\varrho}(N_1 + N_2 + N_3) = \frac{2\,C}{7,96}\cdot 695 = 174,6\,C,$$

oder, wenn wir den Strom, statt in absoluten Einheiten, in Amp. messen und die Zahl der Amp. mit $i$ bezeichnen:

$$\mathfrak{H} = 17,46\, i. \tag{1}$$

Ist der von dem Ringsolenoid umschlossene Raum ganz mit Eisen erfüllt, so wird dasselbe überall in Richtung der magnetischen Kraft, d. i. ist senkrecht zum axialen Querschnitt und gleichförmig innerhalb desselben magnetisirt. Wird nun der die primären Solenoidwindungen durchfliessende Strom plötzlich geöffnet oder geschlossen (oder auch verstärkt oder geschwächt), so wird in einer den ganzen Querschnitt umschliessenden secundären Windung eine electromotorische Kraft inducirt, deren Zeitintegral durch den Ausschlag eines in die secundäre Leitung eingeschlossenen Galvanometers gemessen werden kann. Dieses Zeitintegral ist gleich der Aenderung des Flächenintegrals der magnetischen Induction $\mathfrak{B}$ über den von der secundären Windung umschlossenen Querschnitt.

Bezeichnen wir, wie oben, mit $N$ die Windungszahl der secundären Ringwickelung, ferner mit $R$ den Widerstand der secundären Leitung (einschliesslich Galvanometer, Dämpfungsspirale und eventuell eingeschaltete Widerstände), mit $Q_r$ die gesammte durch die Stromänderung (resp. Oeffnen, Schliessen oder Commutiren) in den secundären Windungen erzeugte electromotorische Kraft, so geht durch das Galvanometer die Strommenge:

$$\frac{Q_r \cdot N}{R}.$$

Macht das Galvanometer infolge dieses Stromstosses einen Ausschlag von $\alpha$ Scalentheilen (auf Bogen reducirt), so haben wir mit Benutzung des durch die Aichung ermittelten „ballistischen“ Reductionsfactors für das Stromintegral den anderen Ausdruck:

$$b \cdot \alpha.$$

Es folgt:

$$Q_r \cdot \frac{N}{R} = b \cdot \alpha$$

$$Q_r = \frac{R}{N} \cdot b \cdot \alpha.$$

Angenommen nun, die secundären Windungen umschlössen unmittelbar den ringförmigen Eisenkern, so hätten wir, da wir nach dem Obigen die Magnetisirung als gleichförmig ansehen dürfen:

$$Q_r = \Delta \mathfrak{B} . S^{1)}$$

$$\Delta \mathfrak{B} = \frac{Q_r}{S} = \frac{\frac{R}{i N} \cdot b \alpha}{S},$$

wo $S$ den Querschnitt des Eisenringes und $\Delta \mathfrak{B}$ die Aenderung der magnetischen Induction bedeuten.

Umschliessen dagegen die secundären Windungen nicht unmittelbar den Eisenkern, sondern gleichzeitig mit diesem die primäre Wickelung, so trägt auch die Variation der ausserhalb des Eisens verlaufenden Kraftlinien, welche von jener herrühren, zu dem vom Galvanometer gemessenen Stromimpuls bei. Wir müssten daher diesen Theil, wenn wir die magnetische Induction im Eisen messen wollten, durch eine Correction ausschliessen. Wir ziehen es jedoch vor[2], anstatt der magnetischen *Induction*, die *Magnetisirung* zu bestimmen, d. i. das magnetische Moment pro Volumeneinheit, welche mit der Induction durch die bekannte Gleichung verbunden ist:

$$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4 \pi}.$$

Um diese zu finden, müssen wir nicht nur die ausserhalb des Eisens, sondern überhaupt alle vom magnetisirenden Strome herrührenden Kraftlinien von der gesammten durch das Galvanometer angezeigten Kraftlinienzabl in Abrechnung bringen, d. i. diejenige electromotorische Kraft, welche in einer die primäre Wickelung umschliessenden Windung durch Schliessen oder Oeffnen des Stromes entstehen würde, wenn der Innenraum völlig eisenfrei wäre; diese ist aber, unter der oben motivirten Näherungsannahme, dass das Feld jeder Windungslage gleichförmig ist, offenbar:

$$\mathfrak{H}_1 S_1 + \mathfrak{H}_2 S_2 + \mathfrak{H}_3 S_3 = \frac{2 C}{\varrho} (N_1 S_1 + N_2 S_2 + N_3 S_3)$$

$$= \frac{2 C}{7{,}96} (742 + 960 + 1242) = \frac{2 C . 2944}{7{,}96} = 739{,}7 \, C,$$

---

1) $$Q_r = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{B} . d S = \overline{\mathfrak{B} . S}_{t_0}^{t_1} = \Delta \mathfrak{B} . S.$$

2) Vgl. du Bois, Phil. Mag. (5) **29.** p. 303. 1890 am Schluss (§§ 16 und 17) und Verhandl. der physikal. Ges. Berlin vom 27. Juni 1890.

der, wenn wir statt in ooslabuten Einheiten den Strom in Zehnteln (in Amp.) messen:

$$= 73{,}97\, i.$$

Berücksichtigen wir gleichzeitig, dass, wie wir oben hergeleitet haben,

$$\mathfrak{H} = 17{,}46\, i \tag{1}$$

$$i = \frac{\mathfrak{H}}{17{,}46},$$

so folgt:

$$73{,}97\, i = \frac{73{,}97}{17{,}46}\,\mathfrak{H} = \mathbf{4{,}24\,\mathfrak{H}}.$$

Der nach diesem Abzug verbleibende Rest ist dann:

$$\mathfrak{B}\, S - \mathfrak{H}\, S = 4\pi\,\mathfrak{J}\,.\,S = Q_r - (\mathfrak{H}_1 S_1 + \mathfrak{H}_2 S_2 + \mathfrak{H}_3 S_3),$$

woraus:

$$\mathfrak{J} = \frac{Q_r - (\mathfrak{H}_1 S_1 + \mathfrak{H}_2 S_2 + \mathfrak{H}_3 S_3)}{4\pi S} = \frac{\frac{R}{N}\, b\,.\,\alpha - 4{,}24\,\mathfrak{H}}{31{,}65}. \tag{2}$$

Zu dieser Formel (2) ist zu bemerken, dass ihr die (im allgemeinen unrichtige) Voraussetzung zu Grunde liegt, dass durch Stromöffnung alle Inductionslinien verschwinden, oder durch Stromschluss erst alle der Magnetisirung entsprechenden Inductionslinien auftreten, d. h. dass keine remanente Magnetisirung im Eisen zurückbleibt oder vorhanden war. Dieser Einwand fällt weg, erstens, wenn wir ähnlich wie oben schreiben:

$$\Delta\mathfrak{J} = \frac{\frac{R}{N}\, b\,.\,\alpha - 4{,}24\,\Delta\mathfrak{H}}{31{,}65}, \tag{2a}$$

wo $\Delta\mathfrak{J}$ und $\Delta\mathfrak{H}$ die einer Stromänderung $\Delta i$ entsprechenden Aenderungen der Magnetisirung und der Feldintensität bedeuten. Diese Formel wäre also anzuwenden bei schrittweiser Magnetisirung durch Schwächung oder Verstärkung des Stromes.

Zweitens lässt sich der Einfluss des remanenten Magnetismus fast völlig eliminiren durch Anwendung der Commutirung des Stromes. Es ergibt sich dann einfach durch Halbirung des Ausschlags:

$$\mathfrak{J} = \frac{\frac{R}{N}\,\frac{b}{2}\,\alpha - 4{,}24\,\mathfrak{H}}{31{,}65}. \tag{2b}$$ [1]

---

1) Der Antheil der vom Strome herrührenden Kraftlinien an dem Ausschlage ist wegen der Commutirung natürlich $2\,.\,4{,}24\,\mathfrak{H}$, wird aber durch die Halbirung der gesammten Kraftlinienzahl wieder zu $4{,}24\,\mathfrak{H}$, weshalb die Correction ungeändert bleibt.

Eine auf diese Weise erhaltene Magnetisirungscurve (aufsteigende Commutirungscurve) wird zwischen den beiden Aesten der Hysteresisschleife verlaufen. Sie kann statt jener zum Studium des magnetischen Verhaltens benutzt werden für alle Fragen, bei denen es auf die Kenntniss der Retentionsfähigkeit und der Coercitivkraft, allgemein gesagt der Hysteresis, nicht ankommt.

c. Die Beobachtung.

Da infolge der Hysteresis das magnetische Verhalten des Eisens von seiner „magnetischen Vorgeschichte" abhängt, so war es von Wichtigkeit, bei Beginn jeder Messungsreihe von einem wohldefinirten, eindeutig bestimmten, magnetischen Zustande des Ringes auszugehen. Hierzu wurde ein von bedeutender Stärke (welche durch die grösste vorher angewandte Stärke bestimmt war) unter fortwährendem Commutiren allmählich bis auf Null absinkender Strom durch die primären Windungen des Ringes geschickt, zu dessen Schwächung der oben (§ 3) erwähnte Flüssigkeitsrheostat benutzt wurde, indem die dem Ring parallel geschaltete Flüssigkeitssäule (vgl. Fig. 8) fortdauernd bis zu annäherndem Verschwinden verkleinert wurde. Durch stufenweise Verkleinerung des angewandten Hauptstromes konnte diese Schwächung beliebig weit getrieben werden; der Eisenkern war somit in einem genau definirten unmagnetischen Zustande.

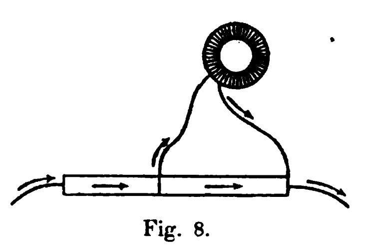


Fig. 8.

Bei der darauf folgenden Messung wurde stufenweise von schwächeren zu stärkeren Feldern übergegangen und eine Wiederholung der Reihe (oder etwa erwünschte Einschaltung eines Curvenpunktes) nie ohne vorherige Entmagnetisirung vorgenommen. Zur Herstellung einer Curve wurde eine erhebliche Anzahl Punkte (bei der ersten für den geschlossenen Ring: 25) bestimmt, deren jeder durch das Mittel aus zehn Beobachtungen gewonnen war. Nach dem fünften Ausschlage wurde der Commutator $c_g$, welcher die Stromrichtung im Galvanometer zu wechseln gestattete, umgelegt, um den Ein-

fluss etwaiger Fernwirkungen, welche ihren Sinn gleichzeitig mit dem Hauptstrom wechselten, zu eliminiren.

Da bis zu erheblichen Stromstärken (über 20 Amp.) gegangen wurde, so musste hierbei eine ausserordentliche Erhitzung der Ringwickelung und dadurch des Ringes eintreten, welche wegen der eigenthümlichen Gestalt und der dadurch bedingten geringen Oberfläche durch Ausstrahlung nicht erheblich vermindert werden konnte. Der Ring wurde deshalb für diese Fälle in ein mit reinem Petroleum gefülltes, kreisrundes Glasgefäss gestellt und durch hineingelegtes Eis gekühlt. Er war dabei durch drei Holzscheibchen so erhöht, dass er ganz von der Flüssigkeit umspült war; das durch Schmelzung am Boden angesammelte Wasser konnte durch einen Heber entfernt werden. Dieses einfache Verfahren erwies sich sehr brauchbar; das eingetauchte Thermometer zeigte stets zwischen 10° und 20°.

Auf diese Weise wurde zunächst sorgfältig die normale Magnetisirungscurve des geschlossenen Ringes bestimmt (vgl. Nr. I *g* der Taf. IV), welche das reine Bild des magnetischen Verhaltens der untersuchten Eisensorte gibt und die Grundlage der weiteren Untersuchungen bildet.

Ein Versuch, die Hysteresiscurve bestimmen, führte zu der Erfahrung, dass das Resultat von der Zahl der Schritte abhing, und zwar in der Weise, dass die Summe der Magnetisirungsänderungen, welche das $\mathfrak{J}$ für das höchste angewandte $\mathfrak{H}$ ergab, um so kleiner ausfiel, je grösser die Zahl der Schritte war, welche zu diesem $\mathfrak{H}$ führte. Diese Abweichung rührt, wie mir scheint, von der bei so dicken unzertheilten Gebilden aus weichem Eisen hauptsächlich infolge von Foucault'schen Strömen erheblichen magnetischen Verzögerung [1]) her. Infolge dieser ist die Zeit, welche der Ring zur Erreichung seines endgültigen Zustandes braucht, nicht mehr verschwindend im Vergleich zur Schwingungsdauer des Galvanometers. Dieser Fehler muss sich natürlich bei mehreren zu einer Magnetisirung erforderlichen Messungen durch Summirung vergrössern, während er ersichtlich bei der anderen Beobachtungsweise nur klein bleibt. Uebrigens ist er nur bei schwachen Feldern

1) Ewing, l. c. § 88.

von merklicher Grösse. Die Ermittelung von Hysteresiscurven wurde daher aufgegeben.

### § 6. Das Aufschlitzen des Ringes.

Nach der Bestimmung der Normalcurve für den geschlossenen Ring wurde letzterer in der Weise aufgeschlitzt, dass zunächst mit Hülfe einer Kreisfräse von 1 mm Dicke in dem dafür freigelassenen Raum (in der Mitte zwischen den Backen $b_1$ und $b_2$, Fig. 6) ein radialer Schlitz möglichst eben, parallel und scharfkantig ausgeführt wurde. Um jedoch auch bei kleineren Schlitzweiten als 1 mm messen zu können, wurde um den Ring ein Messingreif (Fig. 9) gelegt, welcher an einer Stelle offen war und daselbst durch eine Schraube verkleinert oder vergrössert werden konnte. Dieser wirkte auf den Ring ein mittels kleiner Holzstückchen, welche so geschnitten waren, dass sie sich auf der einen Seite der Oberfläche des Ringes, auf der anderen der Innenseite des Reifens genau anpassten. Durch Anziehen der kräftigen Schraube konnte dadurch ein gleichmässiger radialer Druck auf den ganzen Ring ausgeübt werden, unter welchem derselbe sich soweit zusammenschloss, als ein in den Schlitz geschobenes Messingscheibchen gestattete. Ein solches wurde zu jedem Schlitz zur genauen Fixirung seiner Stirnflächen in der erforderlichen Dicke geschnitten und zwar gleichfalls planparallel und mit einem Durchmesser gleich oder fast gleich dem des Ringquerschnittes.

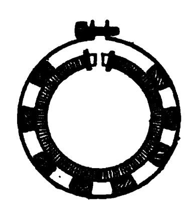


Fig. 9.

Bei Schlitzen weiter als 1 mm, welche mit Fräsen von resp. 2 mm und 3,5 mm Dicke ausgeschnitten wurden, wurde die Benutzung des schliessenden Reifens unnöthig gemacht dadurch, dass das Messingplättchen in solcher Dicke hergestellt wurde, dass es nur mit einigem Zwang in den Schlitz geschoben werden konnte, wodurch der Ring sich vermöge seiner eigenen Elasticität fest anlegte.

Nachdem der Zwischenraum mit einem feinen Pinsel sorgfältig von allen etwaigen Eisentheilchen gereinigt war, wurde das Messingplättchen eingeschoben und durch etwas geschmolzenen Wachskitt oder Schellack in seiner centrischen Lage

fixirt. Darauf wurden (ausser bei dem ersten, engsten Schlitz) um den glattgefeilten Rand des Scheibchens eine Anzahl Windungen sehr feinen besponnenen Kupferdrahtes (von 0,15 mm und 0,25 mm Durchmesser incl. Isolirung) unter Zuhülfenahme einer Lupe sorgfältig nebeneinander gewickelt, derart, dass sie eine kleine den Zwischenraum gerade ausfüllende Spule von dem Durchmesser des Ringquerschnittes bildeten, mit Hülfe deren der Inductionsfluss durch den Luftraum (vgl. unten) gemessen werden konnte. Nachdem die Windungen in dieser Lage durch geschmolzenen Wachskitt befestigt waren, wurden die Enden des feinen Drahtes, welche den Schlitz an genau correspondirenden Stellen verliessen, in der Art, wie es die Fig. 10 zeigt, weitergeführt, dicht anliegend erst an dem Eisen, dann wieder umgebogen und an den Messingbacken aufwärts geführt und gleichfalls durch Kitt befestigt. Hierauf wurde die ganze nunmehr continuirliche Fläche zwischen den Backen gleichmässig mit Band oder weichem Bindfaden umwickelt und darüber die neun Windungen der primären Spirale, welche den Raum ausfüllten, gewickelt. Indem auch hierbei durch kleine parallel angelegte Stücke dickeren Bindfadens die hinausführenden Enden des feinen Drahtes vor Berührung mit dem dicken Draht geschützt wurden, war das ganze System der kleinen Spule gegen Berührung und Verrückung sichergestellt. Die für die Messung nothwendige Verbindung mit der Leitung des Galvanometers wurde dann nach Aufstellung des Ringes durch Anlöthen an zwei Kupferstäbe hergestellt.

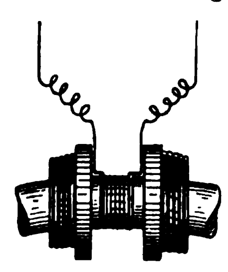


Fig. 10.

Die Messung der Schlitzweite wurde nach Vollendung der zugehörigen Messungsreihe mit der Theilmaschine ausgeführt, nachdem die Drahtwindungen entfernt, die Messingscheibe aber in dem Schlitz belassen war. Da die Kanten des Schnittes durch das Mikroskop unscharf und leicht gerundet erschienen, so wurde bei der Messung darauf geachtet, dass der Doppelfaden des Oculars nicht auf diese selbst, sondern auf das Verschwinden des Metallglanzes, welches durch eine ziemlich scharfe dunkle Linie erkennbar war, eingestellt wurde.

Auf diese Weise wurden für beide Seiten des Ringes aus je zehn Ablesungspaaren die Kantenabstände bestimmt, welche, zumal bei den kleinsten Schlitzten, Unterschiede von mehreren Procenten ergaben. Das arithmetische Mittel aus beiden ergab einen Werth, der durchweg etwas grösser war, als die direct (mit geaichtem Contactmikrometer) gemessene Dicke des Messingscheibchens. Es wurde daher wiederum das arithmetische Mittel aus der optischen und der directen Dickenmessung genommen und dieses als der mittlere Werth der Schlitzweite angesehen und in Rechnung gebracht.

## § 7. Theorie des geschlitzten Ringes.

Bevor wir zur Mittheilung der Messungsergebnisse übergehen, wird es sich empfehlen, die Resultate der von Hrn. du Bois [1]) gegebenen Theorie des geschlitzten Ringes in Kürze wiederzugeben, um dieselben dann auf die von uns untersuchten Fälle anwenden und mit den Ergebnissen der Beobachtung vergleichen zu können.

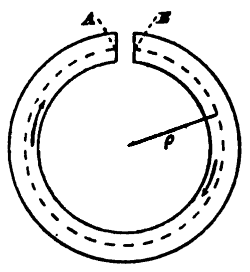


Fig. 11.

Jndem wir uns seiner Bezeichnungsweise anschliessen, unterscheiden wir durch die Indices *i* und *e*, ob die mit denselben ausgestatteten Vectoren ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{J}$) von dem (magnetisirten) Eisen oder von anderen Ursachen herrühren; die resultirende geometrische (bei verschwindendem Richtungsunterschied algebraische) Summe beider wird durch den Index *t* (total) gekennzeichnet. Ferner wird durch Accentuiren angedeutet, dass die betreffende Grösse im Innern des Eisens betrachtet wird.

Für einen radial aufgeschlitzten, durch ein gleichförmig peripherisches Feld magnetisirten Eisenring (Fig. 11) ist der „selbstinducirte" Antheil ${}_{A}^{E}T_i$ des magnetischen Potentialzuwachses über die Axe des Schlitzes (l. c. Gleichung (7) p. 494):

$$(1) \qquad {}_{A}^{E}T_i = \overline{N}\,\bar{\bar{\mathfrak{J}}}\,(2\,\pi\,\varrho - d)$$

wo *d* die Weite des Schlitzes bedeutet.

---

1) du Bois, Wied. Ann. **46.** p. 485. 1892. Vgl. auch: du Bois, Verh. d. phys. Ges. Berlin, 27. Juni. p. 81. 1890.

Wir können nun für ${}_A^E T_i$ einen zweiten Ausdruck bilden, indem wir in erster Annäherung die Magnetisirung über den ganzen Querschnitt constant und überall peripherisch gerichtet annehmen und uns daher beide Stirnflächen mit einer fictiven Belegung von der constanten Flächendichte $\pm \mathfrak{J}$ bedeckt denken. Die Ableitung dieses Ausdruckes sei hier eingeschaltet, da bei Hrn. du Bois nur das Resultat ohne Beweis gegeben wurde.

Die von einem Flächenelement eines so belegten Stirnfläche auf einen Punkt der im Mittelpunkte errichteten Normalen in Richtung derselben ausgeübte Componente der magnetischen Kraft ist (Fig. 12):

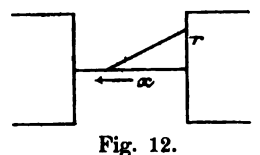


Fig. 12.

$$\frac{\mathfrak{J} \cdot r \cdot d\,r \cdot d\,\vartheta}{x^2 + r^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}},$$

wo $r$ und $\vartheta$ die Polarcoordinaten des Flächenelementes und $x$ den Abstand des Punktes der Normale vom Fusspunkte bedeutet.

Die Integration über $\vartheta$ und $r$ ergibt:

$$2\pi\mathfrak{J} \cdot x \int_0^a \frac{r\,d\,r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = -\,2\pi\mathfrak{J} \cdot x \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}}\right]_0^a$$

$$= 2\pi\mathfrak{J} \cdot x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = 2\pi\mathfrak{J}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right).$$

Dieser Ausdruck für die gesammte von der Stirnfläche herrührende Kraftcomponente, über den Abstand beider Stirnflächenmittelpunkte integrirt und mit zwei multiplicirt, gibt den Potentialzuwachs von $A$ bis $E$:

$${}_A^E T_i = 2 \cdot 2\pi\mathfrak{J} \int_0^d x\,d\,x \int_0^a \frac{r \cdot d\,r}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$= 4\pi\mathfrak{J}\left[\int_0^d d\,x - \int_0^d \frac{x \cdot d\,x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right]$$

$$= 4\pi\mathfrak{J}\left\{x\Big|_0^d - \sqrt{a^2 + x^2}\Big|_0^d\right\}$$

$$= 4\pi\mathfrak{J}\left\{d - \left[\sqrt{a^2 + d^2} - a\right]\right\}.$$

(2) $$\overset{E}{\underset{A}{}}T_i = 4\pi\mathfrak{J}[d + a - \sqrt{d^2 + a^2}]$$ [1]).

Aus (1) und (2) folgt (indem wir für den Radius des Querschnittes anstatt $a$ den Buchstaben $r$ setzen):

$$\bar{N} = \frac{4\pi\mathfrak{J}(d + r - \sqrt{d^2 + r^2})}{\bar{\mathfrak{J}}(2\pi\varrho - d)}$$

(3) $$\bar{N} = \frac{2(d + r - \sqrt{d^2 + r^2})}{\varrho - \frac{d}{2\pi}}$$

Die Voraussetzung normal gegen die Stirnflächen gerichteter Magnetisirung und constanter Flächendichte der Belagungen, unter der dieser Ausdruck abgeleitet ist, trifft in Wirklichkeit zu für ein unendliches Feld, also für den Sättigungswerth von $\mathfrak{J}$, in welchem Falle $\bar{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}$ wird; wir werden daher das durch die Gleichung (3) definirte $N$ durch $N_\infty$ bezeichnen.

Als zweite Annäherung gibt Hr. du Bois den Ausdruck (l. c. Gleichung (10) p. 495):

(4) $$\overset{E}{\underset{A}{}}T_i = 4\pi\bar{\mathfrak{J}}\,d\,.\,\mathfrak{n}\,,$$

wo die Zahl $\mathfrak{n}$ nur Function des Verhältnisses $d/r$ ist. Sie muss sehr nahe gleich sein dem reciproken Werthe des Hopkinson'schen Streuungscoefficienten $\nu$, wie sich durch folgende Betrachtung näher erläutern lässt.

Ist $S$ der Querschnitt des Ringes, $\mathfrak{G} = \int \mathfrak{B}\,.\,dS$ der Inductionsfluss durch denselben, so bedeutet nach der obigen Bezeichnungsweise $\mathfrak{G}_t$ den totalen Inductionsfluss durch den Schlitz, sodass:

---

1) In der angeführten Abhandlung des Hrn. du Bois p. 494 Gleichung (8) muss also das unrichtige Zwischenglied:

$$2\int_0^d \frac{x\,dx}{\sqrt{r_2^2 + x^2}}$$

ersetzt werden durch

$$2\,.\,2\pi\mathfrak{J}\int_0^d\int_0^r \frac{r_2\,dr_2\,x\,dx}{(r_2^2 + x^2)^{3/2}}\,.$$

Wie das Resultat, welches mit dem obigen genau übereinstimmt, beweist, liegt hier nur ein Abschreibfehler vor ($r_2$ entspricht der im Text mit $r$ bezeichneten Grösse).

$$\frac{\mathfrak{G}_t}{S} = \mathfrak{B}_{tm} = \mathfrak{H}_{tm},$$

(wobei durch den Index $m$ der Mittelwerth innerhalb des Querschnittes bezeichnet wird, während der Horizontalstrich den Mittelwerth längs einer Inductionslinie anzeigt), weil in Luft $\mathfrak{B}_t = \mathfrak{H}_t$; das nur vom Eisen herrührende $\mathfrak{H}$ ist:

$$\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}_t - \mathfrak{H}_e.$$

Nun ist

$${}_E^A T_i = \int_0^d \mathfrak{H}_{im}\, dL$$

(genommen über die Verbindungslinie der beiden Stirnflächencentren) oder mit Rücksicht auf die geringe Veränderlichkeit von $\mathfrak{H}_{im}$ innerhalb der Weite des Schlitzes:

$$\text{angenähert} = \mathfrak{H}_{im} \cdot d,$$

also nach Gleichung (4):

$$\mathfrak{H}_{im} \cdot d = {}_E^A T_i = 4\pi \bar{\mathfrak{J}}\, d \cdot \mathfrak{n},$$

woraus:

$$\mathfrak{n} = \frac{\mathfrak{H}_{im}}{4\pi \bar{\mathfrak{J}}}.$$

Den Hopkinson'schen Factor $\nu$ kann man aber definiren durch:

$$\nu = \frac{\bar{\mathfrak{G}}_t' \text{ (in Eisen)}}{\mathfrak{G}_t \text{ (in Luft)}} = \frac{\bar{\mathfrak{B}}_t'}{\mathfrak{B}_{tm}} = \frac{4\pi\bar{\mathfrak{J}} + \bar{\mathfrak{H}}_t'}{\mathfrak{H}_{tm}} = \frac{4\pi\bar{\mathfrak{J}} + \bar{\mathfrak{H}}_t'}{\mathfrak{H}_{im} + \mathfrak{H}_{em}}.$$

Nun verschwindet (wenigstens bei den anwendbaren, mässigen Feldern und bei mässigen Schlitzweiten)

$$\bar{\mathfrak{H}}_t' \text{ gegen } 4\pi\bar{\mathfrak{J}} \text{ (in Eisen)}$$

und

$$\mathfrak{H}_{em} \text{ gegen } \mathfrak{H}_{im} \text{ (in Luft)}^{1)},$$

daher:

$$\nu = \frac{4\pi\bar{\mathfrak{J}}}{\mathfrak{H}_{im}} = \frac{1}{\mathfrak{n}}, \qquad \mathfrak{n} = \frac{1}{\nu},$$

wie oben behauptet wurde.

---

1) Weil an der freien Stirnfläche:

$$\mathfrak{H}_{im} \text{ (Luft)} = \mathfrak{H}_{im}' \text{ (Eisen)} + 4\pi\mathfrak{J}.$$

$\mathfrak{H}_{im}$ steht nämlich wegen der Symmetrie um den Mittelpunkt der Stirnfläche senkrecht zu der letzteren.

Aus Gleichung (4) und (1) folgt weiter:

(5) $$\overline{N} = \frac{4\pi \overline{\mathfrak{J}} d . \mathfrak{n}}{\mathfrak{J}(2\pi\varrho - d)} = \frac{2 d \mathfrak{n}}{\varrho - \frac{d}{2\pi}}.$$

Bei unendlich engem Schlitz würde $\nu = 1$, weil $\mathfrak{G}_i' = \mathfrak{G}_i$, also auch $\mathfrak{n} = 1$ werden.

In diesem Falle geht (5) über in:

(6) $$\overline{N} = \frac{2d}{\varrho}.$$ [1]

In denselben Ausdruck geht der in Gleichung (3) gegebene Werth von $\overline{N}$ ($N_\infty$) über, wenn $d/r$ unbegrenzt abnimmt.

Von Wichtigkeit ist ferner für uns der aus den Grenzbedingungen für $\mathfrak{B}_i$ und $\mathfrak{H}_i$ leicht zu beweisende Satz von der „Brechung der Inductionslinien“:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \mu . \operatorname{tg} \alpha,$$

wo $\alpha'$ und $\alpha$ die Winkel bedeuten, welche eine Inductionslinie innerhalb resp. ausserhalb des Eisens mit der Normale zur Grenzfläche zwischen Eisen und Luft bildet, und $\mu$ die Permeabilität ($\mathfrak{B}_i' / \mathfrak{H}_i'$).

Endlich sei noch der von Kirchhoff[2]) bewiesene Satz erwähnt, dass *bei unendlich gross werdender äusserer magnetischer Kraft* ($\mathfrak{H}_e$ *resp.* $\mathfrak{H}_e' = \infty$) *die Richtung der Magnetisirung sich der Richtung der äusseren magnetischen Kraft überall unbegrenzt nähert.*

---

1) Die von Ewing l. c. § 157 gegebene Näherungsformel:

$$N = \frac{4\pi \partial l}{l}$$

ist mit der Gleichung (6) identisch, da $\partial l = d$; $l = 2\pi\varrho$, also

$$N = \frac{4\pi d}{2\pi\varrho} = \frac{2d}{\varrho}.$$

Eine hiermit bis auf unendlich geringe Differenzen übereinstimmende Formel hatte schon vorher Hr. du Bois (Verhandl. der physikal. Ges. Berlin vom 27. Juni 1890, p. 84) gegeben, nämlich:

$$N = \frac{4\pi\alpha}{360^0 - \nu},$$

wo

$$\frac{\alpha}{360^0} = \frac{\partial l}{l}.$$

2) Kirchhoff, Ges. Abh. p. 223 (am Schluss der Abh. p. 193.

## § 8. Beobachtungsmaterial und Resultate.

Die nachstehenden Tabellen enthalten die gesammten Messungsergebnisse.

### Tabelle I.

Aufsteigende Commutirungscurve bei *geschlossenem Ring* (*g*).

| $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{J}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,6 | 93,3 | 8,70 | 1020,0 | 55,1 | 1310,0 |
| 1,12 | 278,0 | 9,70 | 1051,0 | 76,5 | 1348,0 |
| 1,81 | 440,0 | 10,80 | 1076,0 | 104,5 | 1388,0 |
| 2,15 | 520,0 | 13,75 | 1118,0 | 151,0 | 1440,0 |
| 3,24 | 690,0 | 18,05 | 1165,0 | 200,0 | 1389,0 |
| 4,38 | 801,0 | 21,8 | 1192,0 | 240,0 | 1520,0 |
| 5,34 | 871,0 | 27,5 | 1225,0 | 315,0 | 1564,0 |
| 6,45 | 932,0 | 41,0 | 1275,0 | 385,0 | 1600,0 |
| 7,54 | 985,0 | | | | |

### Tabelle II.

Erste Schlitzcurve (1). *Schlitzweite: 0,40 mm.*

| $\mathfrak{H}_e$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{H}_e$ | $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{H}_e$ | $\mathfrak{J}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,01 | 51,8 | 8,06 | 636,0 | 25,1 | 1127,0 |
| 2,00 | 141,5 | 10,0 | 758,0 | 31,5 | 1181,0 |
| 2,96 | 235,0 | 13,2 | 897,5 | 50,9 | 1262,0 |
| 4,01 | 335,0 | 16,15 | 986,0 | 99,0 | 1363,0 |
| 5,05 | 424,0 | 21,3 | 1082,0 | 192,5 | 1462,0 |
| 6,52 | 536,0 | | | | |

### Tabelle III.

Zweite Schlitzcurve (2). *Schlitzweite 0,63 mm.*
Am Schlitz: 4 Windungen von 0,15 mm (incl. Isolirung) dickem Kupferdraht.

| $\mathfrak{H}_e$ | $\mathfrak{J}$ | $\bar{\mathfrak{G}}$ | $\mathfrak{G}_s$ | $\nu$ | $\frac{1}{\nu}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,00 | 44,6 | 1412 | — | — | — |
| 2,63 | 170,5 | 5405 | 3540 | 1,528 | 0,655 |
| 4,01 | 279,0 | 8843 | 5805 | 1,524 | 0,657 |
| 5,85 | 415,0 | 13140 | 8720 | 1,508 | 0,663 |
| 7,93 | 554,0 | 17540 | 11490 | 1,528 | 0,655 |
| 11,0 | 712,5 | 22590 | 15040 | 1,502 | 0,666 |
| 14,0 | 837,5 | 26580 | 17700 | 1,500 | 0,667 |
| 17,1 | 935,0 | 29620 | 19800 | 1,495 | 0,669 |
| 19,95 | 1020,0 | 32320 | 21790 | 1,484 | 0,674 |
| 26,6 | 1095,0 | 34710 | 23850 | 1,456 | 0,687 |
| 33,7 | 1162,0 | 36840 | 25600 | 1,437 | 0,696 |
| 45,4 | 1228,0 | 38970 | 27400 | 1,420 | 0,704 |
| 59,2 | 1270,0 | 40350 | 29000 | 1,390 | 0,720 |
| 71,6 | 1305,0 | 41340 | 29880 | 1,385 | 0,722 |
| 84,8 | 1316,0 | 41900 | 30650 | 1,368 | 0,732 |
| 164,0 | 1420,0 | 45420 | 34150 | 1,330 | 0,752 |
| 250,0 | 1493,0 | 47900 | 36400 | 1,316 | 0,760 |
| 337,0 | 1545,0 | 49620 | 38300 | 1,296 | 0,772 |

## Tabelle IV.

Dritte Schlitzcurve (3). *Schlitzweite 1,03 mm.*
Am Schlitz: 7 Windungen von 0,15 mm dickem Draht.

| $\mathfrak{H}_e$ | $\mathfrak{J}$ | $\bar{\mathfrak{B}}$ | $\mathfrak{B}_\delta$ | $\mathfrak{B}_s$ | $\frac{\bar{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{B}_s}=\nu$ | $\frac{\mathfrak{B}_\delta}{\mathfrak{B}_s}$ | $\frac{1}{\nu}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,62 | 69,3 | 2197 | 2390 | — | — | — | — |
| 2,44 | 117,3 | 3720 | 4035 | 2045 | 1,82 | 1,97 | 0,550 |
| 3,84 | 206,0 | 6520 | 7210 | 3660 | 1,78 | 1,97 | 0,561 |
| 5.06 | 279,0 | 8830 | 9760 | 4880 | 1,81 | 1,99 | 0,553 |
| 6,80 | 383,0 | 12120 | 13400 | 6720 | 1,81 | 1,99 | 0,553 |
| 8,88 | 492,0 | 15580 | 17100 | 8610 | 1,81 | 1,98 | 0,553 |
| 11,9 | 628,0 | 19910 | 21800 | 11230 | 1,78 | 1,94 | 0,563 |
| 14,9 | 748,0 | 23680 | 26030 | 13400 | 1,77 | 1,94 | 0,565 |
| 18.0 | 852,0 | 26970 | 29130 | 15250 | 1,77 | 1,91 | 0,565 |
| 20,9 | 923,0 | 29260 | 31700 | 16650 | 1,76 | 1,90 | 0,568 |
| 24,25 | 988,0 | 31300 | 33560 | 18000 | 1,74 | 1,86 | 0,575 |
| 27,2 | 1036,0 | 32850 | 34850 | 18900 | 1,74 | 1,84 | 0,575 |
| 36,9 | 1141,0 | 36190 | 37640 | 21400 | 1,69 | 1,76 | 0,591 |
| 49,0 | 1200,0 | 38120 | 39120 | 23200 | 1,645 | 1,68 | 0,608 |
| 64,5 | 1250,0 | 39800 | 40400 | 24750 | 1,61 | 1,63 | 0,621 |
| 78.5 | 1285,0 | 40870 | 41200 | 25800 | 1,585 | 1,60 | 0,631 |
| 99,5 | 1325,0 | 42230 | 42230 | 27030 | 1,56 | 1,56 | 0,641 |
| 181,0 | 1428,0 | 45600 | 45400 | 30550 | 1,495 | 1,49 | 0,670 |
| 267,0 | 1500,0 | 48120 | 47040 | 32800 | 1,47 | 1,43 | 0,681 |
| (300) | 1525,0 | 48900 | 48000 | 32500 | 1,50 | 1,48 | 0,667 |

| $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{B}_\delta$ | $\mathfrak{B}_{SO}$ | $\mathfrak{B}_O$ | $\mathfrak{B}_{NO}$ | $\mathfrak{B}_s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 492 | 17100 | 16650 | 15850 | 14400 | 8610 |
| 988 | 33560 | 32850 | 32100 | 29400 | 18000 |
| 1525 | 48000 | 48000 | 48000 | 48000 | 32500 |

## Tabelle V.

Vierte Schlitzcurve (4). *Schlitzweite 2,02 mm.*
Am Schlitz: 7 Windungen von 0,25 mm Dicke.

| $\mathfrak{H}_e$ | $\mathfrak{J}$ | $\bar{\mathfrak{B}}$ | $\mathfrak{B}_\delta$ | $\mathfrak{B}_s$ | $\frac{\bar{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{B}_s}=\nu$ | $\frac{\mathfrak{B}_\delta}{\mathfrak{B}_s}$ | $\frac{1}{\nu}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,50 | 92,2 | 2920 | 3310 | 1178 | 2,48 | 2,82 | 0,403 |
| 5,24 | 212,0 | 6720 | 7670 | 2650 | 2,54 | 2,90 | 0,394 |
| 8,38 | 348,0 | 11030 | 12600 | 4420 | 2,50 | 2,86 | 0,400 |
| 11,93 | 487,0 | 15400 | 17630 | 6230 | 2,47 | 2,84 | 0,405 |
| 17,1 | 675,0 | 21350 | 24500 | 8630 | 2,47 | 2,84 | 0,405 |
| 23,6 | 845,0 | 26760 | 30960 | 10940 | 2,44 | 2,83 | 0,410 |
| 31,9 | 997,0 | 31570 | 34750 | 13150 | 2,40 | 2,64 | 0,417 |
| 40,15 | 1080,0 | 34230 | 36730 | 14650 | 2,34 | 2,51 | 0,428 |
| 68,5 | 1220,0 | 38780 | 39750 | 17400 | 2,23 | 2,28 | 0,449 |
| 111,0 | 1320,0 | 41970 | 42000 | 20050 | 2,09 | 2,09 | 0,479 |
| 260,0 | 1520,0 | 48550 | 46250 | 24400 | 1,99 | 1,90 | 0,502 |

| $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{G}_\delta$ | $\mathfrak{G}_{SO}$ | $\mathfrak{G}_O$ | $\mathfrak{G}_{NO}$ | $\mathfrak{G}_s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 487 | 17630 | 17030 | 15950 | 13800 | 6230 |
| 997 | 34750 | 33550 | 32100 | 28700 | 13150 |
| 1520 | 46250 | 46000 | 46300 | 46100 | 24400 |

## Tabelle VI.

Fünfte Schlitzcurve (5). *Schlitzweite 3,57 mm.*
Am Schlitz: 14 Windungen von 0,25 mm Dicke.

| $\mathfrak{H}_e$ | $\mathfrak{J}$ | $\overline{\mathfrak{G}}$ | $\mathfrak{G}_\delta$ | $\mathfrak{G}_s$ | $\frac{\overline{\mathfrak{G}}}{\mathfrak{G}_s} = \nu$ | $\frac{\mathfrak{G}_\delta}{\mathfrak{G}_s}$ | $\frac{1}{\nu}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,01 | 131 | 4150 | 4880 | 1086 | 3,82 | 4,5 | 0,262 |
| 7,5 | 260 | 8220 | 9760 | 2140 | 3,84 | 4,6 | 0,260 |
| 11,0 | 384 | 12140 | 14400 | 3160 | 3,85 | 4,6 | 0,260 |
| 14,5 | 503 | 15900 | 18800 | 4160 | 3,82 | 4,53 | 0,262 |
| 19,0 | 634 | 20000 | 23500 | 5300 | 3,78 | 4,44 | 0,265 |
| 25,0 | 785 | 24850 | 29100 | 6600 | 3,77 | 4,41 | 0,266 |
| 32,0 | 923 | 29200 | 33650 | 7750 | 3,77 | 4,34 | 0,266 |
| 40,0 | 1015 | 32100 | 36200 | 8800 | 3,66 | 4,12 | 0,274 |
| 65,1 | 1170 | 37000 | 39700 | 10930 | 3,39 | 3,63 | 0,296 |
| 101,0 | 1265 | 40100 | 41700 | 12750 | 3,15 | 3,27 | 0,318 |
| 140,0 | 1335 | 42400 | 43450 | 14100 | 3,01 | 3,08 | 0,338 |
| 245,0 | 1455 | 46500 | 46350 | 16800 | 2,77 | 2,76 | 0,362 |

| $\mathfrak{J}$ | $\mathfrak{G}_\delta$ | $\mathfrak{G}_{SO}$ | $\mathfrak{G}_O$ | $\mathfrak{G}_{NO}$ | $\mathfrak{G}_s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 503 | 18800 | 17900 | 16200 | 13500 | 4160 |
| 1015 | 36200 | 34500 | 32700 | 28300 | 8800 |
| 1455 | 46350 | 46100 | (46600) | 45800 | 16800 |

Die Tabelle I enthält die Daten der Curve des geschlossenen Ringes, mit den bekannten Bezeichnungen $\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{H}_i = 0$; $\mathfrak{H}_e = \mathfrak{H}_i$) für die Stärke des durch den umkreisenden Strom erzeugten magnetischen Feldes, $\mathfrak{J}$ für die Magnetisirung, deren Messung in § 5 besprochen wurde.

Die folgenden fünf Tabellen enthalten die Daten der fünf Schlitzcurven, welche resp. zu den Schlitzweiten 0,40 mm, 0,63 mm, 1,03 mm, 2,02 mm und 3,57 mm gehören.

Da infolge der Unterbrechung der Continuität des Ringes eine selbstentmagnetisirende Kraft im Innern des Eisenringes auftritt, so müssen wir streng unterscheiden zwischen der durch den Strom erzeugten äusseren magnetischen Kraft $\mathfrak{H}_e$[1]),

1) Wir lassen der Einfachheit halber die durch die du Bois'sche Bezeichnungsweise für das Innere der magnetischen Substanz vorgeschriebenen Accente weg.

welche im Innern des Ringes herrschen würde, wenn derselbe etwa aus Holz wäre, und der thatsächlich im Innern herrschenden (totalen) Kraft $\mathfrak{H}_t$, welche die algebraische Summe von $\mathfrak{H}_e$ und der entmagnetisirenden Kraft $\mathfrak{H}_i$ ist: $\mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_e + \mathfrak{H}_i$, wobei $\mathfrak{H}_i$ dem $\mathfrak{H}_e$ entgegengesetzt gerichtet ist.

Das in den Tabellen angeführte $\mathfrak{H}$ ist die äussere Kraft $\mathfrak{H}_e$, welche nach der bei dem geschlossenen Ringe angewandten Methode gemessen ist. Die Auffindung des $\mathfrak{H}_i$, welches den eigentlichen Gegenstand unserer Untersuchung bildet, werden wir weiter unten in diesem Paragraphen erörtern.

Bei der Berechnung von $\mathfrak{J}$ aus der Formel (2b) des § 5b:

$$\mathfrak{J} = \frac{\frac{R}{N} \cdot \frac{b}{2}\,\alpha - 4{,}24\,\mathfrak{H}}{31{,}65}$$

ist zu beachten, dass das $\mathfrak{H}$ der Correction 4,24 $\mathfrak{H}$ das thatsächlich herrschende Feld $\mathfrak{H}_t$ ist, wobei wir die beiden nur annähernd richtigen Annahmen machen, dass

1. das Feld auch jetzt noch innerhalb des ganzen Querschnittes von der Gleichförmigkeit wenig abweiche, sodass die Zahl der den Eisenquerschnitt durchsetzenden Kraftlinien = 2,52 $\mathfrak{H}_t$ [1]), wenn $\mathfrak{H}_t$ der Werth von $\mathfrak{H}$ in der Mitte des Querschnittes wäre;

2. dass das Feld in dem vom Eisenringe nicht ausgefüllten Raume der primären Windungen durch die entmagnetisirende Kraft in demselben Verhältnisse geschwächt sei, wie das Feld im Innern des Eisenringes.

Zu der letzteren Annäherungsannahme berechtigt uns der Satz:

$$\mathfrak{H}_{t\tau} = \mathfrak{H}_{t\tau}',$$

welcher aussagt, dass die tangentiale Componente der totalen magnetischen Kraft bei dem Uebergange durch die Grenzfläche zwischen Eisen und Luft keinen Sprung erleidet und welcher hier Anwendung findet, weil (wie durch besondere unten zu besprechende Messungen gezeigt wird) die Richtung der Kraftlinien ausser in nächster Nähe des Schlitzes überall peripherisch bleibt.

Uebrigens überschreitet, wie die Tabellen zeigen, die

---

1) 2,52 $cm^2$ ist der Querschnitt des Eisenringes.

Correction 4,24 $\mathfrak{H}_t$ nur bei den stärksten Feldern den Werth von 1 Proc. der gesammten Kraftlinienzahl, sodass Annäherungen der obigen Art vollkommen genügen.

Der Werth von $\mathfrak{H}_t$ wird leicht aus der Curve des geschlossenen Ringes gewonnen, indem zunächst durch Weglassung der Correction ein angenäherter Werth von $\mathfrak{J}$ aus der Formel (2b) berechnet und das zu diesem gehörige $\mathfrak{H}_t$ aufgesucht wird. Ergibt dann der corrigirte Werth von $\mathfrak{J}$ etwa eine zu grosse Abweichung von dem vorher angenommenen, so kann man zu diesem wieder ein richtigeres $\mathfrak{H}_t$ aufsuchen und danach die Correction ausführen etc., wodurch man eine beliebige Annäherung an das richtige $\mathfrak{H}_t$ erzielen könnte, worauf es aber aus dem eben angeführten Grunde gar nicht ankommt.

Da infolge der Durchschneidung der Inductionsfluss von Querschnitt zu Querschnitt variirt, die secundären Windungen aber die ganze Oberfläche des Ringsolenoids gleichmässig bedecken, so ist das so bestimmte $\mathfrak{J}$ der Mittelwerth aller bei einem bestimmten $\mathfrak{H}_t$ über sämmtliche Ringquerschnitte vertheilten Magnetisirungen.

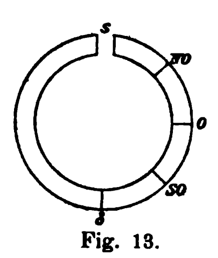


Fig. 13.

$\overline{\mathfrak{G}} = \int \mathfrak{B}_t \, . \, d\,S$ bedeutet den mittleren Inductionsfluss durch den ganzen Querschnitt (wobei wir unter Inductionsfluss die Gesammtheit der durch einen Querschnitt des Eisens gehenden Inductionslinien verstehen), welchen wir aus der vom Galvanometer angezeigten mittleren Kraftlinienzahl erhalten, indem wir die ausserhalb des Eisens verlaufenden 4,24 $\mathfrak{H}_t$ − 2,52 $\mathfrak{H}_t$ = 1,72 $\mathfrak{H}_t$ abziehen, eine Correction, über welche in Bezug auf die nur angenäherte Richtigkeit das obengesagte gilt.

Die weiteren in den Tabellen vorkommenden Grössen sind alle von ähnlicher Art wie die letztgenannte, resp. aus solchen gebildet. Sie geben die Inductionsflüsse durch verschiedene Querschnitte des Ringes an, welche nach der Durchschneidung ja nicht mehr gleiche Werthe aufweisen.

Zur leichteren Uebersicht haben wir für die drei verschiedenen Zwischenlagen zwischen dem Schlitz ($s$) der diametral gegenüberliegenden Stelle des Ringes ($\delta$) die Bezeich-

nungen der Windrose, wie es das Schema der Fig. 13 erläutert, gewählt, wodurch die Bedeutung der Grössen $\mathfrak{G}_s$, $\mathfrak{G}_\delta$, $\mathfrak{G}_{SO}$, $\mathfrak{G}_O$, $\mathfrak{G}_{NO}$ ohne weiteres verständlich ist.

Gemessen wurden dieselben wie folgt:

$\mathfrak{G}_s$ durch die § 6 eingehend beschriebene feine Spule, deren Windungsfläche jedesmal dem Querschnitt des Eisenringes genau gleich gemacht war; die Zahl ihrer Windungen ist für jeden Schlitz bei den Tabellen vermerkt;

$\mathfrak{G}_\delta$ mit Hülfe einer an der diametralen Stelle $\delta$ über einen den Ring umschliessenden Carton gewickelten schmalen Spule von sieben Windungen $^1/_2$ mm dicken Kupferdrahtes, wobei zur Reduction auf den Eisenquerschnitt die Correction $- 1{,}72\,\mathfrak{H}_t$ angebracht wurde;

$\mathfrak{G}_{SO}$, $\mathfrak{G}_O$, $\mathfrak{G}_{NO}$ mit Hülfe einer ganz ähnlichen, aber beweglichen Spule von sechs Windungen; diese drei Grössen, deren Bestimmung dazu dienen sollte, um eine Urtheil über den Verlauf der Kraftlinienstreuung längs des Ringumfanges und deren Aenderung mit wachsender Magnetisirung zu geben, wurden nur bei drei Werthen von $\mathfrak{J}$, nämlich annähernd bei 500, 1000, 1500 c. g. s. gemessen und in den angehängten kleineren Tabellen zusammengestellt. Zur Reduction auf den Querschnitt diente gleihfalls die Correction $- 1{,}72\,\mathfrak{H}_t$.

Es ist ferner:

$\bar{\mathfrak{G}} / \mathfrak{G}_s = \nu$ das Verhältniss des mittleren Inductionsflusses zu dem am Schlitz (und, weil auf gleiche Querschnitte bezogen, auch dasjenige der beiden entsprechenden Mittelwerthe der Induction $\mathfrak{B}_i$), welches nach Hopkinson[1]) als Streuungscoefficient bezeichnet werden muss.

Hinzugefügt sind noch die Werthe für $1 / \nu$, welches, wie wir im vorigen Paragraph sahen, sehr nahe gleich der Function $\mathfrak{n}$ ist, und die Werthe für $\mathfrak{G}_\delta / \mathfrak{G}_s$.[2])

Die Werthe der $\mathfrak{H}_e$ und $\mathfrak{J}$ sind in den Curven Nr. I der Taf. IV

1) J. u. E. Hopkinson, Phil. Trans. 177. p. 331. 1886.

2) Auffallend in den Tabellen ist der Umstand, dass bei den höchsten Magnetisirungen der Werth von $\bar{\mathfrak{G}}$ denjenigen von $\mathfrak{G}_\delta$ übersteigt. Dies rührt ohne Zweifel daher, dass der Ring, der bei den hier erforderlichen starken Strömen stark gekühlt werden musste, anfänglich vor Beginn der Messungsreihe eine ziemlich niedrige Temperatur an-

graphisch auf der rechten Seite der Ordinaten ($\mathfrak{J}$)-Axe aufgetragen, für den geschlossenen Ring und für die fünf Schlitze, und sind zur Unterscheidung bezeichnet durch:

$g$, (1), (2), (3), (4), (5),

zugehörig zu den Schlitzweiten:

0 . 0,40 . 0,63 . 1,03 . 2,02 . 3,57 mm.

Für die Abscisse $\mathfrak{H}_e$ sind drei Maassstäbe angewandt, und zwar ist der anfänglich von $\mathfrak{J} = 0$ bis $\mathfrak{J} = 1000$ angewandte, von da bis $\mathfrak{J} = 1300$ fünffach und von hier aufwärts zwanzigfach verkleinert. Dies ist geschehen einerseits wegen der grossen Ausdehnung, welche die oberen flacheren Theile der Curven unter Beibehaltung des Maassstabes für die unteren steileren Theile hätten einnehmen müssen, andererseits, weil hierdurch alle Theile der Curven eine passende Neigung erhalten, welche den allmählich wachsenden Einfluss der Schlitze am besten erkennen lässt.

Diese graphische Darstellung aller charakteristischen Grössen in übersichtlicher Weise setzt uns nun in den Stand, auf sehr einfache Weise die entmagnetisirende Kraft zu finden. Die Curve ($g$) des geschlossenen Ringes gibt uns das wahre Bild der Abhängigkeit der Magnetisirung, welche an irgend einem Punkte stattfindet, von der an demselben Punkte wirkenden magnetischen Kraft. Diese Abhängigkeit ist allein bedingt durch die Natur des Materials, aus welchem der Ring besteht, und hat mit seiner äusseren Form nichts zu thun. Wir können daher umgekehrt aus dieser Curve zu jeder Magnetisirung die wirkliche magnetische Kraft entnehmen, welche diese Magnetisirung hervorgebracht haben muss.

Wenden wir diese Erkenntniss auf die Schlitzcurven an, so erhalten wir auch für diese aus der Curve ($g$) für jede

genommen hatte, welche bei der Bestimmung des immer zuerst gemessenen $\overline{\mathfrak{G}}$ wohl noch nicht genügend durch die Erhitzung compensirt war. In der Nähe des Sättigungszustandes wächst nämlich die Magnetisirung mit abnehmender Temperatur. Dass jenem Umstande kein principielles Gewicht beizumessen ist, derselbe vielmehr nur Folge von Beobachtungsfehlern sein kann, sieht man aus den entsprechenden Werthen der angehängten Tabelle, welche alle unterhalb des Werthes von $\overline{\mathfrak{G}}$ bleiben. Auch bei diesen ist offenbar der Einfluss desselben Beobachtungsfehlers in kleineren, unregelmässigen Schwankungen erkennbar.

Magnetisirung den Werth der wahren magnetischen Kraft $\mathfrak{H}_t$, indem wir die zu der gleichen Ordinate $\mathfrak{J}$ gehörige Abscisse der Curve ($g$) aufsuchen, d. h. indem wir durch den fraglichen Curvenpunkt eine Parallele zur Abscissenaxe ziehen. Die Abscisse des Schnittpunktes dieser Parallele mit der Curve ($g$) ist das gesuchte $\mathfrak{H}_t$; die Differenz beider Abscissen ist daher:

$$\mathfrak{H}_e - \mathfrak{H}_t = - \mathfrak{H}_i$$ [1])

(da $\mathfrak{H}_t = \mathfrak{H}_e + \mathfrak{H}_i$), das ist derjenige Theil der äusseren magnetischen Kraft, welcher nöthig war, um die durch den Schlitz hervorgebrachte selbstentmagnetisirende Kraft $\mathfrak{H}_i$ zu compensiren, und ist also dieser letzteren entgegengesetzt gleich.

Tragen wir alle durch eine derartige graphische Subtraction[2]) sich ergebenden Werthe von $\mathfrak{H}_i$ zur Linken der Ordinatenaxe als Function der zugehörigen Magnetisirungen auf, so erhalten wir eine Anzahl von Curven, welche den Schlitzcurven zur Rechten entsprechen und deshalb in der Tafel durch die entsprechenden Bezeichnungen (1), (2), (3), (4), (5) unterschieden sind.

Dabei ist jedoch zu bemerken, dass dieses Verfahren jenseits $\mathfrak{J} = 1000$ rasch seine Brauchbarkeit verliert, weil infolge der von da ab bei allen Curven einschliesslich ($g$) eintretenden mehr oder weniger starken Umbiegung die Abscissendifferenzen klein werden gegen die Abscissen von ($g$), wodurch etwaige kleine Fehler in der Bestimmung der Abscissen für die relativ kleine Differenz zu procentisch sehr grossen Fehlern werden. Indessen ist, wie wir unten sehen werden, die Kenntniss der Entmagnetisirungcurven (wie wir die Curven links der Kürze halber nennen wollen) oberhalb jenes Werthes von $\mathfrak{J}$ wenig von Belang.

Das so (in Tabellen und Curven) zusammengestellte Beobachtungsmaterial liefert uns ausser dem Verlauf der Magnetisirungscurven folgende Hauptergebnisse. Aus den Tabellen:

1. *Die Streuung*, welche durch den Coefficienten $\nu = \mathfrak{G} / \mathfrak{G}_s$ gemessen wird, nimmt zu mit wachsender Schlitzweite und *nimmt mit wachsender Magnetisirung schliesslich ab.*

1) Wir lassen hier wieder der Einfachheit halber die Accente weg.

2) Dieses Verfahren ist im wesentlichen analog dem bei Ellipsoiden angewandten Rayleigh-Ewing'schen Scheerungsverfahren.

2. Ueber den *Verlauf der Kraftlinien* erfahren wir aus den angehängten Tabellen, dass auch bei schwachen Magnetisirungen — wo die Streuung am grössten ist — der Inductionsfluss durch den Ringquerschnitt erst in einer Entfernung von ca. $^1/_8$ der Ringperipherie beiderseits vom Schlitz ($\mathfrak{G}_{NO}$) merklich abzunehmen beginnt, dass also *die Divergenz der Kraftlinien wesentlich auf die Nachbarschaft des Schlitzes beschränkt ist*, während der Verlauf in den übrigen Theilen des Ringes merklich peripherisch bleibt. Der Divergenzbereich wird mit wachsender Magnetisirung eingeengt.

Dasselbe Ergebniss liefert der Vergleich des mittleren Inductionsflusses $\mathfrak{G}$ mit dem diametralen $\mathfrak{G}_\delta$, welcher einen geringen, mit wachsender Magnetisirung schwindenden Unterschied beider Grössen ergibt.

3. Die Streuung ist (bei gleichbleibender Schlitzweite) bis etwa $\mathfrak{J} = 850$[1]) nahe constant; von da ab erleidet sie mit zunehmender Magnetisirung eine beschleunigte Abnahme.

Betrachten wir 1700—1750[2]) als den Sättigungswerth von $\mathfrak{J}$, so können wir sagen: *Die Streuung ist etwa bis zur Hälfte des Sättigungswerthes von $\mathfrak{J}$ merklich constant.*

Gehen wir zu den Curven über, so lehrt uns die Betrachtung der linksseitigen Curven (vgl. Nr. I der Taf. IV):

4. *Die Entmagnetisirungscurven weichen bis etwa $\mathfrak{J} = 850$, d. i. ungefähr bis zur halben Sättigung nicht merklich von geraden Linien ab.*

Drücken wir die Abhängigkeit der selbstentmagnetisirenden Kraft $\mathfrak{H}_i$ von der Magnetisirung $\mathfrak{J}$ aus durch die Gleichung:

$$\mathfrak{H}_i = N . \mathfrak{J}$$

und nennen $N$ den Entmagnetisirungsfactor, so können wir den obigen Satz ausdrücken: *Zu jeder Schlitzweite gehört ein ungefähr bis zur halben Sättigung nahe constanter Entmagnetisirungsfactor.*

1) Als Mitte des Bereiches zwischen 750 und 950, in welchen der Beginn einer merklichen Abnahme fällt.

2) Ewing, l. c. § 98 und § 105.

### § 9. Vergleich der Resultate mit der Theorie.

Wir wollen zuerst zeigen, dass die Abnahme der Streuung mit wachsender Magnetisirung eine nothwendige Folge der beiden am Schlusse von § 7 erwähnten Sätze ist.[1])

Dass bei unendlich werdender magnetischer Kraft die Magnetisirung $\mathfrak{J}$ mit der äusseren magnetischen Kraft $\mathfrak{H}_e$ gleichgerichtet, also in unserem Falle peripherisch gerichtet wird, folgt direct aus dem Kirchhoff'schen Satz. Für $\mathfrak{H}_e = \infty$, d. i. für den Sättigungswerth von $\mathfrak{J}$, findet also keine Streuung statt, der Coefficient $\nu = \overline{\mathfrak{G}} / \mathfrak{G}_e$ wird dann gleich 1.

Die allmähliche Annäherung an diesen idealen Grenzfall bedingt aber nothwendig eine allmähliche Abnahme der Divergenz der Kraftlinien innerhalb des Eisens, d. h. der Winkel, welchen dieselben an der Oberfläche des Ringes mit der inneren Normale an dieser Stelle bilden, muss sich mehr und mehr einem Rechten nähern. Aus dem oben erwähnten Satze:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\mu} \operatorname{tg} \alpha',$$

wo $\alpha'$ und $\alpha$ resp. den inneren und äusseren Normalenwinkel der Kraftlinien bedeuten, folgt aber, dass bei grosser Permeabilität $\mu$, wie sie bekanntlich dem anfänglichen Theil der Magnetisirungscurve entspricht, die Brechung der Kraftlinien derart stattfindet, dass beim Austritt aus dem Eisen die Divergenz derselben plötzlich bedeutend wächst. Während nun die Magnetisirung weiter wächt, nimmt $\mu$ rasch ab, indem es gegen 1 convergirt. Die Zunahme der Divergenz beim Austritt aus dem Eisen wird also mit wachsender Magnetisirung in ähnlichem Verhältniss abnehmen, die Brechung der Kraftlinien kleiner und kleiner werden.

Kommt nach dem Obigen hinzu, dass mit wachsendem Felde die Kraftlinien innerhalb des Eisens von der tangentialen

---

1) *Anm. bei der Corr.* Die folgenden Ausführungen werden meines Erachtens durch die kürzlich veröffentlichten Bemerkungen des Hrn. Culmann (Wied. Ann. 48. p. 380. 1893) in keiner Weise entkräftet; überhaupt scheint mir im ganzen und grossen jener Notiz weniger der Charakter einer Krtik, als der eines Commentars zur Arbeit des Hrn. du Bois innezuwohnen.

Richtung immer weniger abweichen, so ist klar, dass diese beiden Umstände eine rasche Abnahme der Streuung mit wachsender Magnetisirung bewirken müssen.

Des weiteren diene zum Vergleich der Theorie mit den Versuchsergebnissen die nachfolgende Tabelle (VII).

Tabelle VII.

| Bez. | $d$ | $\frac{d}{r}$ | $\nu$ | $\mathfrak{n}$ | berechnet $N_\infty$ | berechnet $\bar{N}$ | $\bar{N}$ (beob.) | Differenz |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | 0,40 | 0,045 | 1,31 [1] | 0,765 | 0,0098 | 0,0077 | 0,0079 | + 2,5 % |
| (2) | 0,63 | 0,070 | 1,52 | 0,660 | 0,0151 | 0,01045 | 0,0102 | − 2,5 % |
| (3) | 1,03 | 0,115 | 1,79 | 0,558 | 0,0242 | 0,01445 | 0,0140 | − 3 % |
| (4) | 2,02 | 0,226 | 2,48 | 0,403 | 0,0451 | 0,0205 | 0,0203 | − 1 % |
| (5) | 3,57 | 0,400 | 3,81 | 0,262 | 0,0726 | 0,0236 | 0,0246 | + 4 % |

Es bedeuten darin:

$d$ die Schlitzweite, gewonnen in der § 6 beschriebenen Weise als Mittel aus der directen und der optischen Dickenmessung;

$d/r$ das Verhältniss der Schlitzweite zum Radius des Querschnittes;

$N_\infty$ die durch die Formel (3) des § 7 definirte Grösse:

$$N = \frac{2(d + r - \sqrt{d^2 + r^2})}{\varrho - \frac{d}{2\pi}},$$

welche, wie oben erwähnt, für $\mathfrak{H} = \infty$ strenge Gültigkeit hat;

$\nu$ den Streuungscoefficienten, gewonnen als Mittel aus den bis zum halben Sättigungswerth von $\mathfrak{J}$ beobachteten nahe constanten Werthen von $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_s$;

$\mathfrak{n}$ den reciproken Werth des Streuungscoefficienten (vgl. § 7);

$\bar{N}$ (ber.) die durch die Formel (5) des § 7 definirte Grösse:

$$\bar{N} = \frac{2d.\mathfrak{n}}{\varrho - \frac{d}{2\pi}};$$

$\bar{N}$ (beob.) den aus dem geradlinigen Theile der Entmagnetisirungscurven (von $\mathfrak{J} = 0$ bis zur angenähert halben Sättigung) graphisch entnommenen Werth des Entmagnetisirungsfactors $\mathfrak{H}_i/\mathfrak{J}$.

Endlich:

Diff. die Differenz $\overline{N}$ (beob.) — $\overline{N}$ (ber.) in Procenten.

Von diesen Grössen sind berechnet aus der Theorie $N_\infty$ und $\overline{N}$ (ber.), die übrigen aus der messenden Beobachtung hervorgegangen. Die Tabelle VII enthält in jeder Zeile die einer bestimmten Schlitzweite zugehörigen Werthe dieser Grössen, jede Zeile ist gekennzeichnet durch die vorangestellte Nummer, welche der entsprechenden Curve Nr. I der Taf. IV entnommen ist.

Der erste der fünf Werthe für $\nu$ ist durch Interpolation gewonnen (was durch das Zeichen (*i*) angedeutet ist), und zwar auf folgende Weise:

In Nr. II der Taf. IV sind die sämmtlichen beobachteten Werthe[1]) des $\nu$ aufgetragen als Function von $\mathfrak{J}$, sodass sie für jeden der vier Schlitze, bei welchem die Streuungen gemessen sind, je einen Curvenzug bilden. Der Beginn derselben ist, wie man sieht, geradlinig und parallel der Abscissenaxe und zwar bis etwa $\mathfrak{J} = 850$ (halbe Sättigung). Die Curven sind dann über die beobachteten Werthe hinaus verlängert bis zu dem theoretisch geforderten gemeinsamen Convergenzpunkt $\nu = 1$ für den Sättigungswerth von $\mathfrak{J}$, für welchen $\mathfrak{J} = 1750$ c. g. s. als höchster beobachteter Werth angenommen ist.[2])

Wenn wir nun, wie es gleichfalls in Nr. II der Taf. IV geschehen ist, eine zweite Scala für die Werthe der Quotienten $d/r$ auf der Abscissenaxe anbringen, und über dieser die Werthe von $\nu$, wie sie die Reihen (2), (3), (4), (5) der obigen Tabelle angeben, als Function von $d/r$ auftragen, so erhalten wir vier, oder, wenn wir berücksichtigen, dass für verschwindendes $d/r$ (also für $d = 0$, d. i. für den geschlossenen Ring) $\nu = 1$ werden muss, *fünf Punkte, welche augenscheinlich auf einer geraden Linie liegen.*

Diese gerade Linie liefert uns für den Zusammenhang der Grössen $\nu$ und $d/r$ die rein empirische *Interpolationsformel*:

1) Wegen der oben (§ 8 Anm.) besprochenen Ungenauigkeit sind die den höchsten Magnetisirungen zugehörigen Werthe von $\nu$ nicht mit in die Tafel eingetragen.

2) Dieser Werth ist von Hrn. du Bois bei Anwendung der magnetooptischen Methode (Kerr'sches Phänomen) beobachtet worden (vgl. Ewing, l. c. § 105).

$$\nu = 1 + 7 \frac{d}{r} \qquad \left(\text{bis } \frac{d}{r} = \text{ca.} \tfrac{1}{2}\right).$$

Durch diese geradlinige Interpolation ist schliesslich der Werth $\nu$ der Reihe (1) (Punkt (1), Nr. II der Taf. IV) ermittelt.

Der in der Tab. VII angestellte Vergleich der Beobachtungs- und Rechnungsgrössen zeigt, dass die Abweichungen zwischen $N$ (beob.) und $\overline{N}$ (ber.) sich auf wenige Procente beschränken und zwar in positivem wie negativem Sinne. Zur Vergleichung der Grenzwerthe des Entmagnetisirungsfactors $N_\infty$ mit den Beobachtungen sind die zu (1), (2), (3) gehörigen Werthe von $N_\infty$ durch in Nr. I der Taf. IV links oberhalb $\mathfrak{J} = 1000$ eingetragene gerade Linien dargestellt, welche durch die beigesetzten Nummern gekennzeichnet sind. Dabei ist zu beachten, dass die Annäherung einer Entmagnetisirungscurve an die entsprechende gerade Linie keine asymptotische sein muss, weil die Curve mit $\mathfrak{J}$ = ca. 1750 abbricht. Bei diesem Werthe muss vielmehr ein gemeinsamer Schnittpunkt beider Linien liegen. Eine schätzungsweise Verlängerung der Entmagnetisirungscurven über $\mathfrak{J} = 1000$ hinaus lässt nun in der That eine Annäherung dieser Art zweifellos erkennen.

Wir sehen darin eine *Bestätigung der Theorie* und dürfen damit eine Hauptfrage unserer Untersuchung als in bejahendem Sinne beantwortet betrachten.

Die experimentelle Bestätigung der Theorie des Hrn. du Bois für den vorliegenden Speciallfall bildet rückschliessend eine Stütze für die Annahmen, auf welchen dieselbe aufgebaut ist.

Dies gilt insbesondere von der Behauptung, dass der echte Bruch $\mathfrak{n}$, also auch der ihm reciproke Streuungscoefficient $\nu$ nur Function des Verhältnisses $d/r$, aber *unabhängig von dem Radius des Ringes* sei, welche in der Theorie dadurch ausgesprochen ist, dass der Ausdruck für den Potentialzuwachs im Schlitz (Gleichung (4) § 7):

$$_{A}^{E}T_i = 4\pi \overline{\mathfrak{J}} \cdot d \cdot \mathfrak{n}$$

von zwei halb unendlichen Cylindern hergeleitet wird, welche den Querschnitt des Ringes haben und sich in einem Abstande gleich der Weite des Schlitzes gegenüber stehen. Das so hergeleitete $\mathfrak{n}$ hat, wie wir gezeigt haben, die Bedeutung

$$\frac{\mathfrak{H}_{im}}{4\pi\bar{\mathfrak{J}}} = \frac{1}{\nu},$$

worin $\bar{\mathfrak{J}}$ den Mittelwerth aller Magnetisirungen längs einer Inductionslinie, also innerhalb des ganzen Ringumfanges, bezeichnet.

Nun hat aber der Versuch gezeigt, dass $\mathfrak{J}$ *ausser in nächster Nähe des Schlitzes* einen merklich constanten Werth über alle Querschnitte hat. Eine Vergrösserung oder Verkleinerung des Ringumfanges bei gleichbleibender mittlerer Magnetisirung $\bar{\mathfrak{J}}$ würde daher — unter der allen unseren Betrachtungen zu Grunde liegenden Voraussetzung, dass der Radius des Ringes gross sei gegen den des Querschnittes — keinen merklichen Einfluss auf den Werth von $\mathfrak{J}$ am Schlitz haben. Da aber der Werth von $\mathfrak{H}_{im}$ nur von dem Magnetisirungszustande in nächster Nähe des Schlitzes abhängt, so folgt, dass die entfernteren Theile des Ringes ohne merklichen Einfluss auf den Bereich des Schlitzes sind, dass also die Beobachtung im Einklange mit der Theorie ergibt:

*„Die Streuung ist unabhängig vom Radius des Ringes und ist nur Function der relativen Schlitzweite"* (so bezeichnen wir das Verhältniss $d/r$).

Dass der Streuungscoefficient auch von $\bar{\mathfrak{J}}$, bis zur halben Sättigung, unabhängig ist, haben wir oben gesehen; der zweite Theil des vorstehenden Satzes gilt daher unter der gleichen Beschränkung.

Die so bestätigte Theorie gibt ferner die Mittel an die Hand, unter Benutzung der von uns ermittelten empirischen Beziehung des Streuungscoefficienten zu den Dimensionen des Schlitzes, *den Entmagnetisirungsfactor für das System des unvollständig geschlossenen Ringes aus rein geometrischen Daten zu bestimmen,* wie folgt:

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{1 + 7\dfrac{d}{r}}$$

$$\bar{N} = \frac{2d\mathfrak{n}}{\varrho - \dfrac{d}{2\pi}} = \frac{2d}{\left(\varrho - \dfrac{d}{2\pi}\right)\left(1 + 7\dfrac{d}{r}\right)}.$$

### § 10. Schluss.

Wir fassen die *Hauptergebnisse* der vorliegenden Arbeit zusammen in folgenden Sätzen, gültig für einen unvollständig geschlossenen ferromagnetischen Ring, dessen Radius gross ist gegen den Radius des Querschnittes:

1. Der Entmagnetisirungsfactor, das ist derjenige Factor, welcher mit der mittleren Magnetisirung multiplicirt die mittlere selbstentmagnetisirende Kraft gibt, ist constant bis ungefähr zur halben Sättigung.

2. Der Streuungscoefficient, das Verhältniss der mitttleren Induction zu derjenigen im Schlitz, ist constant bis zur halben Sättigung.

3. Der Bereich der Kraftlinienstreuung ist wesentlich auf die Nachbarschaft des Schlitzes beschränkt und wird mit wachsender Magnetisirung eingeengt.

4. Der Streuungscoefficient ist unabhängig vom Radius des Ringes; er hängt dagegen im Bereiche seiner Constanz (Satz 2) nur ab von der relativen Schlitzweite $(d/r)$. Der empirische Ausdruck dieser Abhängigkeit ist ein linearer von der Form:

$$1 + h \cdot \frac{d}{r}$$

wo $h$ eine Constante ist, welche für das untersuchte schwedische Eisen den Werth 7 hat und vermuthlich für andere ferromagnetische Metalle hiervon nur wenig abweichende Werthe ergeben würde. Namentlich dürfte dies für die in der Technik angewandten Eisensorten zutreffen.

5. Der Entmagnetisirungsfactor ist bei Kenntniss der empirischen Constante $h$ aus den geometrischen Dimensionen des Systems zu berechnen nach der Formel:

$$\overline{N} = \frac{2\,d}{\left(\varrho - \dfrac{d}{2\pi}\right)\left(1 + h \cdot \dfrac{d}{r}\right)},$$

wo $\varrho$ der Radius des Ringes, $r$ derjenige des Querschnittes und $d$ die Schlitzweite. Diese Formel gilt unter der gleichen Beschränkung wie 1., 2. und 4., nämlich bis zur halben Sättigung.

Allgemein gilt:

$$\overline{N} = \frac{2\,d}{\left(\varrho - \frac{d}{2\,\pi}\right)} \cdot \frac{1}{\nu},$$

wo $\nu$ der Streuungscoefficient.

6. Für sehr hohe Magnetisirungen nähert sich der Entmagnetisirungsfactor dem Grenzwerthe:

$$N_{\infty} = 2\,\frac{(d + r - \sqrt{d^2 + r^2})}{\varrho - \frac{d}{2\,\pi}}.$$

Die vorstehenden Resultate dürften auch bei complicirter gestalteten unvollkommenen magnetischen Kreisen eine angenäherte Anwendung finden.

Zum Schluss sei es mir gestattet, an dieser Stelle Hrn. Prof. Kundt für die Anregung zu dieser Arbeit, und Hrn. Dr. du Bois für die zahlreichen Rathschläge, mit welchen derselbe mich bei deren Ausführung unterstützte, meinen herzlichsten Dank zu sagen.

Berlin, Physik. Institut d. Univ., Januar 1893.

# III. *Ueber den Einfluss der Temperatur auf die ferromagnetische Circularpolarisation; von Emil Hirsch.*[1]

(Mitgetheilt aus dem physikal. Institut der Universität Berlin.)

(Hierzu Taf. V Fig. 18—18.)

## § 1. Einleitung.

Hr. Kundt wies schon, als er die Circularpolarisation für Eisen als Function der magnetisirenden Intensität bestimmt hatte, auf die Wichtigkeit hin, auch die Beziehung zwischen der Drehung und der Magnetisirung der Schichten kennen zu lernen.[2]

Dieser Frage wandte sich dann Hr. du Bois[3] zu und gelangte zu der Gleichung

$$\varepsilon = \Psi(\mathfrak{J}\,.\,d),$$

worin $\varepsilon$ die Drehung der Polarisationsebene, $(\mathfrak{J}\,.\,d)$ die Zunahme des „Magnetisirungspotentials" von einer Seite der Schicht zur anderen bezeichnet; für den Proportionalitätsfactor $\Psi$ wurde später[4] der Name „Kundt'sche Constante" vorgeschlagen, der seitdem auch von anderen Autoren adoptirt worden ist.

Die temporäre Magnetisirung von Eisen, Kobalt und Nickel wird bekanntlich im allgemeinen durch Temperaturänderungen beeinflusst, und bei höheren Temperaturen, die für die drei Metalle sehr verschieden sind, schwindet sie fast vollständig. Es ist nun von Interesse zu ermitteln, welchen Einfluss die Temperatur auf die Circularpolarisation in den drei ferromagnetischen Metallen ausübt. Die Versuche, die ich zur Lösung dieser Frage im hiesigen physikalischen Institut angestellt habe, bilden den Gegenstand vorliegender Arbeit.

---

1) Nach des Verf. Inauguraldissertation (Berlin 1893) für die Annalen bearbeitet.

2) Kundt, Wied. Ann. **23.** p. 228. 1884; **27.** p. 197. 1886.

3) du Bois, Wied. Ann. **31.** p. 941. 1887.

4) du Bois, Wied. Ann. **39.** p. 40. 1890.

Bevor ich indessen zur Darstellung meiner Versuche übergehe, ist es mir Bedürfniss, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geheimrath Kundt, der die Anregung zu dieser Arbeit gegeben, für das derselben gütigst gewidmete Interesse meinen ehrerbietigsten Dank abzustatten. Auch bin ich den Hrn. Arons und du Bois, die mich durch werthvolle Rathschlage in liebenswürdigster Weise unterstützt haben, zu grossem Danke verpflichtet.

### § 2. Versuchsanordnung.

Die durchsichtigen Metallschichten wurden in der gewohnten Weise[1]) hergestellt. Auf ca. 2 mm dicke, nicht doppelbrechende Glasplatten wurde eine durchsichtige Platinschicht eingebrannt. Auf diese platinirten Gläser wurden dann die Metallschichten galvanoplastisch niedergeschlagen. Zur Bestimmung der Circularpolarisation wurde ein Lippich'scher Halbschattenapparat verwandt. Der Winkel zwischen den beiden Hauptschnitten wurde gewöhnlich auf 15° eingestellt. Als Lichtquelle diente ein Zirkonbrenner, dessen Strahlen vor dem Eintritt in den optischen Apparat eine Linse und ein rothes Glas durchsetzten. Das magnetische Feld lieferte ein grosser verticaler Electromagnet. Die spitzen Polstücke waren in ca. 4 mm lichter Weite durchbohrt. Durch einen Strom von 33 Amp. aus dem städtischen Leitungsnetz konnte zwischen denselben, wenn sie einander auf 4 mm genähert waren, noch ein Feld von 22 000 C. G. S. erzeugt werden. Da ich jedoch durch die im Folgenden beschriebene Heizvorrichtung gezwungen war, mit den Polen weiter auseinander zu gehen, erreichte ich nicht ganz 9000 C. G. S.-Einheiten. Ueber den ganzen Electromagnet wurde ein grosses, seitlich offenes Holzgestell aufgebaut, sodass nur oben die Polstücke freilagen. Der Lippich'sche Apparat sowie der Analysator waren direct an dasselbe angeschraubt.

Die Heizvorrichtung hatte folgenden Bedingungen zu genügen. Vor allem musste sie eine gleichmässige Erwärmung der Schichten ermöglichen. Dann musste sie gestatten, nacheinander eine Stelle des Platinglases, welche mit der Metall-

---

1) Vgl. Kundt, Wied. Ann. **23**. p. 231. 1884.

schicht bedeckt war, und eine solche, welche beim galvanoplastischen Niederschlag nicht mit Metall überzogen war, in das Gesichtsfeld zu bringen. Sie musste ferner so construirt sein, dass die Metallschichten in horizontaler wie in verticaler Richtung beliebig justirt werden konnten. · Endlich musste erreicht werden, dass während eines Versuches immer wieder dieselbe Stelle der Metallschichten in das Gesichtsfeld gelangten, da die Schichten an verschiedenen Stellen verschiedene Dicke aufweisen konnten.

Mit Rücksicht darauf wurde folgender Apparat construirt. Ein hart gelötheter Messingkasten (Fig. 13a) von 0,2 cm Wandstärke, 21 cm Länge, 4,7 cm Höhe und 1,6 cm Breite trug in der Mitte der Längswände vorn und hinten zwei Oeffnungen von ca. 2 cm Durchmesser, die durch aufschraubbare Deckgläser verschlossen werden konnten. Die eine der Seitenwände *a* war nicht mit dem Kasten fest verbunden; sie wurde nur durch eine Schraube *c*, die in ein massives Ansatzstück von *a* hineinfasste, am übrigen Theil des Apparates festgehalten. Diese Seitenwand *a* sowie die ihr gegenüberliegende *b* waren in ca. 0,2 cm Höhe vom Boden des Apparates durchbohrt und liessen durch die entstandenen Oeffnungen eine cylindrische Messingstange *m* von 0,5 cm Durchmesser und 42 cm Länge frei hindurchgehen. Diese Messingstange trug den wesentlichsten Theil des Apparates (Fig. 13b). In der Mitte derselben war eine Messingplatte *l* von 0,2 cm Dicke. 3,7 cm Höhe und 4,4 cm Länge hart gelöthet. An dieser Platte *l*, die in 0,7 cm Höhe von der Stange einen rechteckigen Ausschnitt *o* zeigte, wurden die zu untersuchenden, mit Metallschichten belegten Glasplatten durch zwei Federn *n* aus Neusilber festgehalten. Letztere durften nur leicht auf die Gläser drücken, da sonst Doppelbrechung in denselben aufgetreten wäre.

Um ein Schwanken des beschriebenen Schlittens nach hinten zu verhüten, trug die Platte *l* oben einen Ansatz *r* von der Breite des nach der Hinterwand noch freien Zwischenraumes. Eine Bewegung der Platte nach vorn war dadurch ausgeschlossen, dass die in der Mitte ausgebuchteten Federn *n* die Vorderwand bereits streiften.

Die Einführung der mit den Metallschichten belegten

Glasstücke in den Apparat geschah in folgender Weise. Zuerst wurden die Gläser vorsichtig unter die Federn geschoben, sodass der Ausschnitt von *l* theilweise durch die Metallschicht, theilweise durch eine vom Niederschlag freie Stelle des Platinglases bedeckt wurde. Dann wurde die Seitenwand *a* vom Kasten gelöst, die Verschiebungsvorrichtung so weit hineingeschoben, dass die Messingstange *m* aus der Durchbohrung der gegenüberliegenden Wand *b* herausragte, darauf *a* über das andere Ende von *m* geschoben und der Kasten geschlossen. Dass bei einer Versuchsreihe die Drehung immer genau an derselben Stelle der Metallschicht bestimmt werden konnte, wurde durch zwei Anschläge bewirkt, die auf der Messingstange *m* verschoben und mit Schrauben auf ihr befestigt werden konnten. Mittels dieser Anschläge wurde nacheinander Metallschicht und Platinglas in den Strahlengang gebracht. Die Beobachtung der Drehung in den den Kasten schliessenden Deckgläsern wurde vor und nach jeder Versuchsreihe für eine bestimmte Temperatur vorgenommen.

Zur Heizung dienten zwei Bunsenbrenner, die zu beiden Seiten der Polstücke am Gestell des Electromagneten befestigt waren. Die Temperatur wurde zunächst mit zwei Thermometern bestimmt, die von oben durch Röhrenansätze in den Heizkasten hineinragten; deren Quecksilbergefässe befanden sich also zu beiden Seiten der Metallschichten. Vor jeder Beobachtungsreihe wurde gewartet, bis die Thermometer eine halbe Stunde lang keine merklichen Temperaturschwankungen gezeigt hatten. Bei den Versuchen mit Eisen und Kobalt, bei denen es, wie sich zeigen wird, nur auf eine angenäherte Kenntniss der Temperatur ankam, genügte die thermometrische Bestimmung. Bei den meisten Beobachtungen am Nickel hingegen wurden genaue Temperaturwerthe auf thermoelectrischem Wege ermittelt, und zwar in folgender Weise.

Benutzt wurde eine Eisen-Neusilberkette; sie zeigte innerhalb des von mir benutzten Bereichs von 100° bis 350° vollkommene Proportionalität zwischen Temperaturdifferenz ihrer Löthstellen und Galvanometerausschlag. Auch bei wiederholten Kalibrirungen, die einer jeden Beobachtung vorausgingen, traten keine Abweichungen hervor. Zur Kalibrirung wurden

sieben Geissler'sche Stickstoffthermometer — jedes für ein Bereich von etwa 50° gültig — benutzt, die in der physikalisch-technischen Reichsanstalt geaicht waren. Ihre Theilung erlaubte noch Fünftelgrade abzulesen.

Um sicher zu sein, dass die Löthstelle wirklich die Temperatur der Metallschicht annahm, musste man erstere direct an letztere anlegen. Die Kette wurde daher in der durch Fig. 14a und 14b dargestellten Weise in den Heizapparat eingeführt. Fig. 14a zeigt zunächst den Kasten mit eingeführter Thermokette im Längsdurchschnitt. *A* ist ein Aufsatz auf dem Kasten, der durch ein Korkstück dicht geschlossen wurde. Durch dieses gingen, durch Glasröhren isolirt, die Drähte, die zu der einen Löthstelle der Thermokette führten, hindurch. Der Zwischenraum, der oben an der Vorderseite der Platte *l* zwischen dieser und der Vorderwand des Kastens sich befand, genügte reichlich, die 0,7 mm starken Zuleitungsdrähte der Thermokette hindurchzuführen. Die Art, wie die Löthstelle auf dem Spiegel auflag, veranschaulicht Fig. 14b im Querschnitt. *l* ist wieder die Messingplatte, *m* die Glasplatte mit der Metallschicht und *t* die Thermokette. Diese war hinter ihrer Eintrittsstelle in den Apparat etwas ausgebogen, sodass sie nur mit der Löthstelle *L* (Fig. 2a) auf der Metallschicht etwas unterhalb der von dem Lichtbündel durchstrahlten Stelle fest auflag. Die Galvanometerbeobachtungen wurden bei nicht erregtem Electromagneten vor und nach den einzelnen magnetooptischen Beobachtungsreihen vorgenommen.

Die Temperatur im beschriebenen Apparate durfte die niedrigste „Anlauftemperatur" des benutzten Metalls offenbar nicht überschreiten. Nach Vorversuchen hatte sich jene (bei kurzer Erhitzung) für Eisen zu 220°, für Kobalt zu 280° ergeben. Beim Nickel beobachtete ich bei der höchsten angewandten Temperatur von ca. 340° C. noch keine Oxydation. Um auch die Versuche für Eisen und Kobalt über die angegebenen Grenzen hinaus ausdehnen zu können, musste die Erwärmung in Wasserstoff ausgeführt werden. Es wurde zuerst versucht, dies in der bereits beschriebenen Heizvorrichtung auszuführen; es zeigte sich jedoch bald, dass dies unmöglich war. Die Undichtigkeiten an der aufgeschraubten Seitenwand wie an den Durchbohrungen für den Schlitten liessen sich trotz aller

Sorgfalt nicht völlig beseitigen, und die Metallschichten oxydirten sich infolgedessen beim Erhitzen.

Nach vielen vergeblichen Versuchen einen Weg zu finden, auf dem man eine Oxydation vermeiden könnte, gelang dies endlich mit folgendem Apparate, der äusserlich nicht viel von dem früher benutzten abwich. Fig. 15 zeigt zunächst das Gesammtbild desselben. Wesentliche Aenderungen weist nur der Schlitten auf. Die mittlere Messingplatte *l* hatte eine Stärke von 0,6 cm, eine Länge von 4,4 cm und eine Höhe von 3,3 cm. In der Mitte zeigte sie einen rechteckigen Ausschnitt von 1 cm Höhe und 3 cm Breite. Auf der Hinterseite dieses Ausschnittes lag eine planparallele, nicht doppelt brechende, 0,1 cm starke Glasplatte, durch zwei Neusilberstreifen leicht an die Messingplatte gedrückt. Auf der Vorderseite waren in gleicher Weise durch zwei Neusilberfedern die Versuchsobjecte befestigt, wobei die Metallschicht der Innenseite des kleinen so entstehenden Hohlraumes zugekehrt war. Durch den letzteren wurde durch zwei Messingröhren *m*, die gleichzeitig als Verschiebungsstangen dienten, das Gas geleitet. Die Röhren hatten je eine Länge von 21 cm, einen lichten Durchmesser von 0,3 cm und waren luftdicht in die Seitenwände der Platte *l* eingeschraubt. Dieser Apparat mag im Folgenden zur Unterscheidung von Apparat I — dem vorher beschriebenen — Apparat II genannt werden.

Zur Bestimmung der Feldintensität wurden direct die Platingläser benutzt, die vorher mit einer geaichten Etalonglasplatte verglichen waren. Die Aichung der letzteren geschah in der gewohnten Weise. Es wurde in demselben Felde die Drehung in Wasser für Natriumlicht und die Drehung in einer etwa 1 cm starken Flintglasplatte für das bei den Versuchen benutzte rothe Licht bestimmt. Ich fand auf diese Weise, dass ein Grad einfacher Drehung des rothen Lichtes im Flintglase einem Felde von rund 1100 C.G.S.-Einheiten entsprach. Mittels dieses Factors sind die im Folgenden angegebenen Werthe der Feldintensität berechnet. Die Platingläser wie die Deckgläser des Apparates waren bei den Vorversuchen auch während des Heizens und nach dem Erkalten auf Doppelbrechung untersucht worden. Es hatte sich dabei gezeigt, dass bei vorsichtigem Erwärmen und langsamem Erkalten der Eintritt einer Doppelbrechung ganz zu vermeiden war.

### § 3. Beobachtungen und Resultate.

Die Circularpolarisation wächst bekanntlich in Eisen, Kobalt und Nickel nicht proportional der Intensität des magnetischen Feldes, sondern sie strebt einem Maximum zu, welches streng genommen erst bei unendlicher Feldintensität erreicht wird, von dem aber schon in viel schwächeren Feldern die Drehung sich für unsere Zwecke nicht mehr merklich unterscheidet. Diese Verhältnisse lassen sich am besten durch eine graphische Darstellung der Beziehung zwischen Feldintensität und Magnetisirung, wie sie in § 4 angegeben ist, veranschaulichen. Im Anschlusse daran wurde daher bei den Versuchen unterschieden zwischen Beobachtungen in Feldbereichen, bei denen das betreffende Metall seine Maximalmagnetisirung genügend nahe erreicht hat (Bereich B) und solchen, bei denen es sich noch bedeutend unterhalb dieses Maximums befindet (Bereich A, vgl. Fig. 17). Die Versuche im Bereiche des angenäherten Drehungsmaximums konnten sich nur auf Nickel erstrecken, da, wie oben angedeutet, bei der gewählten Anordnung Felder über 9000 C. G. S. nicht zu Gebote standen und man sich der Maximaldrehung für Eisen und Kobalt erst bei höheren Werthen derselben nähern kann.

#### A. Eisen, Kobalt und Nickel im Feldbereiche A.

Untersucht wurden sechs Eisen-, sechs Kobalt- und zwei Nickelschichten. Die Versuche für die Eisen- und Kobaltschichten I—IV wurden in dem Apparate I in Luft ausgeführt, die für die Schichten V und VI im Apparate II in einer Wasserstoffatmosphäre. Für die beiden Nickelschichten, die im Apparate I untersucht wurden, wurde die thermoelectrische Temperaturbestimmung benutzt. Bei Eisen und Kobalt wurde die höchste erzielbare Feldintensität (ca. 8400 C. G. S.) gewählt; bei Nickel Felder von 4500 und 3700 C. G. S.

Unter Drehung ist im Folgenden immer die Doppeldrehung (bei Commutiren des Stromes) verstanden. Für jede Ablesung wurden zehn Einstellungen gemacht, aus denen dann der Mittelwerth genommen wurde, sodass für jeden in den Tabellen gegebenen Werth 20 Einstellungen nöthig waren. Die Ein-

stellungen variirten untereinander; doch betrugen die Abweichungen höchstens 5′. Die Einstellungen für die Platingläser und Deckgläser waren ungleich genauer; sie variirten im allgemeinen nur um 2′. In den Tabellen sind in Spalte 1 die Temperaturen angegeben; 2. gibt die Drehung in Metallschicht, Platinglas und Deckgläsern zusammen; 3. diejenige in Deckgläsern und Platinglas; 4. in den Deckgläsern allein. In der 5. Spalte sind die durch die Subtraction von 2 und 3 gefundenen Werthe der Drehung in der Metallschicht allein verzeichnet, während die 6. Spalte die in gleicher Weise aus der Differenz von 3 und 4 erhaltenen Drehungen im Platinglas allein gibt. In den Tab. 1 und 2 für die Eisen- und Kobaltschichten V und VI addiren sich zu den Drehungswerthen für die Platingläser noch diejenigen der hinteren Verschlussglasplatte.

In Tab. 3 (die beiden Nickelspiegel betreffend) geben die einzelnen Spalten dieselben Werthe, nur dass in der ersten noch die Ausschläge des Galvanometers verzeichnet sind. Die Drehungsbeobachtungen in den Deckgläsern und infolgedessen auch die aus der Differenzbestimmung gewonnenen Werthe im Platinglase allein fallen fort. Denn es war, wie aus den Fig. 14a und 14b ersichtlich, nicht möglich, die Platte *l* wie bei den anderen Beobachtungen gänzlich aus dem Gesichtsfelde zu verschieben, da die Löthstelle in einer Höhe mit den Federn *n* auf dem Versuchsobjecte auflag. Bei Eisen und Kobalt sind die angegebenen Feldintensitäten aus den Drehungswerthen der letzten Spalte, wie schon erwähnt, durch Vergleichen mit der Etalonglasplatte berechnet. Bei dem fast constanten Werthe der Feldintensität während der Beobachtung an einer Schicht konnte davon abgesehen werden, sie für jede Versuchsreihe bei jeder einzelnen Temperatur anzugeben. Die vorhandenen Abnahmen der Drehung der Platingläser zeigen durch ihren regelmässigen Verlauf wie durch ihr Zurückgehen beim Sinken der Temperatur, dass sie lediglich durch Erhöhung der letzteren hervorgerufen sind. Dass die Feldintensität selbst unter dem Einfluss der erhöhten Temperatur abgenommen hätte, war ausgeschlossen, denn die Polstücke wiesen bei den höchsten Temperaturen des Kastens nur eine Erwärmung von 10° bis 15° auf. Für die in Tab. 3 angeführten Beobachtungen

mit Nickelschichten wurden die Feldintensitäten vor Beginn und nach Ende des Versuches direct mit der Etalonglasplatte bestimmt.

## Tabelle 1.

Eisen. Feldbereich A.

| Temperatur | Drehung im Fe + Platinglas + Deckglas | Drehung im Platinglas + Deckglas | Drehung im Deckglas | Drehung im Fe | Drehung im Platinglas |
|---|---|---|---|---|---|
| | Eisenschicht I. Feldint.: 8410 C. G. S. | | | | |
| 23° | 5° 16,4′ | 3° 11,4′ | 1° 57,8′ | 2° 5,0′ | 1° 13,6′ |
| 95° | 5° 16,6′ | 3° 10,9′ | 1° 57,4′ | 2° 5,7′ | 1° 13,5′ |
| 150° | 5° 15,4′ | 3° 10,0′ | 1° 56,8′ | 2° 5,4′ | 1° 13,2′ |
| 200° | 5° 13,9′ | 3° 9,1′ | 1° 56,1′ | 2° 4,8′ | 1° 13,0′ |
| 25° | 5° 16,8′ | 3° 11,7′ | 1° 57,9′ | 2° 5,1′ | 1° 13,8′ |
| | Eisenschicht II. Feldint.: 8430 C. G. S. | | | | |
| 22° | 6° 17,3′ | 3° 20,2′ | 1° 58,2′ | 2° 57,1′ | 1° 22,0 |
| 110° | 6° 17,0′ | 3° 19,8′ | 1° 57,8′ | 2° 57,2′ | 1° 22,0 |
| 155° | 6° 16,6′ | 3° 19,1′ | 1° 57,0′ | 2° 57,5′ | 1° 22,1 |
| 210° | 6° 14,4′ | 5° 17,9′ | 1° 56,1′ | 2° 56,5′ | 1° 21,8 |
| 22° | 6° 17,2′ | 3° 20,3′ | 1° 58,1′ | 2° 56,9′ | 1° 22,2 |
| | Eisenschicht III. Feldint. 8400 C. G. S. | | | | |
| 24° | 4° 53,3′ | 3° 1,2′ | 1° 57,5′ | 1° 52,1′ | 1° 3,7′ |
| 97° | 4° 53,0′ | 3° 1,1′ | 1° 57,4′ | 1° 51,9′ | 1° 3,7′ |
| 142° | 4° 53,2′ | 3° 0,8′ | 1° 57,2′ | 1° 52,4′ | 1° 3,6′ |
| 203° | 4° 52,1′ | 3° 0,3′ | 1° 56,8′ | 1° 51,8′ | 1° 3,5′ |
| 23° | 4° 53,6′ | 3° 1,4′ | 1° 57,4′ | 1° 52,2′ | 1° 4,0′ |
| | Eisenschicht IV. Feldint.: 8830 C. G. S. | | | | |
| 24° | 5° 43,8′ | 3° 17,9′ | 2° 4,3′ | 2° 25,9′ | 1° 13,6′ |
| 105° | 5° 44,0′ | 3° 17,6′ | 2° 4,2′ | 2° 26,4′ | 1° 13,4′ |
| 162° | 5° 42,8′ | 3° 17,0′ | 2° 3,6′ | 2° 25,8′ | 1° 13,4′ |
| 207° | 5° 42,6′ | 3° 16,6′ | 2° 3,5′ | 2° 26,0′ | 1° 13,1′ |
| 24° | 5° 44,2′ | $3_0$ 17,9′ | $2_0$ 4,3′ | 2° 26,3′ | 1° 13,6′ |

| Temperatur | Drehung im Fe + Platinglas + Deckglas + Verschlussgl. | Drehung im Platinglas + Deckglas + Verschlussgl. | Drehung im Deckglas | Drehung im Fe | Drehung im Platinglas + Verschlussgl. |
|---|---|---|---|---|---|
| | Eisenschicht V. Feldint.: 8410 C. G. S. | | | | |
| Zimmertemp. | 6° 41,08′ | 4° 5,32′ | 1° 57,88 | 2° 35,76 | 2° 7,44′ |
| 205° | 6° 38,80′ | 4° 2,92′ | 1° 55,96 | 2° 35,88 | 2° 6,96′ |
| 263° | 6° 37,00′ | 4° 2,08′ | 1° 55,36 | 2° 34,92 | 2° 6,72′ |
| 347° | 6° 36,28′ | 4° 0,88′ | 1° 54,52 | 2° 35,40 | 2° 6,36′ |
| Zimmertemp. | 6° 40,24′ | 4° 4,84′ | 1° 57,48 | 2° 35,40 | 2° 7,36′ |

| Temperatur | Drehung im Fe + Platinglas + Deckglas + Verschlussgl. | Drehung im Platinglas + Deckglas + Verschlussgl. | Drehung im Deckglas | Drehung im Fe | Drehung im Platinglas + Verschlussgl. |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Eisenschicht VI. Feldint.: 8810 C. G. S.** | | | | |
| Zimmertemp. | 6° 18,92′ | 3° 59,60′ | 2° 4,28′ | 2° 19,32′ | 1° 55,32′ |
| 220° | 6° 16,52′ | 3° 57,56′ | 2° 2,60′ | 2° 18,96′ | 1° 54,96′ |
| 282° | 6° 15,08′ | 3° 56,72′ | 2° 1,88′ | 2° 18,36′ | 1° 54,84′ |
| 351° | 6° 14,24′ | 3° 55,52′ | 2° 0,92′ | 2° 18,72′ | 1° 54,60′ |
| Zimmertemp. | 6° 18,92′ | 3° 59,84′ | 2° 4,58′ | 2° 19,08′ | 1° 55,26′ |

## Tabelle 2.

Kobalt. Feldbereich A.

| Temperatur | Drehung im Co + Platinglas + Deckglas | Drehung im Platinglas + Deckglas | Drehung in Deckglas | Drehung im Co | Drehung im Platinglas |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Kobaldschicht I. Feldint.: 8410 C. G. S.** | | | | |
| 25° | 4° 38,40′ | 3° 9,72′ | 1° 57,84′ | 1° 28,68′ | 1° 11,88′ |
| 98° | 4° 36,84′ | 3° 8,52′ | 1° 56,64′ | 1° 28,32′ | 1° 11,88′ |
| 208° | 4° 36,24′ | 3° 7,08′ | 1° 55,68′ | 1° 29,16′ | 1° 11,40′ |
| 262° | 4° 35,40′ | 3° 5,64′ | 1° 54,72′ | 1° 29,76′ | 1° 10,92′ |
| 24° | 4° 38,88′ | 3° 9,48′ | 1° 57,72′ | 1° 29,40′ | 1° 11,76′ |
| | **Kobaltschicht II. Feldint.: 8450 C. G. S.** | | | | |
| 24° | 4° 11,48′ | 3° 6,92′ | 1° 58,52′ | 1° 4,56′ | 1° 8,40′ |
| 107° | 4° 10,64′ | 3° 5,72′ | 1° 57,56′ | 1° 4,92′ | 1° 8,16′ |
| 222° | 4° 8,96′ | 3° 3,92′ | 1° 56,36′ | 1° 5,04′ | 1° 7,56′ |
| 259° | 4° 7,16′ | 3° 2,48′ | 1° 55,40′ | 1° 4,68′ | 1° 7,08′ |
| 26° | 4° 10,88′ | 3° 6,68′ | 1° 58,40′ | 1° 4,20′ | 1° 8,28′ |
| | **Kobaltschicht III. Feldint.: 8820 C. G. S.** | | | | |
| 23° | 4° 6,32′ | 3° 14,00′ | 2° 4,2 ′ | 52,32′ | 1° 9,80′ |
| 121° | 4° 4,52′ | 3° 12,56′ | 2° 3,44′ | 51,96′ | 1° 9,12′ |
| 227° | 4° 3,92′ | 3° 11,36′ | 2° 2,96′ | 52,56′ | 1° 8,40′ |
| 263° | 4° 2,96′ | 3° 10,28′ | 2° 2,24′ | 52,68′ | 1° 8,04′ |
| 25° | 4° 6,44′ | 3° 14,36′ | 2° 4,64′ | 52,08′ | 1° 9,72′ |
| | **Kobaltschicht IV. Feldint.: 8400 C. G. S.** | | | | |
| 24° | 4° 38,40′ | 3° 2,40′ | 1° 57,6 ′ | 1° 36,0 ′ | 1° 4,80′ |
| 105° | 4° 36,68′ | 3° 1,20′ | 1° 56,64′ | 1° 35,48′ | 1° 4,56′ |
| 210° | 4° 35,88′ | 2° 59,76′ | 1° 55,68′ | 1° 36,12′ | 1° 4,08′ |
| 266° | 4° 34,32′ | 2° 58,56′ | 1° 54,84′ | 1° 35,76′ | 1° 3,72′ |
| 25° | 4° 38,16′ | 3° 2,04′ | 1° 57,36′ | 1° 36,12′ | 1° 4,68′ |

| Temperatur | Drehung im Co + Platinglas + Deckglas + Verschlussgl. | Drehung im Platinglas + Deckglas + Verschlussgl. | Drehung im Deckglas | Drehung im Co | Drehung im Platinglas + Verschlussgl. |
|---|---|---|---|---|---|
| | Kobaltschicht V. Feldint.: 8800 C. G. S. | | | | |
| Zimmertemp. | 5° 53,24′ | 4° 9,68′ | 2° 4,04′ | 1° 43,56′ | 2° 5,64′ |
| 225° | 5° 50,00′ | 4° 6,08′ | 2° 1,76′ | 1° 43,92′ | 2° 4,32′ |
| 278° | 5° 49,04′ | 4° 4,88′ | 2° 1,04′ | 1° 44,16′ | 2° 3,84′ |
| 354° | 5° 47,24′ | 4° 3,70′ | 2° 0,32′ | 1° 43,54′ | 2° 3,38′ |
| Zimmertemp. | 5° 53,34′ | 4° 9,74′ | 2° 3,98′ | 1° 43,60′ | 2° 5,76′ |
| | Kobaltschicht VI. Feldint.: 8410 C. G. S. | | | | |
| Zimmertemp. | 5° 25,20′ | 4° 6,60′ | 1° 57,84′ | 1° 18,60 | 2° 8,76′ |
| 254° | 5° 20,64′ | 4° 1,68′ | 1° 54,72′ | 1° 18,96 | 2° 6,96′ |
| 313° | 5° 18,84′ | 4° 0,60′ | 1° 54,20′ | 1° 18,24 | 2° 6,40′ |
| 348° | 5° 18,12′ | 3° 59,64′ | 1° 53,28′ | 1° 18,48 | 2° 6,36′ |
| Zimmertemp. | 5° 25,08′ | 4° 6,24′ | 1° 57,72′ | 1° 18,84 | 2° 8,52′ |

## Tabelle 3.

Nickel. Feldbereich A.

| Auschlag am Galvanometer | Temperatur | Drehung im Ni + Platinglas + Deckglas | Drehung im Platinglas + Deckglas | Drehung im Ni |
|---|---|---|---|---|
| | Nickelschicht IX. Feldint.: 4520 C. G. S. | | | |
| | Zimmertemp. | 2° 34,46′ | 1° 32,18′ | 1° 2,28′ |
| | 109° | 2° 33,92′ | 1° 31,88′ | 1° 2,04′ |
| 219 mm | 173° | 2° 33,80′ | 1° 31,40′ | 1° 2,40′ |
| 456 mm | 254° | 2° 33,66′ | 1° 30,91′ | 1° 2,75′ |
| 618 mm | 309° | 2° 30,14′ | 1° 30,46′ | 59,68′ |
| 650 mm | 321° | 2° 1,88′ | 1° 30.38′ | 31.50′ |
| 695 mm | 336° | 1° 29,98′ | 1° 30,22′ | − 0,24′ |
| | Zimmertemp. | 2° 34,28′ | 1° 32,16′ | 1° 2,12′ |
| | Nickelschicht V. Feldint.: 3710 C. G. S. | | | |
| | Zimmertemp. | 1° 57,12′ | 1° 20,84′ | 36,28′ |
| | 112° | 1° 56,48′ | 1° 20,52′ | 35,96′ |
| 231 mm | 178° | 1° 56,31′ | 1° 20,13′ | 36,18′ |
| 436 mm | 247° | 1° 55,56′ | 1° 19,80′ | 35,76′ |
| 609 mm | 306° | 1° 55,92′ | 1° 19,58′ | 36.34′ |
| 634 mm | 315° | 1° 46,38′ | 1° 19,49′ | 26,89′ |
| 698 mm | 337° | 1° 19,86′ | 1° 19,38′ | + 0,48′ |
| | Zimmertemp. | 1° 57,25′ | 1° 20,79′ | 36,46′ |

Für Eisen und Kobalt zeigt nun das in Tab. 1 und 2 zusammengestellte Beobachtungsmaterial in dem untersuchten

Temperaturintervall bis ca. 350° eine innerhalb der Fehlergrenze vollkommene Unabhängigkeit der Circularpolarisation von Temperaturänderungen.

Ein gleiches Verhalten zeigen nach Tab. 3 die Nickelschichten, bis bei einer Temperatur von etwas über 300° ein plötzlicher Abfall der Drehung eintritt. Ob diese absolut verschwindet, ist nicht zu ersehen; die bald positiven, bald negativen Differenzen der Werthe aus Spalte 3 und 4 liegen innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler. Für Nickel sind die Resultate oberhalb 250° in Fig. 16 graphisch dargestellt.

Tabelle 4.

Nickel. Feldbereich B.

| Temperatur | Drehung im Ni + Platinglas + Deckglas | Drehung im Platinglas + Deckglas | Drehung im Deckglas | Drehung im Ni | Drehung im Platinglas |
|---|---|---|---|---|---|
| | Nickelschicht I. | Feldint.: 8440 C. G. S. | | | |
| 23° | 4° 4,64′ | 3° 9,44′ | 1° 58,2 ′ | 0° 55,2 ′ | 1° 11,24′ |
| 100° | 4° 4,68′ | 3° 9,24′ | 1° 58,08′ | 0° 55,44′ | 1° 11,16′ |
| 200° | 4° 3,36′ | 3° 8,52′ | 1° 57,6 ′ | 0° 54,84′ | 1° 10,92′ |
| 277° | 4° 1,92′ | 3° 6,72′ | 1° 56,28′ | 0° 55,2 ′ | 1° 10,44′ |
| 315° | 3° 55,08′ | 3° 6,36′ | 1° 56,04′ | 0° 48,72′ | 1° 10,32′ |
| 24° | 4° 4,92′ | 3° 9,60′ | 1° 58,32′ | 0° 55,32′ | 1° 11,28′ |
| | Nickelschicht II. | Feldint.: 8380 C. G. S. | | | |
| 23° | 4° 15,60′ | 3° 4,56′ | 1° 57,24′ | 1° 11,04′ | 1° 7,32′ |
| 120° | 4° 14,76′ | 3° 4,08′ | 1° 56,88′ | 1° 10,68′ | 1° 7,20′ |
| 210° | 4° 14,40′ | 3° 2,88′ | 1° 56,16′ | 1° 11,52′ | 1° 6,72′ |
| 295° | 4° 12,12′ | 3° 1,20′ | 1° 54,96′ | 1° 10,92′ | 1° 6,24′ |
| 320° | 3° 23,20′ | 3° 0,84′ | 1° 54,84′ | 0° 22,36′ | 1° 6,00′ |
| 25° | 4° 15,60′ | 3° 4,20′ | 1° 57,12′ | 1° 11,40′ | 1° 7,08′ |
| | Nickelschicht III. | Feldint.: 8430 C. G. S. | | | |
| 23° | 4° 3,92′ | 2° 59,84′ | 1° 58,16′ | 1° 4,08′ | 1° 1,68′ |
| 125° | 4° 2,60′ | 2° 58,88′ | 1° 57,56′ | 1° 3,72′ | 1° 1,32′ |
| 227° | 4° 0,24′ | 2° 57,72′ | 1° 56,60′ | 1° 3,52′ | 1° 1,12′ |
| 298° | 4° 0,68′ | 2° 56,60′ | 1° 55,64′ | 1° 4,08′ | 1° 0,96′ |
| 323° | 3° 35,46′ | 2° 55,88′ | 1° 55,04′ | 0° 39,76′ | 1° 0,84′ |
| 23° | 4° 4,12′ | 2° 59,68′ | 1° 58,04′ | 1° 4,44′ | 1° 1,64′ |
| | Nickelcchicht IV. | Feldint.: 8430 C. G. S. | | | |
| 24° | 3° 48,72′ | 2° 24,24′ | 1° 58,08′ | 1° 24,48′ | 1° 26,16′ |
| 120° | 3° 47,40′ | 2° 23,28′ | 1° 57,36′ | 1° 24,12′ | 1° 25,92′ |
| 230° | 3° 47,04′ | 2° 23,08′ | 1° 56,64′ | 1° 24,96′ | 1° 25,44′ |
| 320° | 3° 30,00′ | 2° 20,64′ | 1° 55,68′ | 1° 9,36′ | 1° 24,96′ |
| 25° | 3° 49,04′ | 2° 24,20′ | 1° 57,96′ | 1° 24,84′ | 1° 26,24′ |

## Tabelle 5.

Nickel. Feldbereich B.

| Galvanometerausschlag | Temperatur | Drehung im Ni + Platinglas + Deckglas | Drehung im Platinglas + Deckglas | Drehung im Ni |
|---|---|---|---|---|
| | Nickelschicht V. Feldint.: 8420 C. G. S. | | | |
| | Zimmertemp. | 4° 22,28′ | 3° 3,96′ | 1° 18,32′ |
| 779 mm | 294 ° | 4° 18,00′ | 2° 59,76′ | 1° 18,24′ |
| 852 mm | 312 ° | 4° 14,52′ | 2° 59,40′ | 1° 15,12′ |
| 894 mm | 323 ° | 3° 40,80′ | 2° 58,68′ | 42,12′ |
| 914 mm | 328,5° | 3° 14,40′ | 2° 58,20′ | 16,20′ |
| 942 mm | 335,5° | 2° 57,48′ | 2° 57,96′ | −0,48′ |
| | Zimmertemp. | 4° 21,48′ | 3° 3,60′ | 1° 17,88′ |
| | Nickelschicht VI. Feldint. 8440 C. G. S.: | | | |
| | Zimmertemp. | 4° 9,60′ | 3° 12,00′ | 57,60′ |
| 779 mm | 294 ° | 4° 4,80′ | 3° 6,96′ | 57,84′ |
| 852 mm | 312 ° | 3° 58,80′ | 3° 6,48′ | 52,32′ |
| 874 mm | 318 ° | 3° 38,40′ | 3° 5,88′ | 32,52′ |
| 910 mm | 327,5° | 3° 16,80′ | 3° 5,28′ | 11,52′ |
| 934 mm | 333,5° | 3° 5,04′ | 3° 4,56′ | −0,48′ |
| | Zimmertemp. | 4° 9,60′ | 3° 11,52′ | 58,08′ |
| | Nickelschicht VII. Feldint.: 8410 C. G. S. | | | |
| | Zimmertemp. | 4° 6,0 ′ | 2° 58,08′ | 1° 7,92′ |
| 828 mm | 298 ° | 4° 3,60′ | 2° 55,20′ | 1° 8,40′ |
| 874 mm | 309 ° | 4° 0,48′ | 2° 54,84′ | 1° 5,64′ |
| 936 mm | 323,5° | 3° 22,92′ | 2° 54,60′ | 28,32′ |
| 963 mm | 330 ° | 3° 3,60′ | 2° 54,24′ | 9,36′ |
| 992 mm | 336,5° | 2° 54,12′ | 2° 53,88′ | +0,24′ |
| | Zimmertemp. | 4° 5,88′ | 2° 57,84′ | 1° 8,04′ |
| | Nickelschicht VIII. Feldint.: 8440 C. G. S. | | | |
| | Zimmertemp. | 3° 51,72′ | 3° 2,28′ | 49,44′ |
| 830 mm | 299 ° | 3° 48,00′ | 2° 58,20′ | 49,80′ |
| 856 mm | 305 ° | 3° 45,60′ | 2° 57,84′ | 47,76′ |
| 898 mm | 314,5° | 3° 27,62′ | 2° 57,36′ | 30,26′ |
| 946 mm | 326 ° | 3° 3,60′ | 2° 57,12′ | 6,48′ |
| 970 mm | 332 ° | 2° 57,24′ | 2° 56.88′ | +0,36′ |
| | Zimmertemp. | 3° 51,84′ | 3° 2,52′ | 49,32′ |
| | Nickelschicht IX. Feldint.: 8430 C. G. S. | | | |
| | Zimmertemp. | 4° 12,12′ | 2° 52.08′ | 1° 20,04′ |
| 860 mm | 304 ° | 4° 7,92′ | 2° 48,12′ | 1° 19,80′ |
| 916 mm | 317 ° | 4° 2,04′ | 2° 47,76′ | 1° 14,28′ |
| 948 mm | 324,5° | 3° 32,52′ | 2° 47,40′ | 45,12′ |
| 982 mm | 332,5° | 2° 52,08′ | 2° 47,04′ | 5,04′ |
| 1008 mm | 338,5° | 2° 46,20′ | 2° 46,68′ | −0,48′ |
| | Zimmertemp. | 4° 12,00′ | 2° 51,72′ | 1° 20,28′ |

Sowohl die Platingläser wie die Deckgläser des Heizapparates weisen bei Erhöhung der Temperatur eine Abnahme der Drehung auf. Es ist dies vollkommen in Uebereinstimmung mit den Resultaten anderer Beobachter.[1]) Dass die Deckgläser viel mehr durch die Temperatur beeinflusst werden wie die Platingläser, dürfte durch die Verschiedenheit der Glassorten bedingt sein.

B. Nickel im Feldbereiche B.

Es wurden hier neun Nickelschichten untersucht. Die Temperaturbestimmung für die Schichten I—IV ist thermometrisch gemacht worden.[2]) Die Resultate sind nur bis etwa 300° mitgetheilt, da es bis dahin auf eine genaue Temperaturkenntniss nicht ankommt. Für die Schichten V—IX wurde die Temperatur thermoelectrisch gemessen. In den Tab. 4 und 5 haben die einzelnen Spalten dieselbe Bedeutung wie in Tab. 3. Die Resultate oberhalb 270° sind in Fig. 18 graphisch dargestellt.

Die Zahlen zeigen auch hier übereinstimmend vollkommene Constanz der Werthe der Circularpolarisation bis zu den Temperaturen, bei denen der plötzliche Abfall eintritt. Die Art dieses Abfalles zeigen die Curven der Fig. 18. Die Abweichung, die der Verlauf der Curve Ni 8 von denen der übrigen zeigt, dürfte vielleicht darin ihren Grund haben, dass die Löthstelle der Thermokette in diesem Falle nicht fest genug an der Mittelschicht gelegen hatte. Die chemische Beschaffenheit des Nickels kann die Verschiedenheit nicht bewirkt haben, da die fünf Schichten aus demselben Bade niedergeschlagen waren.

## § 4. Discussion der Resultate.

Um aus den Ergebnissen der Versuche Schlüsse ziehen zu können, sei folgende Betrachtung vorausgeschickt. Wie Hr. du Bois[3]) gezeigt hat, stellt für den Fall einer senkrecht

1) Vgl. Lüdtge, Pogg. Ann. **137.** p. 287. 1869; Bichat, Ann. de l'école norm. **2.** p. 292. 1873.

2) Die betreffenden Beobachtungen lagen zeitlich vor den unter (A) mitgetheilten. Erst nach den damit gemachten Erfahrungen wurde zur thermoelectrischen Temperaturbestimmung geschritten.

3) du Bois, Wied. Ann. **31.** p. 952. 1887.

zu einem gleichförmigen magnetischen Felde aufgestellten. unbegrenzten Platte die Gleichung

$$(1) \qquad \mathfrak{J} = \frac{1}{4\pi + \frac{1}{\varkappa}} \mathfrak{H}$$

die Beziehung zwischen der Transversalmagnetisirung $\mathfrak{J}$ und der Intensität des äusseren magnetischen Feldes $\mathfrak{H}$ dar, wobei $\varkappa$ die magnetische Susceptibilität des Materials bedeutet. Hr. du Bois wies darauf hin, dass, solange $\varkappa$ gross ist im Vergleich zu $1/4\pi$, die der Gleichung entsprechenden Curven unmerklich wenig von einer Geraden abweichen, deren Richtungsconstante $1/4\pi$ ist; der Einfluss des Materials fällt fast ganz weg; die Gerade ist fast dieselbe für Eisen, Kobalt und Nickel. Ist die Beziehung zwischen $\varkappa$ und $\mathfrak{J}$ empirisch gegeben, so kann man $\mathfrak{J}$ = funct. ($\mathfrak{H}$) graphisch darstellen (Fig. 17).[1] Man sieht, dass scharf zu unterscheiden ist zwischen dem Feldbereiche A, in dem die Magnetisirung fast genau proportional der magnetisirenden Intensität wächst, und dem Bereiche B der angenäherten magnetischen „Sättigung".

Wenn die Magnetisirung $\mathfrak{J}$ in dem Bereiche A unabhängig davon ist, ob die Platte aus einem Material grösserer oder geringerer magnetischer Susceptibilität besteht, so muss sie a fortiori auch unabhängig davon sein, ob die Susceptibilität eines gegebenen Materials nach der einen oder der anderen Seite hin nur durch Temperaturvariationen beeinflusst ist. wenigstens insofern jene Zahl immer noch gross bleibt im Vergleich zu $1/4\pi$.[2] Im Bereiche A ist daher bei Temperaturänderungen nach der Theorie

$$(2) \qquad \mathfrak{J} = \text{const.} \qquad \left(\varkappa >> \frac{1}{4\pi}\right).$$

Ebenso kann nun die von mir experimentell gefundene Unabhängigkeit der Drehung $\varepsilon$ in Eisen, Kobalt und Nickel von der Temperatur im Bereiche A durch die Gleichung

1) du Bois, Wied. Ann. **31.** p. 952. 1887; auch Phil. Mag. (5) **29.** p. 302. 1890.

2) Wir werden diese Bedingung durch das Symbol:

$$\left(\varkappa >> \frac{1}{4\pi}\right)$$

veranschaulichen.

$$\varepsilon = \Psi . (\Im d) = \text{const.} \qquad \left(\varkappa >> \frac{1}{4\pi}\right) \tag{3}$$

dargestellt werden. Aus (2) und (3) folgt aber ohne weiteres

$$\Psi = \text{const.}^{1)} \qquad \left(\varkappa >> \frac{1}{4\pi}\right).$$

In Worten:

*Die Kundt'sche Constante $\Psi$ ist innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler von der Temperatur unabhängig* (wofern $\varkappa >> 1/4\pi$).

Wir machen nun ferner die hiernach nicht ungerechtfertigte Annahme, dass diese Unabhängigkeit der Kundt'schen Constante von der Temperatur noch gewahrt bleibt, wenn die Susceptibilität soweit herabgedrückt wird, dass der Bedingung ($\varkappa >> 1/4\pi$) nicht mehr genügt wird. Wir können dann die durch Tab. 4 und 5 (Fig. 18) gegebenen Nickelcurven, die sich auf das Feldbereich B beziehen, ohne weiteres als solche betrachten, welche die Magnetisirung als Function der Temperatur darstellen, indem wir die Ordinaten durch $\Psi . d$ dividirt denken. Wir erhalten dann durch die vorliegenden Beobachtungen direct den Verlauf der thermomagnetischen Curven einer Nickelplatte im „Sättigungsbereiche" B.

Es wäre nun von Interesse gewesen, den für Nickel erhaltenen Resultaten diejenigen der ausgedehnten vorliegenden thermomagnetischen Untersuchungen gegenüberzustellen. Indessen gestatten die letzteren einen Vergleich aus zwei Gründen nicht. Vor allem erstrecken sie sich nicht bis zu Feldern von der in vorliegender Arbeit benutzten Intensität. Sie reichen vielmehr nicht über Felder von einigen 100 C. G. S.-Einheiten hinaus. Dann ist es aber auch die Plattengestalt, die eine so principielle Verschiedenheit der beschriebenen Versuche von den ausschliesslich mit Stab- und Ringmagneten angestellten thermomagnetischen bedingt, dass ein Vergleich ohne weiteres nicht durchführbar ist.

Berlin, physikal. Inst. der Univ., 10. Januar 1892.

---

1) Die Dicke der Schicht $d$ bleibt allerdings infolge der Ausdehnung des Metalls mit der Temperatur nicht absolut constant. Indessen liegen die hierdurch hervorgerufenen Aenderungen vollkommen innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler.

## IV. *Sichtbare Darstellung der äquipotentialen Linien in durchströmten Platten. Erklärung des Hall'schen Phänomens; von E. Lommel.*

(Aus den Sitzungsberichten der math.-physik. Klasse der k. bayr. Akad. d. Wiss. vom 3. Dec. 1892, mitgetheilt vom Hrn. Verfasser.)

Es ist nicht schwer, einzusehen, dass die zu den Stromlinien einer leitenden dünnen Platte senkrechten Linien gleichen Potentials zugleich die zu der Strömung gehörigen magnetischen Kraftlinien sind. Streut man daher Eisenfeilspäne auf die Platte, so ordnen sich dieselben bei genügender Stromstärke zu einem schönen Bilde der Aequipotentiallinien.

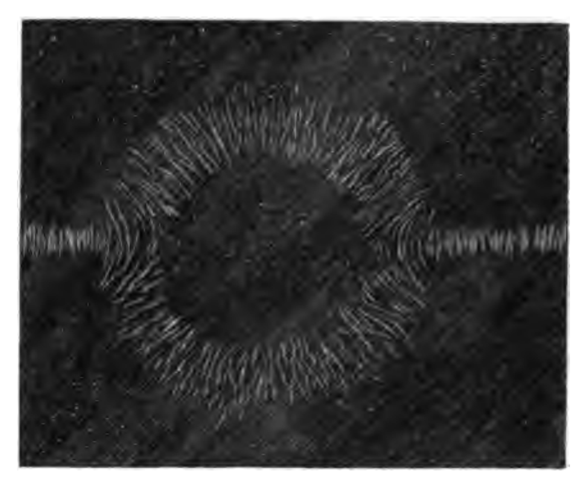


Fig. 1.

Die benutzten Platten waren Kupferplatten von ca. $^1/_2$ mm Dicke und von verschiedenen Formen, an deren Rand, in der Ebene der Platte liegend, die Zuleitungsdrähte angelöthet waren. Die angewendete Stromstärke betrug ca. 20 Amp. Die Feilspäne gruppiren sich immer so, wie es die Theorie für die Aequipotentiallinien verlangt; die Curven stehen namentlich stets senkrecht zu den Begrenzungslinien der Platte (die ja immer Stromlinien sind), wo sie umbiegen, um auf der Rückseite der Platte in sich zurückzulaufen. Um die Bilder festzuhalten, wurde über die Platte (bei rother Beleuchtung) photographisches Papier gebreitet und auf dieses die Eisenfeile gesiebt; die Figuren bilden sich auf dem Papier ebenso vollkommen aus, wie auf der

Platte selbst, und das Aufflammen eines Zündhölzchens genügt, um das Bild dem lichtempfindlichen Papierblatt einzuprägen. Mit Beiseitelassung der einfacheren und bekannteren Fälle seien von den zahlreichen Aufnahmen hier nur zwei minder gewöhnliche Beispiele wiedergegeben. Fig. 1 zeigt die Aequipotentialen einer ringförmigen, von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Platte, mit Electroden an den Endpunkten eines Durchmessers des äusseren Kreises. Da die Aequipotentiallinien nur auf der Platte selbst, nicht aber auf ihrer nichtleitenden Unterlage entstehen, so geben sie zugleich ein durch jene Linien schraffirtes Bild der Platte; in derselben Weise bilden sich auch die Zuleitungsdrähte ab. Die Figur 2 wurde erzeugt über einer rechteckigen Platte mit einem kreisrunden Loch und Electroden an zwei gegenüberliegenden Ecken; auch hier ist das Bild der Platte sammt ihren Zuleitungsdrähten deutlich zu erkennen.

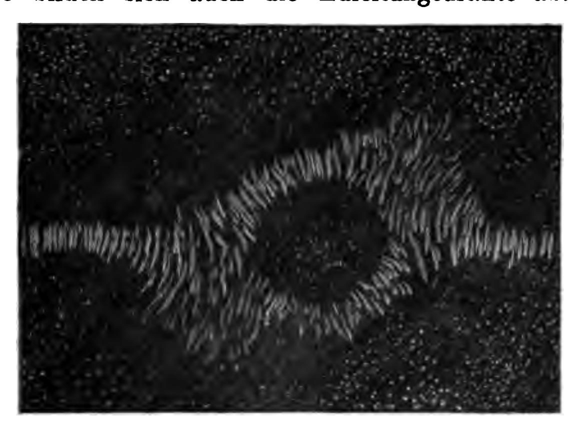


Fig. 2.

Die Erkenntniss, dass die Aequipotentialen Magnetkraftlinien sind, legte den Gedanken nahe, dass die Lagenänderung der Aequipotentiallinien in einem Magnetfelde, wie sie im Hall'schen Phänomen beobachtet wird, vielleicht als eine unmittelbare Wirkung der Kraftlinien des Magnetfeldes auf die Kraftlinien der Strömung angesehen werden könne. Sind jedoch die Magnetkraftlinien zur Platte parallel, so zeigt sich das Hall'sche Phänomen bekanntlich nicht. Nähert man der durchströmten Platte in ihrer Ebene irgendwo von seitwärts einen Magnetpol, so ordnen sich die Feilspäne in Linien, welche augenscheinlich die Resultanten sind aus den beiden Systemen von Kraftlinien, deren jedes unabhängig für sich

bestehen bleibt. Von einer unmittelbaren Wirkung der Magnetkraftlinien auf die Aequipotentialen kann also nicht die Rede sein.

Das Hall'sche Phänomen wird vielmehr nur hervorgerufen durch Magnetkraftlinien, welche senkrecht zur Platte stehen, oder, bei schiefer Richtung der Kraftlinien, nur durch deren zur Platte senkrechte Componenten.

Die Art der Wirkung des Magnets auf die Platte in diesem Falle stelle ich mir vor, wie folgt. Der Primärstrom durchfliesse die rechteckige Platte *a b c d* (Fig. 3) in der Richtung der Pfeile bei *A* und *B*. An den Endpunkten einer Aequipotentiallinie, bei *C* und *D*, seien die nach dem Galvanometer *G* führenden Drähte angelegt. Nun werde ein homogenes Magnetfeld erregt, dessen Kraftlinien senkrecht zur Platte (zur Ebene der Zeichnung) gerichtet sind; der gebogene Pfeil bezeichne die Richtung der Ampère'schen Ströme des Magnets.

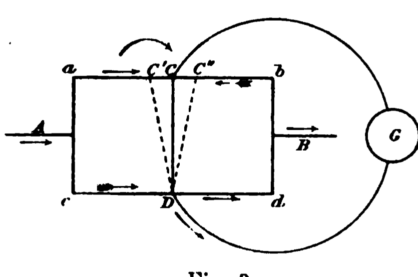


Fig. 3.

Besteht die Platte aus einem diamagnetischen Metall, so werden in ihr nach W. Weber's Theorie des Diamagnetismus Molecularströme wachgerufen, welche den Ampère'schen Strömen des Magnets entgegengerichtet sind, und sich in bekannter Weise zu einem resultirenden Strome zusammensetzen, welcher den Rand der Platte in der Richtung der gefiederten Pfeile umfliesst. Längs *a b* ist dieser Molecularstrom dem Primärstrom entgegengesetzt; längs *c d* ihm gleichgerichtet. Der Primärstrom entlang *a b* wird also durch die Wirkung des Magnets geschwächt, derjenige entlang *c d* verstärkt. Ist die Leitfähigkeit längs *a b* und *c d* die gleiche geblieben, so folgt, dass längs *a b* die electromotorische Kraft des Primärstromes vermindert, längs *c d* um ebensoviel vermehrt ist. Der Punkt *D* hat demnach nicht mehr wie vorher das gleiche Potential wie der Punkt *C*, sondern ein höheres. Verbindet man daher *D* mit *C* durch ein Galvanometer, so geht durch letzteres ein Strom in der Richtung des Pfeiles bei *D*, der Hall'sche Strom. Ein Punkt



Soeben ist im Verlage von **Johann Ambrosius Barth** in **Leipzig** erschienen:

# Lehrbuch

der

# Experimentalphysik

von

**Dr. E. von Lommel**

o. ö. Professor der Physik an der Universität München.

630 Seiten $8^{0}$ mit 424 Abbildungen.

**Preis geheftet M. 6.40, gebunden M. 7.20.**

Das „Lehrbuch der Experimentalphysik", aus den Vorträgen des Verfassers entstanden, ist bestrebt, die Grundlehren der Physik, ohne weitläufige mathematische Entwickelungen, dem heutigen Standpunkte unserer Kenntnisse gemäss allgemein verständlich darzustellen. Unter Anknüpfung an alltägliche Erfahrungen und leicht anzustellende Versuche sind die Thatsachen überall zum Ausgangspunkte gewählt. Der (grösser gedruckte) Haupttext bildet für sich einen zusammenhängenden Lehrgang, zu dessen Verständnis, welches durch zahlreiche in den Text gefügte Abbildungen unterstützt wird, die elementarsten mathematischen Kenntnisse genügen. Der Stoff ist so angeordnet, dass niemals später Folgendes vorausgesetzt, sondern nur auf früher Besprochenes zurückverwiesen wird, wodurch dem Anfänger das Studium wesentlich erleichtert wird. Um aber auch dem Bedürfnis von Mittel- und Hochschulen gerecht zu werden, sind (kleiner gedruckte) Abschnitte eingestreut, welche die wichtigsten Entwickelungen und Beweise in möglichst knapper

elementarer Darstellung enthalten. Auch geschichtliche Daten haben gebührende Berücksichtigung gefunden, und durch ein ausführliches Namen- und Sachregister ist dafür gesorgt, dass das Werk auch als bequemes Nachschlagebuch dienen kann.

Das Buch eignet sich somit nicht nur für den Studirenden, sondern auch für Gymnasien, Realgymnasien, und Mittelschulen sowie zum Privatstudium.

Hochachtungsvoll

Leipzig, Februar 1893

**Johann Ambrosius Barth**
**(Arthur Meiner).**


An die Buchhandlung von ..............................

..............................................................

Ersuche um Zusendung $\frac{\text{in feste Rechnung}}{\text{zur Ansicht}}$ von ......... Expl.

**Lommel, v., Experimentalphysik,** geheftet M. 6,40
— — — gebunden M. 7,20
(letzteres nur gegen feste Bestellung)

Unterschrift:

..............................................................


Druck von Otto Durr in Leipzig.

auf $ab$ von gleichem Potential mit $D$ würde jetzt links von $C$ etwa bei $C'$ liegen müssen, und die Gerade $DC'$, welche diese jetzt äquipotentialen Punkte verbindet, gegen $DC$ in der den Magnetströmen entgegengesetzten Richtung gedreht erscheinen (negative Drehung). Besteht dagegen die Platte aus einem magnetischen Metall mit präformirten Molecularströmen, welche sich mit den Magnetströmen gleichrichten, so verstärkt der resultirende Molecularstrom den Primärstrom in $ab$, und schwächt ihn in $cd$, der Hall'sche Strom geht jetzt von dem höheren Potential in $C$ nach dem niedrigeren in $D$ in entgegengesetzter Richtung, wie vorhin durch das Galvanometer, und die Gerade $DC''$, welche man vom Punkte $D$ nach dem jetzt mit ihm äquipotentialen Punkte $C''$ zieht, ist gegen $DC$ im Sinne der Magnetströme gedreht (positive Drehung).

Wird durch diese Wirkung des Magnets auf den Primärstrom das Potential in $D$ um den Betrag $e$ erhöht, in $C$ um ebensoviel erniedrigt, so ist $2e$ die Klemmenspannung der Galvanometerleitung $DGC$; ist $r$ deren Widerstand, so hat der durch das Galvanometer fliessende Strom die Stärke $2e/r$. Ist ferner $\varepsilon$ die im ganzen Stromkreis $DGCD$ wirksame electromotorische Kraft und $R$ der Widerstand der Platte, so ist dieselbe Stromstärke auch $\varepsilon/(R+r)$, und man findet durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke die electromotorische Kraft des Hall'schen Stromes

$$\varepsilon = 2e\frac{R+r}{r},$$

oder genähert, wenn $r$ gegen $R$ klein ist (eine für das Gelingen des Hall'schen Versuches erforderliche Bedingung):

$$\varepsilon = 2e\frac{R}{r}.$$

Die Grösse $2e$ ist offenbar der Stärke $M$ des Magnetfeldes proportional. Da sie ferner mit dem Primärstrome verschwindet, so setzen wir sie auch dessen Stromstärke $J$ proportional. Wir denken uns nämlich die Wirkung jener Molecularströme als eine Art Reibung, welche für sich keine Bewegung hervorrufen, sondern nur vorhandene Bewegung ändern kann. Wir setzen demnach

$$2e = \varkappa J M,$$

wo $\varkappa$ eine Art Reibungcoefficient vorstellt, der von der molecularen Beschaffenheit des Plattenmaterials abhängt. Der Widerstand $R$ der Platte ist ihrem Querschnitt, als auch ihrer Dicke $\delta$ umgekehrt proportional. Fasst man alle beim Versuch unverändert bleibenden Grössen in einen constanten Factor $K$ zusammen, so ergibt sich die electromotorische Kraft des Hall'schen Stromes:

$$\varepsilon = K \,.\, \frac{J M}{r \delta};$$

dieselbe ist also direct proportional der Stärke des Primärstromes und des Magnetfeldes, umgekehrt proportional der Dicke der Platte und dem Widerstande des Galvanometers, was mit den Ergebnissen der Erfahrung in vollkommenem Einklang steht.

# V. *Zur kinetischen Theorie mehratomiger Gase;*
## *von F. Richarz.*

(Zum Theil vorgetragen in den Verhandl. der Physikal. Gesellschaft zu Berlin, Sitzung vom 26. Juni 1891.)

---

### I. Einleitung.

Es ist gewiss mit Recht hervorgehoben worden, dass die rein thermodynamische Betrachtungsweise, welche unter Verzicht auf jede besondere Vorstellung von der Form der thermischen Energie allein von den beiden Hauptsätzen der mechanischen Wärmetheorie ihren Ausgang nimmt, der kinetischen Theorie an Sicherheit und an Fruchtbarkeit überlegen ist. [1]) Aber der Verzicht, von der Bewegung der Molecüle und Atome eine Vorstellung zu gewinnen, muss nothwendig ein unbefriedigendes Gefühl hinterlassen, und dieses wird immer wieder von neuem zu Versuchen treiben, vom Mechanismus der Wärmebewegung eine bestimmtere Anschauung auszubilden. Bei unserer gänzlichen Unkenntniss der Molecularkräfte wird man freilich heute nicht weit in diesen Versuchen gelangen können, und man hat sich davor zu hüten, auf allzu specielle Voraussetzungen, zu denen die Thatsachen keinen bestimmten Anhalt geben, ein Gebäude verwickelter Schlussfolgerungen zu errichten. Dies bezieht sich ganz besonders auf die intramolecularen Bewegungen der Atome. Dagegen wird man mit Recht die Frage behandeln dürfen, was man über die intramoleculare Energie unter möglichst *einfachen* Annahmen aus den bekannten Thatsachen schliessen kann; diese Annahmen sind erstens die, dass die Wärmebewegung eine ungeordnete ist; unter dieser einzigen Voraussetzung gilt der Satz vom Virial und erweist sich als günstigen Ausgangspunkt; zweitens die Annahme, dass die Molecüle Systeme materieller Punkte, der Atome seien: man muss diese Voraussetzung als

---

1) M. Planck, 64. Naturforscher-Versammlung, Halle 1891. Ztschr. f. physik. Chem. 8. p. 647. 1891.

erste Annäherung an die Wirklichkeit gelten lassen [1]) und als die einzige, bei welcher wir gleichzeitig die mathematischen Schwierigkeiten zu überwinden im Stande sind.

Clausius hat für Bewegungen, welche in seinem Sinne „stationär" sind, die Gleichung abgeleitet, die nach seinem Vorgange der Satz vom Virial genannt wird. [2]) Unter stationärer Bewegung versteht Clausius eine solche, „bei der die Punkte sich nicht immer weiter von ihrer ursprünglichen Lage entfernen, und die Geschwindigkeiten sich nicht immer fort und fort in gleichem Sinne ändern, sondern bei der die Punkte sich innerhalb eines begrenzten Raumes bewegen und die Geschwindigkeiten nur innerhalb gewisser Grenzen schwanken. Es gehören dahin alle periodischen Bewegungen, wie die Bewegungen der Planeten um die Sonne und die Schwingungen elastischer Körper; ferner solche unregelmässige Bewegungen, wie man sie den Atomen und Molecülen eines Körpers zuschreibt, um seine Wärme zu erklären." *Vor* Clausius haben Jacobi [3]) und Hr. Lipschitz [4]) bereits die dem Virialsatz zu Grunde liegende allgemeinere Gleichung abgeleitet; *nach* Clausius hat Yvon Villarceau [5]) eine etwas andere Art der Beweisführung des Satzes selbst gegeben, welche in gewisser Beziehung allgemeiner ist, als die ursprüngliche von Clausius. Es sei ein System materieller Punkte von den Massen $m_1$, $m_2$ ... gegeben; ihre rechtwinkeligen Coordinaten zur Zeit $t$ seien $x_1, y_1, z_1 \ldots$; $\varrho_1, \varrho_2 \ldots$ ihre Entfernungen vom Anfangspunkte der Coordinaten; $u_1, u_2 \ldots$ ihre resultirenden Geschwindigkeiten; $X_1, Y_1, Z_1 \ldots$ die Componenten der auf sie wirkenden Kräfte. Die aus den Lagrange'schen Bewegungsgleichungen zunächst abzuleitende allgemeine Gleichung lautet dann:

$$(1)\qquad \sum \frac{m}{2} u^2 = \frac{1}{4} \frac{d^2}{d t^2} \sum m \varrho^2 - \frac{1}{2} \sum (X x + Y y + Z z).$$

1) Zumal durch die Hrn. Kundt und Warburg nachgewiesen ist, dass die *innere* Energie der isolirten Atome im Quecksilberdampf gegenüber der Energie der translatorischen Bewegung zu vernachlässigen ist.

2) Clausius, Sitzungsber. d. Niederrhein. Gesellsch. **27.** p. 114. 1870; Pogg. Ann. **141.** p. 125. 1870. Jubelbd. p. 411. 1874.

3) Jacobi, Vorles. üb. Dynamik, Suppl.-Bd. d. ges. Werke, p. 21—29.

4) Lipschitz, Crelles Journal, **66.** p. 363. 1866.

5) Yvon Villarceau, Compt. rend. **75.** p. 232. 1872.

Dem von Hrn. E. Budde[1]) und anderen neueren Autoren eingeführten Gebrauche entsprechend soll (abweichend von Clausius) der Momentanwerth $-\frac{1}{2}\sum(Xx + Yy + Zz)$ das Virial des Punktsystems genannt werden. Clausius bildet die Mittelwerthe beider Seiten der obigen Gleichung für eine geeignete Zeitdauer; bei periodischen Bewegungen über eine Periode; bei unregelmässigen Bewegungen über eine Zeit, innerhalb deren sehr viele Wechsel der Bewegung stattgefunden haben. Dann folgt für solche „stationäre" Bewegungen der Satz vom Virial:

$$(2) \qquad \sum\frac{m}{2}\overline{u^2} = -\frac{1}{2}\sum(\overline{Xx + Yy + Zz}).$$

*Die mittlere lebendige Kraft des Systems ist gleich seinem mittleren Virial.*

Besteht das System aus einer sehr grossen Anzahl von Punkten, die sich unregelmässig, aber im wesentlichen unter gleichen Umständen bewegen, so kommen alle möglichen Zustände gleichzeitig an verschiedenen Punkten vor. Es ist dann nicht nöthig, für jeden Massenpunkt den zeitlichen Mittelwerth zu nehmen, sondern die Werthe der lebendigen Kraft und des Virials können so genommen werden, wie sie der Lage und Bewegung in einem bestimmten Augenblicke entsprechen; die daraus gebildete Summe ändert ihren Gesammtwerth durch die einzelnen Bewegungen nicht. Für ein solches Punktsystem ist daher

$$(3) \qquad \sum\frac{m}{2}u^2 = -\frac{1}{2}\sum(Xx + Yy + Zz).$$

*Die gesammte lebendige Kraft ist jederzeit gleich dem Virial.* Die Betrachtungsweise von Yvon Villarceau ergibt diese Gleichung unmittelbar aus (1).

Zwei besonders wichtige Fälle für das Virial sind:

a) Die Kräfte sind Centralkräfte zwischen den Punkten des Systems. $r$ sei die Entfernung zweier der Massenpunkte; $f(r)$ ihre gegenseitige Anziehung; dann ist das Virial:

$$-\frac{1}{2}\sum(Xx + Yy + Zz) = \frac{1}{2}\sum r f(r)$$

und also

$$(4) \qquad \sum\frac{m}{2}\overline{u^2} = \frac{1}{2}\sum\overline{r f(r)}.$$

---

1) E. Budde, Allg. Mechanik, 1890 bei Riemer p. 293. 413.

Für den speciellen Fall einer Kreisbewegung mit constanter Geschwindigkeit sagt diese Gleichung nichts anderes aus, als dass die Centrifugalkraft gleich sei der Centralkraft.

b) Das aus sehr vielen Punkten bestehende System erfülle ein Volumen $v$, dessen Oberfläche einen gleichförmigen Normaldruck $p$ erleidet. Dann wird das Virial

$$-\tfrac{1}{2}\sum(Xx + Yy + Zz) = \tfrac{3}{2}p\,v$$

und, da die Voraussetzungen der Form (3) des Virialsatzes erfüllt sind:

$$(5) \qquad \sum\frac{m}{2}u^2 = \tfrac{3}{2}p\,v.$$

Diese Gleichung kann unmittelbar angewandt werden auf ein Gas, dessen Molecüle als Massenpunkte angenommen werden, welche keine Kräfte untereinander ausüben. Wenn die Molecüle Kräfte aufeinander ausüben, deren Componenten mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bezeichnet werden sollen, so tritt auf der rechten Seite von (5) noch das Virial dieser Kräfte hinzu; dieselbe lautet dann:

$$(6) \qquad \sum\frac{m}{2}u^2 = -\tfrac{1}{2}\sum(\mathfrak{X}x + \mathfrak{Y}y + \mathfrak{Z}z) + \tfrac{3}{2}p\,v.$$

Diese fundamentalen Entwickelungen über das Virial mussten zum Verständnisse des Folgenden vorausgeschickt werden.

### II. Der Druck eines Gases, dessen Molecüle aus mehreren Atomen bestehen.

Es soll die Volumeneinheit eines Gases betrachtet werden; die gesammte lebendige Kraft der Molecularbewegung werde mit $\Lambda$ bezeichnet. Von den Molecülen werde angenommen, dass sie aus einem System von Massenpunkten, den Atomen, bestehen; die gegenseitigen Abstände der Atome desselben Molecüls sollen mit $r$ bezeichnet werden; $f(r)$ seien die Kräfte, welche die Atome desselben Molecüls untereinander ausüben; Anziehung positiv gerechnet. $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ seien die Componenten der Kräfte, welche die Molecüle als Ganzes untereinander ausüben; endlich stehe das Gas unter dem Drucke $p$. Dann gibt der Virialsatz für die Volumeneinheit:

$$(7) \qquad \Lambda = \tfrac{1}{2}\sum r f(r) - \tfrac{1}{2}\sum(\mathfrak{X}x + \mathfrak{Y}y + \mathfrak{Z}z) + \tfrac{3}{2}p.$$

Es werde mit $\Lambda_a$ die gesammte lebendige Kraft der fort-

schreitenden Bewegung der Molecüle bezeichnet; mit $\varDelta_i$ diejenige der inneren Bewegung der Atome, also diejenige der Bewegung der Atome relativ zum Schwerpunkte der Molecüle, welchen sie angehören. Dann ist

$$\varDelta = \varDelta_i + \varDelta_a.$$

Auf die innere Bewegung der Atome allein genommen lässt sich nun ebenfalls der Virialsatz anwenden; in einem gegebenen Augenblicke kommen alle möglichen Zustände der relativen Bewegung und Lage, welche die Atome *eines* Molecüls nacheinander annehmen, gleichzeitig bei den verschiedenen Molecülen vor. Also ist

$$\varDelta_i = \tfrac{1}{2} \sum r f(r)$$

und aus (7) folgt:

$$\varDelta_a = -\tfrac{1}{2} \sum (\mathfrak{X} x + \mathfrak{Y} y + \mathfrak{Z} z) + \tfrac{3}{2} p. \tag{8}$$

Der Vergleich mit (6) zeigt, dass bei mehratomigen Gasen für die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung der Molecüle dieselbe Beziehung zum Drucke besteht, wie bei Gasen, deren ganze Molecüle als materielle Punkte betrachtet werden. Mittelbar können aber die Kräfte der Atome untereinander und die intramoleculare Bewegung sich in der Gleichung (8) geltend machen, insofern, als die Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der Molecüle untereinander, welche hauptsächlich beim Zusammenstoss der Molecüle wirksam werden, von den Kräften der Atome untereinander und deren Bewegung abhängen können.

Das von den Kräften $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ herrührende Glied in (8) ist jedenfalls sehr klein, und also auch bei mehratomigen Gasen sehr nahe

$$\varDelta_a = \tfrac{3}{2} p. \tag{9}$$

Die vorstehende Schlussfolgerung, welche auf der Anwendbarkeit des Virialsatzes auf die intramoleculare Bewegung beruht, ist eben deswegen ihrem inneren Sinne nach identisch mit einer von Clausius in Worten ausgesprochenen Ueberlegung.[1] Clausius schliesst folgendermaassen: Wenn die Molecüle eines Gases sich bei ihrem Anprall gegen eine Wand wie elastische Kugeln verhielten, so würde durch den Stoss

1) Clausius, Mechanische Wärmetheorie, 3. p. 6 und 7.

die zur Wand senkrechte Geschwindigkeitscomponente umgekehrt. Nun bestehen aber die Molecüle aus Atomen, die ausser der Gesammtbewegung der Molecüle noch besondere Bewegungen haben. Wir haben es daher beim Anprall gegen eine Wand mit der besonderen Wirkung der vom Stosse zunächst betroffenen Bestandtheile (Atome) zu thun. Je nach den Phasen, welche die Bewegung der letzteren im Momente des Stosses haben, können sie die durch den Stoss entstehende Bewegung der ganzen Molecüle in verschiedener Weise beeinflussen. — Dieses bezieht sich aber nur auf die einzelnen Stösse. Unter der Voraussetzung, dass die verschiedenen Bewegungen in dem Gase sich einmal so ausgeglichen haben, dass die fortschreitende Bewegung durch die Bewegungen der Bestandtheile durchschnittlich nicht vermehrt oder vermindert wird, kann man annehmen, dass die Molecüle auch nach dem Abprallen von einer Wand durchschnittlich dieselbe lebendige Kraft haben, wie beim Heranfliegen, und dass unter den abgeprallten Molecülen alle von der Wand fortgehenden Richtungen ebenso vertreten sind, wie unter den heranfliegenden Molecülen die nach der Wand hingehenden Richtungen. Dann aber macht es bei der Bestimmung des Druckes keinen Unterschied mehr, wenn man statt der nur durchschnittlichen Gleichheit eine bei jedem einzelnen Stosse stattfindende Gleichheit annimmt, d. h. wenn man annimmt, dass die Molecüle nach denselben Gesetzen abprallen, wie elastische Kugeln an einer festen Wand.

### III. Ueber die Abhängigkeit der Dissociation von der Temperatur.

Die Erscheinungen der Dissociation sind vom thermodynamischem Standpunkte aus erschöpfend behandelt. Die frühere Ansicht, dass alle chemischen Verbindungen bei hinreichend hoher Temperatur dissociirt würden, hat sich als irrig erwiesen. An ihrer Stelle ist der zuerst von Hrn. W. Gibbs ausgesprochene Satz getreten, dass die Dissociation, wie jede andere chemische Reaction, nur dann mit steigender Temperatur fortschreitet, wenn sie mit Wärmeverbrauch verbunden ist; ist sie dagegen mit Wärmeentwickelung verbunden. so schreitet sie bei fallender Temperatur fort. Mit anderen Worten: Die unter Wärmeentwickelung gebildeten Verbin-

dungen sind bei niedriger Temperatur beständiger, als bei höherer; die unter Wärmebindung entstehenden Verbindungen sind bei höherer Temperatur beständiger, als bei niedriger. Jedoch gilt die Beziehung in dieser Einfachheit nur unter der Voraussetzung, dass die bei der Dissociation auftretende Wärmetönung von der Temperatur unabhängig sei. Da die zur ersteren Klasse gehörigen Verbindungen an Zahl weit überwiegen, hat man lange das Verhalten der zur zweiten Klasse gehörigen gänzlich übersehen. Als Beispiele der bei hoher Temperatur beständigen endothermischen Verbindungen finde ich angeführt das *Cyangas* [1]), welches in den Hochofengasen sich aus den Elementen bildet und beständig ist [2]), dessen Bandenspectrum auch in demjenigen der Sonne vorkommen soll [3]); sowie das *Acetylen*, welches im electrischen Lichtbogen zwischen Kohlespitzen gebildet wird und bei hoher Temperatur sich nicht zersetzt, allerdings auch nicht immer unverändert bleibt, sondern unter Umständen sich zu den aromatischen Kohlenwasserstoffen polymerisirt. [4]) Hr. H. Jahn hat die Freundlichkeit gehabt, mich weiterhin noch auf das Verhalten des Selenwasserstoffes und des Tellurwasserstoffes [5]), des Ozon, Siliciumsesquichlorid, Siliciumsubchlorid und Siliciumsubfluorid, Platinchlorür, Silberoxydul [6]) aufmerksam zu machen. Die Stabilität dieser Substanzen nimmt bei steigender Temperatur zunächst ab, dann aber wieder zu; sie zeigen bei sehr hohen Temperaturen eine zum Theil grosse Stabilität. Von Selenwasserstoff [7]), Tellurwasserstoff [8]) und Ozon ist auch bekannt, dass sie unter Wärmebindung aus ihren Elementen resp. ge-

---

1) Ostwald, 64. Naturforschervers. Halle 1891; Naturw. Rdsch. **6.** p. 580. 1891.

2) Michaelis, Anorgan. Chemie **2.** p. 851, 854.

3) Lockyer, Liveing u. Dewar, vgl. Kayser, Spectralanal. p. 249.

4) Berthelot, Ann. chim. (4) **13.** p. 143. 1868; Michaelis, Anorg. Chem. **2.** p. 756. 759.

5) Ditte, Compt. rend. **74.** p. 980. 1872; Ann. scientif. de l'Ecole norm. sup. (2) **1.** p. 239. 1872.

6) Troost u. Hautefeuille, Compt. rend. **73.** p. 443, p. 563. 1871; **74.** p. 980. 1872.

7) Hautefeuille, Compt. rend. **68.** p. 1554. 1868; Michaelis, Anorg. Chem. **1.** p. 788.

8) Berthelot et Ch. Fabre, Compt. rend. **105.** p. 92. 1887.

wöhnlichem Sauerstoff entstehen; sie fügen sich also auch dem obigen thermodynamischen Gesetze; die Zersetzung der anderen oben angeführten Verbindungen geschieht nicht einfach in die Elemente, sondern in complicirterer, zum Theil noch nicht aufgeklärter Weise; die Wärmetönungen sind unbekannt.

Für uns ist das wesentliche, dass es eine Reihe von Verbindungen gibt, welche bei höherer Temperatur stabiler sind, als bei niederer. Dieses Verhalten ist schwer vereinbar mit der üblichen Vorstellung, dass die Wärmebewegung stets die bestehenden Molecüle zu zerstören strebe. Man hält dies allgemein für selbstverständlich; das scheint mir aber nicht berechtigt. Unbewusst liegt dem wohl die Vorstellung zu Grunde, als ob die Atome durch Kräfte von der Art der elastischen Kräfte in den Molecülen zusammengehalten werden; dann wird allerdings mit steigender Temperatur, also mit zunehmender lebendiger Kraft, auch der mittlere Abstand grösser werden. Werden aber zwei Atome beispielsweise durch eine Kraft zusammengehalten, welche nach dem Newton'schen Gesetze wirkt, verhalten sie sich also ähnlich einem Doppelsternsystem, so wird umgekehrt der mittlere Abstand kleiner werden müssen, wenn die mittlere lebendige Kraft wachsen soll. Dies gibt einen Anhalt zur Vorstellbarkeit der bei höherer Temperatur grösseren Stabilität gewisser chemischer Verbindungen. Die folgenden Ueberlegungen formuliren denselben schärfer, als der Vergleich mit Doppelsternsystemen.

Der Virialsatz in der Form der Gleichung (2) kann angewandt werden auf die intramoleculare Bewegung der Atome in einem Molecül. Nennt man $L_i$ die innere lebendige Kraft in einem Molecül, so folgt daher:

$$\overline{L_i} = \tfrac{1}{2} \sum \overline{r f(r)}, \tag{10}$$

wo die Summe über alle Combinationen der Atome in einem Molecüle zu je zweien zu erstrecken ist. Nun wächst $\overline{L_i}$ mit steigender Temperatur, also auch $\sum \overline{r f(r)}$. Nehmen wir ein aus zwei Atomen bestehendes Molecül an, so würden wir bei gegebenem $f(r)$ zwar noch nicht die Abhängigkeit des mittleren Abstandes $\overline{r}$ selbst, aber doch die Abhängigkeit des Mittelwerthes einer Function $\overline{r f(r)}$ von $r$ von der Temperatur aus der Gleichung (10) kennen. Ueber die Kräfte $f(r)$ kann man

sehr wenig sicheres sagen. Jedenfalls müssen sie so beschaffen sein, dass unter ihrem Einflusse eine stabile intramoleculare Bewegung möglich ist; daraus folgt, dass die Anziehungen über die Abstossungen in einer gewissen Weise überwiegen müssen, was die Gleichung (10) durch die Nothwendigkeit eines positiven Werthes von $\overline{\sum r f(r)}$ ausspricht.

Aus dieser Gleichung — und darauf kommt es uns an — lässt sich durchaus nicht schliessen, dass der mittlere Abstand $\bar{r}$ der Atome unter allen Umständen bei steigender Temperatur, also bei wachsendem $\bar{L}_i$ gleichzeitig wachsen müsse.

Um wenigstens einigermaassen einen Anhalt zu bekommen, wie bei verschiedenen Gesetzen der Anziehung $f(r)$ die Abhängigkeit des Mittelwerthes $\bar{r}$ von der Temperatur sich gestaltet, müssen wir vereinfachende und beschränkende Annahmen machen. Dabei muss es vorläufig dahingestellt bleiben, wie das Gesetz der Anziehung beschaffen sein muss, damit die Bewegung der Atome eine stabile sei, d. h. damit dieselben zusammenhaften und dauernd dasselbe Molecül bilden. Beschränken wir uns auf zweiatomige Molecüle. Statt der wirklich stattfindenden, bei verschiedenen Molecülen verschiedenen intramolecularen Bewegung denke man sich die Atome in allen Molecülen in demselben mittleren Abstande $\varrho$ voneinander, um den Schwerpunkt ihrer Molecüle mit constanter Geschwindigkeit Kreisbahnen beschreibend. Dann wird die Gleichung (10) sich vereinfachen zu:

$$L_i = \tfrac{1}{2}\varrho f(\varrho),$$

welche Gleichung, wie schon bei (4) bemerkt wurde, identisch ist mit der Bedingung, dass Centrifugalkraft und Attraction gleich sind. Differenzire nach der Temperatur $T$, so kommt:

$$\frac{d L_i}{d T} = \tfrac{1}{2}[f(\varrho) + \varrho f'(\varrho)]\frac{d\varrho}{d T}. \tag{11}$$

Da nun $L_i$ mit $T$ wächst, so hat $d\varrho / dT$ dasselbe Vorzeichen wie $[f(\varrho) + \varrho f'(\varrho)]$. Bei mittlerem Abstande $\varrho$ muss jedenfalls Anziehung zwischen den Atomen wirksam sein; also muss $f(\varrho)$ positiv sein; ist auch $f'(\varrho)$ positiv, so ergibt sich ohne weiteres, dass $\varrho$ bei steigender Temperatur wächst. Eine Anziehung, welche mit der Entfernung $\varrho$ wächst, z. B. eine elastische

Kraft, gibt also wachsendes $\varrho$ bei Temperaturerhöhung. Von solcher Art pflegt man die Kräfte anzunehmen, welche die Atome fester Körper in ihren Gleichgewichtslagen zu halten bestrebt sind; es liegt aber kein Grund vor, dasselbe auch für die Kräfte anzunehmen, mit welchen die Atome in einem Gasmolecüle einander anziehen. Vielmehr ist die Vorstellung, dass die zwischen den Atomen eines Gasmolecüls wirksamen Kräfte mit wachsender Entfernung abnehmen, sehr wohl zulässig. Dass die zwischen den Atomen wirksame Kraft bei *grosser* Entfernung derselben voneinander abnehmen muss, und zwar schneller als $1/r \log r$, dazu zwingt die Thatsache, dass zur Dissociation eine endliche, nicht aber eine unendliche Arbeit erforderlich ist.

Lassen wir die Vorstellung zu, dass die zwischen den Atomen eines Gasmolecüls thätige Anziehung mit wachsender Entfernung abnehmen könne, und zwar bei *den* Werthen des Abstandes, wie sie bei dem unzersetzten Molecül vorkommen. In der unter vereinfachenden Annahmen gültigen Gleichung (11) kann dann $f'(\varrho)$ negative Werthe annehmen; $[f(\varrho) + \varrho f'(\varrho)]$ und damit auch $d\varrho / dT$ könnte negativ werden. Es wäre also der Fall eines mit wachsender Temperatur abnehmenden Abstandes $\varrho$ nicht ausgeschlossen.

Nun ist die Gleichung (11) nur unter vereinfachenden und beschränkenden Annahmen abgeleitet, und $\varrho$ ist nicht der mittlere Abstand der Atome. Aber die Art der Einführung von $\varrho$ erlaubt zu schliessen, dass der mittlere Abstand der Atome sich ähnlich verhalten kann, wie die Grösse $\varrho$. Die im Vorstehenden angestellten Ueberlegungen geben uns daher wenigstens einen wenn auch nur unbestimmten Anhalt für die kinetische Vorstellbarkeit eines Zusammenhaltes der Atome in dem Molecüle, welcher bei steigender Temperatur nicht zur Dissociation, sondern zu grösserer Beständigkeit einer chemischen Verbindung führen würde, welches Verhalten diejenigen Verbindungen zeigen müssen, welche unter Wärmeabsorption aus ihren Dissociationsproducten entstehen.

### IV. Annahme eines einfachen Kraftgesetzes führt zu Widersprüchen.

Es soll versucht werden, zu welchen Consequenzen die denkbar einfachsten Annahmen über das Gesetz führen, nach

welchem die Atome eines zweiatomigen Gasmolecüls einander anziehen. Diese Anziehung möge proportional einer Potenz der Entfernung $r$ angenommen werden. Wie schon erwähnt, zwingt dann die Thatsache einer *endlichen* Dissociationswärme zur Folgerung, dass die Kraft schneller abnimmt, als die Minus erste Potenz. Setzen wir also:

$$f(r) = c^2 / r^n,$$

wo $n > 1$ sein muss. Die Gleichung (10) gibt dann:

$$\overline{L_i} = \frac{c^2}{2} \cdot \overline{1 / r^{n-1}}.$$

Für die innere potentielle Energie eines Molecüls ergibt sich, wenn wir ihren Werth für $r = \infty$ zu Null annehmen:

$$\varphi(r) = -\int_r^\infty f(r)\, d r = -\frac{c^2}{n-1} \cdot \frac{1}{r^{n-1}},$$

und also ihr Mittelwerth:

$$\overline{\varphi(r)} = -\frac{c^2}{n-1} \cdot \overline{1 / r^{n-1}} = -\frac{2}{n-1} \overline{L_i}.$$

Die gesammte mittlere innere Energie des Molecüls wird:

$$\overline{E_i} = \overline{L_i} + \overline{\varphi(r)} = \frac{n-3}{n-1} \overline{L_i},$$

woraus durch Differentiation nach der Temperatur $T$:

$$\frac{d}{d T}\left(\overline{E_i}\right) = \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{d}{d T}\left(\overline{L}\right).$$

Nun wächst sowohl $\overline{E_i}$ als $\overline{L_i}$ mit steigender Temperatur, mithin muss $(n-3)/(n-1)$ positiv sein; und da wir bereits $n > 1$ schliessen mussten, so folgt weiter $n > 3$.

Für Anziehungskräfte, welche einer negativen Potenz der Entfernung proportional sind, bildet aber die Minus dritte Potenz die Grenze, bis zu welcher überhaupt noch stabile Bewegung möglich ist. Es ergibt sich dies in allgemeinerer Form aus der bereits oben erwähnten Untersuchung von Hrn. Lipschitz.[1]) Am einfachsten gelangt man wohl auf anderem Wege zu diesem Resultate, wenn man den Satz von der lebendiger Kraft in Polarcoordinaten ausdrückt und die Winkel-

geschwindigkeit mit Hülfe des Flächensatzes eliminirt; geradlinige Bewegung in Richtung der Verbindungslinie sei ausgeschlossen; es resultirt dann eine Gleichung, die $(dr/dt)^2$ als Function von $r$ angibt. Durch Betrachtung der Möglichkeit des Verschwindens von $dr/dt$ lassen sich Schlüsse auf der Stabilität der Bewegung ziehen, auch für den allgemeinen Fall, dass von der auftretenden Kräftefunction nur vorausgesetzt wird, dass sie einer Anziehung entspricht. Es ergibt sich: Ist die Attraction der dritten und höheren Potenzen der Entfernung umgekehrt proportional, so entfernen sich die beiden Massenpunkte entweder schliesslich ins Unendliche voneinander, oder sie nähern sich schliesslich immer mehr und fallen nach Ablauf einer endlichen Zeit zusammen; als labiler Grenzfall kann Kreisbewegung mit constanter Geschwindigkeit vorkommen. Stabile Bewegung ist also unmöglich; mithin kann ein derartiges Gesetz nicht als zwischen den Atomen eines Molecüls wirksam angenommen werden; da andererseits die vorherigen Ueberlegungen zu dem Postulate eines solchen Gesetzes führten, so ist ersichtlich, dass überhaupt die Annahme einer Anziehung proportional einer positiven oder negativen Potenz der Entfernung $r$ unzulässig ist. (Eine derartige Annahme ist z. B. von Pilling gemacht und ihre Consequenzen durchgerechnet worden.)[2])

Da schon die allerersten Schlüsse aus der Annahme eines solchen einfachen Kraftgesetzes zu Widersprüchen führen, ist es nicht zu verwundern, dass man dabei auch zu Widersprüchen gelangt, wenn man aus Boltzmann's kinetischer Theorie mehratomiger Gase das Verhältniss der lebendigen Kraft der fortschreitenden zu derjenigen der inneren Bewegung eines Molecüls entnimmt, und den Exponenten $n$ einerseits aus der Dissociationswärme von Untersalpetersäure oder Joddampf, andererseits aus dem Verhältniss der specifischen Wärmen berechnet. Hieraus hatte ich die Unmöglichkeit einer Anziehung umgekehrt proportional einer Potenz des Abstandes

1) R. Lipschitz, Crelles Journal. **66.** p. 363. 1866; auch **78.** p. 336. 1874.

2) Pilling, Beziehungen der Wärmecapacität der Gase zu den zwischen den Atomen wirkenden Kräften. Inauguraldissert. Jena 1876. O. E. Meyer, kinet. Gastheorie. p. 97.

der Atome bereits früher gefolgert[1]), ehe ich erkannt hatte, dass der Widerspruch, wie im Vorstehenden gezeigt, weit tiefer begründet ist.

### V. Boltzmann's kinetische Theorie mehratomiger Gase.

Die kinetische Gastheorie Maxwell's betrachtet die Molecüle als materielle Punkte. Der Zustand derselben ist bekannt, wenn die Wahrscheinlichkeit gegeben ist, dass die Geschwindigkeit eines Molecüls in einem bestimmten Intervall liegt. Die resultirende Geschwindigkeit werde mit $c$ bezeichnet; mit $m$ die Masse eines Molecüls. Dann ist nach Maxwell die Wahrscheinlichkeit, dass die Componenten der Geschwindigkeit des Molecüls zwischen $u$ und $u + du$, $v$ und $v + dv$, $w$ und $w + dw$ liegen, gleich

$$\sqrt{\left(\frac{h m}{2 \pi}\right)^3} e^{-h \frac{m}{2} c^2} du\, dv\, dw.$$

Die Constante $h$ ist der absoluten Temperatur umgekehrt proportional. Zum Verständnisse des Folgenden werde daran erinnert, dass Maxwell seinen Ausdruck dadurch ableitet, dass er den Einfluss des Zusammenstosses zweier Molecüle betrachtet. Die Wahrscheinlichkeit, dass das eine Molecül einem gewissen kleinen Geschwindigkeitsgebiet, und gleichzeitig das andere einem anderen solchen Gebiete angehört, darf durch den Zusammenstoss nicht geändert werden. Diese Wahrscheinlichkeit ist, wenn wir die bezüglichen Grössen für das zweite Molecül mit einem Strich bezeichnen:

$$\sqrt{\left(\frac{h m}{2 \pi}\right)^3 \left(\frac{h m'}{2 \pi}\right)^3} e^{-h\left(\frac{m}{2} c^2 + \frac{m'}{2} c'^2\right)} \int du\, dv\, dw\, du'\, dv'\, dw',$$

wo die Integration über die beiden kleinen Gebiete zu erstrecken ist. Die im Exponenten auftretende Summe der lebendigen Kräfte ändert sich in der That nicht durch den Zusammenstoss; Maxwell leitet die Form der Function aus dieser Bedingung ab, nachdem er nachgewiesen hat, dass das Integral durch den Zusammenstoss seinen Werth nicht ändert.

Ganz analog verfährt Hr. L. Boltzmann in seiner Abhandlung „Ueber das Wärmegleichgewicht zwischen mehr-

1) F. Richarz, Verhandl. der physikal. Gesellsch. zu Berlin. **10.** p. 73. 1891.

atomigen Gasmolecülen".[1]) Er betrachtet ein Molecül als ein System von r materiellen Punkten, den Atomen, welche durch conservative Kräfte zusammengehalten werden. Die Coordinaten der Atome in Bezug auf den Schwerpunkt des Molecüls werden mit $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2, \eta_2, \zeta_2 \ldots \xi_r, \eta_r, \zeta_r$ bezeichnet. $\xi_r, \eta_r, \zeta_r$ sind dann durch die Coordinaten der $r-1$ anderen Atome bestimmt, da der Schwerpunkt Coordinatenanfangspunkt ist. Die absoluten Geschwindigkeiten der Atome, zusammengesetzt aus der relativen Bewegung gegen den Schwerpunkt und der gemeinsamen Bewegung mit demselben, seien $c_1, c_2 \ldots$; ihre Componenten $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 \ldots$ Der Zustand des Molecüls ist dann bestimmt, wenn die Variabeln $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \xi_2 \ldots \zeta_{r-1}, u_1, v_1, w_1, u_2 \ldots w_r$ gegeben sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese gleichzeitig zwischen $\xi_1$ und $\xi_1 + d\xi_1$ bez. $\eta_1$ und $\eta_1 + d\eta_1, \ldots w_r$ und $w_r + dw_r$ liegen, möge mit $dW$ bezeichnet werden. Wenn $\chi$ die potentielle Energie der Atomkräfte, $m_1, m_2, \ldots m_r$ die Massen der Atome sind, so findet Hr. Boltzmann die Wahrscheinlichkeit jenes Zustandsintervalles

$$(12) \qquad dW = Ce^{-h\left(\chi + \frac{m_1}{2}c_1^2 + \frac{m_2}{2}c_2^2 + \ldots\right)} d\xi_1 \, d\eta_1 \ldots dw_r.$$

Im Exponenten tritt die Gesammtenergie $E$ des Molecüls auf. Bildet man den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Molecül einem gewissen kleinen Zustandsgebiete angehört und gleichzeitig ein zweites einem anderen Gebiete, so tritt im Exponenten die Summe der Gesammtenergien beider Molecüle $E + E'$ auf, welche durch den Zusammenstoss nicht geändert wird. Die Analogie mit Maxwell's Ausdruck ist daraus ersichtlich.

Der Ausdruck für $dW$ zeigt, dass der Zustand eines Molecüls nur von der die Temperatur bestimmenden Constante $h$ abhängt, welche für alle in Wechselwirkung stehenden Molecüle im Zustande des Wärmegleichgewichts denselben Werth haben muss. Der Mittelwerth $\overline{X}$ einer Function $X$ ist

$$(13) \qquad \overline{X} = \int X \, dW,$$

---

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. der Wien. Akad., math. Cl. 63. p. 417. 1871.

wo die Integration über alle möglichen Werthe der Variabeln zu erstrecken ist. Die Constante $C$ bestimmt sich aus der Bedingung, dass

(14) $$\int d\,W = 1.$$

Enthält eine Function $X$ nur die Geschwindigkeiten, so fällt $\chi$ heraus und der Mittelwerth $\bar{X}$ lässt sich sofort angeben. Für die mittlere lebendige Kraft der gesammten Bewegung eines Atoms, z. B. des ersten, findet man

(15) $$\frac{m_1}{2}\overline{c_1^{\,2}} = \frac{3}{2\,h}.$$

Die mittlere lebendige Kraft ist also für alle Atome der in Wechselwirkung stehenden Molecüle gleich; mithin kann die mittlere lebendige Kraft eines Atoms als Maass der Temperatur betrachtet werden.

Werden mit $u$, $v$, $w$ ohne Index die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes des Molecüls bezeichnet, so ergibt sich

(16) $$\frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_r}{2}\overline{(u^2 + v^2 + w^2)} = \frac{m_1}{2}\overline{c_1^{\,2}} = \frac{m_2}{2}\overline{c_2^{\,2}} = \ldots = \frac{3}{2\,h}.$$

Die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Molecüls ist also gleich der gesammten mittleren lebendigen Kraft jedes Atoms.

Bestehen die Molecüle aus je zwei Atomen, so folgt aus (15) die gesammte mittlere lebendige Kraft eines Molecüls

$$\overline{L} = \frac{3}{h}.$$

Nach (16) ist die mittlere lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Molecüls

$$\overline{L_a} = \frac{3}{2\,h}.$$

Die mittlere lebendige Kraft der inneren Bewegung wird also bei einem zweiatomigen Molecüle

$$\overline{L_i} = \overline{L} - \overline{L_a} = \frac{3}{2\,h} = \overline{L_a}.$$

Hr. Boltzmann weist l. c. darauf hin, dass bei den zweiatomigen Gasen, bei welchen das Verhältniss der specifischen Wärmen den Werth 1,4 hat, diesem Werthe entsprechend die mittlere lebendige Kraft jedes Atoms, *wenn man von innerer*

*Arbeit absieht*, nur das 0,81 fache der lebendigen Kraft der fortschreitenden Bewegung eines Molecüls betragen würde. Nimmt man das Resultat der Theorie, dass beide Grössen gleich sind, als richtig an, so würde zu schliessen sein, dass die zwischen den Atomen eines Molecüls wirksamen Kräfte bei Temperatursteigerung positive Arbeit leisten, durch welche die lebendige Kraft der Atome in dem von der Theorie verlangten Verhältnisse erhöht wird, wie Hr. Boltzmann selbst in einer früheren Arbeit entwickelte.[1]) Da nun die Kräfte, welche die Atome zusammenhalten, anziehende sein müssen, werden wir hier zum zweitenmale darauf hingeführt, die Möglichkeit einer Annäherung der Atome bei Erhöhung der Temperatur ins Auge zu fassen.

Da aus der Vernachlässigung der inneren Arbeit der intramolecularen Kräfte von namhafter Seite ein Einwand gegen Boltzmann's Theorie entnommen wurde[2]), schien es mir wünschenswerth, auf die Nothwendigkeit ihrer Berücksichtigung noch einmal hinzuweisen.

Was nun das Verhältniss der Voraussetzungen von Hrn. Boltzmann zur Wirklichkeit betrifft, so kann man wohl bei zweiatomigen Molecülen die Vorstellung der Atome als frei beweglicher Punkte als annähernd erfüllt annehmen. Bei drei- und mehratomigen Molecülen treten aber besondere Schwierigkeiten auf. Die Chemie verlangt für die Atome in einem Molecüle eine ganz bestimmte Anordnung, durch welche die Constitution gegeben ist. Z. B. muss in einem Kohlensäuremolecüle stets das Kohlenstoffatom sich zwischen den beiden Sauerstoffatomen befinden. Dem vermag die freie Beweglichkeit der punktförmigen Atome in Boltzmann's Theorie nicht Rechnung zu tragen. Bei zweiatomigen Molecülen fällt dieses Bedenken weg.

### VI. Bedingungen der Stabilität der Molecüle.

In der Theorie von Hrn. Boltzmann ist nicht die Voraussetzung enthalten, dass die zwischen den Atomen eines Molecüls wirkenden Kräfte ein dauerndes Zusammenhaften derselben bewirken; seine Theorie gilt auch, wenn dies nicht der Fall ist.

---

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. der Wien. Akad., math. Cl. 56. p. 682. 1867.

2) O. E. Meyer, Kinet. Gastheorie. p. 95.

Die Bedingungen der Stabilität der Molecüle lassen sich aus dem Ausdrucke (12) ableiten. Es lässt sich von vornherein sagen, dass dieselben weitergehende sein müssen, als die Bedingungen der Stabilität der Bewegung *eines* Systems freier Massenpunkte; denn durch die Zusammenstösse kann eine ursprünglich stabile innere Bewegung eines Molecüls in eine instabile verwandelt werden. Wir müssen uns dabei auf Molecüle, welche aus zwei Atomen bestehen, beschränken.

Aus der Boltzmann'schen Wahrscheinlichkeit eines Zustandsintervalles (Gleichung (12)) ergibt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die auf den Schwerpunkt des Molecüls bezogenen Coordinaten der Atome zwischen $\xi_1, \eta_1 \ldots \zeta_{\mathfrak{r}-1}$ und $\xi_1 + d\xi_1$, $\eta_1 + d\eta_1 \ldots \zeta_{\mathfrak{r}-1} + d\zeta_{\mathfrak{r}-1}$ liegen, während gleichzeitig die Geschwindigkeiten $c_1, c_2 \ldots c_{\mathfrak{r}}$ alle möglichen Werthe annehmen, zu:

$$dW' = Ce^{-h\chi} d\xi_1\, d\eta_1 \ldots d\zeta_{\mathfrak{r}-1} \int e^{-h\left(\frac{m_1}{2} c_1^2 + \ldots\right)} du_1 \ldots dw_{\mathfrak{r}}.$$

Aus (14) folgt:

$$1 = C\int e^{-h\chi} d\xi_1\, d\eta_1 \ldots d\zeta_{\mathfrak{r}-1} \int e^{-h\left(\frac{m_1}{2} c_1^2 + \ldots\right)} du_1 \ldots dw_{\mathfrak{r}}.$$

Mithin:

$$dW' = \frac{e^{-h\chi} d\xi_1\, d\eta_1 \ldots d\zeta_{\mathfrak{r}-1}}{\int e^{-h\chi} d\xi_1\, d\eta_1 \ldots d\zeta_{\mathfrak{r}-1}},$$

wo die Integration über alle möglichen Werthe der unabhängigen Coordinaten auszudehnen ist. Ist die Zahl der Atome $\mathfrak{r} = 2$, so folgt

$$dW' = \frac{e^{-h\chi} d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1}{\int e^{-h\chi} d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1}.$$

Der Abstand des Atoms 1 vom Anfangspunkt (= Schwerpunkt) werde $\varrho$ genannt; $\chi$ sei nur vom Abstand $r$ der beiden Atome (oder also auch nur von $\varrho$) abhängig. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand vom Anfangspunkt zwischen $\varrho$ und $\varrho + d\varrho$ liege, ergibt sich dann aus $dW'$ durch Integration über eine Kugelschale, und wird

$$dW_\varrho = \frac{e^{-h\chi} \varrho^2 d\varrho}{\int e^{-h\chi} \varrho^2 d\varrho}.$$

Da nun $r$ ein constantes Vielfaches von $\varrho$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Abstand der Atome zwischen $r$ und $r + dr$ liege:

$$(17) \qquad dW_r = \frac{e^{-h\chi}r^2\,dr}{\int\limits_0^R e^{-h\chi}r^2\,dr},$$

wo $R$ einen grossen Werth von $r$ bedeutet, über welchen hinaus die Atome nicht mehr zu einem Molecüle verbunden sind. Es fragt sich, welche Eigenschaften dieser Ausdruck haben muss, wenn mittlere Werthe von $r$ die wahrscheinlichsten, grosse Werthe von $r$ gegen $R$ hin und kleine Werthe von $r$ gegen Null hin sehr selten sein sollen.

Der Nenner von (17) sei endlich und von Null verschieden (Annahme $\alpha$). Dann muss das Integral des Zählers von (17) genommen über ein Intervall von $r$, welches sehr selten sein soll, sehr klein sein (gegen den Nenner); bezeichnen wir einen solchen Werth mit $\varepsilon$.

Es sei $R'$ ein grosser Werth von $r$, aber kleiner als $R$. Sollen grosse Werthe von $r$ sehr selten sein, so muss für grosse $r$ sein:

$$(18) \qquad \int\limits_{R'}^{R} e^{-h\chi}r^2\,dr = \varepsilon.$$

Es sei $\delta$ ein kleiner Werth von $r$. Sollen kleine Werthe von $r$ sehr selten sein, so muss sein:

$$(19) \qquad \int\limits_0^{\delta} e^{-h\chi}r^2\,dr = \varepsilon.$$

Sollen mittlere Werthe von $r$ häufig gegenüber kleinen und grossen sein, so muss

*für mittlere r*:
(20) $\begin{cases} \int e^{-h\chi}r^2\,dr \text{ gross gegen } \varepsilon, \text{ oder} \\ e^{-h\chi}r^2 \text{ endlich von Null verschieden sein.} \end{cases}$

Die potentielle Energie $\chi$ muss so beschaffen sein, dass diesen Bedingungen genügt wird. $\chi$ enthält eine willkürliche Constante $A$; wir werden sogleich sehen, dass die Annahme ($\alpha$), welche willkürlich ist und nur den Zweck der übersichtlichsten

Festlegung der Grössenordnungen für (18), (19), (20) hat, über die Constante $A$ zugleich in gewisser Weise verfügt. Wir setzen:

(21) $$\chi = A - U.$$

Dann ist $U$ die Kräftefunction, deren *positiv* genommene partielle Differentialquotienten die Kraftcomponenten sind. Bei Abständen der Atome voneinander, welche gleich oder grösser sind, als deren mittlere Entfernung, muss zwischen denselben eine Anziehung wirksam sein; bei überaus grosser Entfernung $r$ der beiden Atome muss dieselbe verschwinden. Ferner ist die Dissociationsarbeit endlich. Setzen wir daher fest, dass $U=0$ für sehr grosse $r$, so muss für endliche $r$ des definirten Entfernungsgebietes $U$ endlich positiv sein und bei wachsendem $r$ abnehmen.

Ein Theil der Annahme ($\alpha$) ist, dass derjenige Theil des Nenners von (17), welcher sich auf grosse Werthe von $r$ bezieht, nicht unendlich werde. Dies ist zugleich mit der Gleichung (18) erfüllt. Das Integral in dieser Gleichung gibt aber noch sehr Grosses, wenn $e^{-h\chi}r^2$ für grosse $r$ abnimmt wie $1/r\log r$; es muss also schneller abnehmen, oder es muss sein:

(22) $$e^{-h\chi}R^3\log R = 0.$$

Da $U$ für grosse $r$ verschwindet, wird in (22) $\chi = A$; es muss also hiernach $A.h$ gross positiv sein in der durch (22) vorgeschriebenen Weise.

Ein weiterer Theil der Annahme ($\alpha$) ist, dass der von von kleinen Werthen von $r$ herrührende Theil des Nenners von (17) nicht unendlich werde.[1]) Dies ist zugleich mit der Gleichung (19) erfüllt, welche wiederum verlangt, dass $e^{-h\chi}r^2$, wenn es überhaupt für verschwindendes $r$ sehr gross wird, langsamer wachse als $1/r\log r$; dass also:

(23) $$\Big[e^{-h\chi}r^3\log r\Big]_{r=0} = 0.$$

Es darf also $-h\chi = -hA + hU$, wenn es für $r=0$ überhaupt unendlich grosse positive Werthe annimmt, höchstens in

1) In diesem Punkte verdanke ich Hrn. Boltzmann eine wesentliche Verschärfung der Beweisführung.

der durch (23) vorgeschriebenen Weise logarithmisch unendlich werden, was nur dadurch geschehen könnte, dass $U$ logarithmisch unendlich würde. Dies ist eine Bedingung für das Verhalten der zwischen den Atomen wirksamen Kräfte bei verschwindendem Abstande.

Nun hat $U$ für mittlere Werthe von $r$ einen endlichen positiven Werth. Geht man von solchen zu verschwindenden Werthen von $r$ über, so ist *die* Vorstellung die plausibelste, dass man der räumlichen Ausdehnung und Undurchdringlichkeit der Atome dadurch Rechnung zu tragen hat, dass man unterhalb eines gewissen kleinen Werthes von $r$ Abstossung annehmen muss. Dann ist ein Unendlichwerden von $U$ für $r = 0$ ausgeschlossen. Der Allgemeinheit halber soll aber auch die Annahme einer Anziehung bis zu verschwindendem $r$ zugelassen werden. Dann wächst $U$ bei abnehmendem $r$ bis zu $r = 0$. Bleibt es aber auch noch für $r = 0$ endlich, so steht dem von seiten der Gleichung (23) nichts entgegen.

Wenn $U$ für $r = 0$ endlich bleibt, so bleiben auch die Geschwindigkeiten endlich, wie aus dem Satze der lebendigen Kraft unmittelbar folgt. Wächst aber $U$ bei verschwindendem $r$ über jede Grenze, so werden auch die Geschwindigkeiten für $r = 0$ unendlich und schon die Stabilität *eines* Molecüls würde den Ausschluss von $r = 0$ verlangen. Für diesen Ausschluss kommt es nun auf das Maass an, in welchem $U$ bei verschwindendem $r$ unendlich wird, und man kann, ganz abgesehen davon, wie $U$ sich für endliche $r$ verhält, die bezüglichen Schlüsse, welche Hr. Lipschitz bei den Stabilitätsbetrachtungen l. c. zieht, unmittelbar anwenden. Wird $U$ ebenso schnell oder schneller unendlich, als die Minus zweite Potenz von $r$, so führt grosse Annäherung der Atome stets zum Zusammensturz derselben. Wird $U$ unendlich wie eine Potenz zwischen 0 und $-2$, diese selbst ausgeschlossen, so tritt ein Zusammenstürzen dann, und nur dann ein, wenn die Summe der Flächengeschwindigkeiten gleich Null ist, oder bei nur zwei Atomen, wenn dieselben sich geradlinig aufeinander zu bewegen. Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Bewegungsrichtung vorhanden ist, ist nun zwar verschwindend gegen die Wahrscheinlichkeit anderer Richtung; aber andererseits ist ein Zusammenstürzen der Atome mit unendlicher Geschwindigkeit

als mechanisch undenkbar *absolut* auszuschliessen. Die Gleichung (23) zeigt nun, dass von diesen bedenklichen Fällen, in welchen $U$ unendlich werden kann, nur die erste Schwelle des logarithmisch Unendlichwerdens erlaubt ist, wenn nicht ein Zusammenfallen der beiden Atome in einen Punkt an Wahrscheinlichkeit gegenüber allen anderen Entfernungen überwiegen soll.

Die Bedingungen für $\chi$, unter welchen die Gleichungen (18) und (19) erfüllt sind, sind hiermit festgestellt und erläutert; bei ihrer Befriedigung werden die von grossen und kleinen Werthen von $r$ herrührenden Theile des Nenners der Gleichung (17) nicht sehr gross, sondern verschwinden vielmehr. Da für endliche, von Null verschiedene, Werthe von $r$ sowohl $r$ als $\chi$ endlich sind, kann a limine kein anderer Theil des Nenners von (17), als die durch (18) und (19) gegebenen unendlich werden. Es bleibt also von der Annahme ($\alpha$) nur noch zu erfüllen, dass der Nenner endlich von Null verschieden sein soll. Dies ist der Fall, wenn die Bedingung (20) erfüllt ist, welche verlangt, dass $-h\chi$ für mittlere Werthe von $r$ endlich von Null verschieden sei. Wegen $-h\chi = -hA + hU$, und wegen $hA$ gross positiv, muss daher $hU$ für mittlere Werthe von $r$ grosse positive Werthe annehmen. Dieses Resultat hat eine einfache physikalische Bedeutung.

Wenn $hU$ für mittlere, also für die häufigsten Werthe von $r$ grosse positive Werthe annimmt, so ist dasselbe für $h\overline{U}$ der Fall, wo der Mittelwerth entweder in *einem* Moment über alle Molecüle zu nehmen ist, oder — und diese Auffassung wollen wir festhalten — bei *einem* Molecül über eine grosse Zeit, während deren viele Zusammenstösse stattgefunden haben. Wir bezeichnen, wie früher, mit $L_i$ die lebendige Kraft der inneren Bewegung relativ zum Schwerpunkte für beide Atome eines Molecüls zusammengenommen. Dann ist, wie auf p. 482 abgeleitet wurde:

$$\overline{L_i} = \frac{3}{2h}.$$

Wenn also $h\overline{U}$ gross positiv sein soll, so folgt auch $\overline{U}/\overline{L_i}$ gross positiv, oder $\overline{U}$ gross gegen $\overline{L_i}$. Bei gegebener lebendiger Kraft ist für die Atome die Gelegenheit zu möglichst weitem Auseinanderfahren am günstigsten, wenn sie sich geradlinig voneinander entfernen. Sie entfernen sich dann soweit von-

einander, bis die Arbeit, welche sie dabei gegen ihre Anziehung leisten, gleich geworden ist der ursprünglichen lebendigen Kraft; dann kehren sie um. Nun ist $U$ gleich (dem absoluten Werthe nach) der Arbeit, welche bei der Trennung bis zu *unendlicher* Entfernung zu leisten ist. Die Bedingung: $\overline{U}$ gross gegen $\overline{L_i}$ kann man daher in Worten folgendermaassen ausdrücken. Wenn sich die Atome von einem mittleren Abstande an geradlinig voneinander entfernen und dabei die anfängliche lebendige Kraft gleich ist dem Mittelwerthe $\overline{L_i}$, so leisten die Atome bis zum Momente der Umkehr eine Arbeit gegen ihre Anziehung, welche klein ist gegen die gesammte Arbeit bei Trennung bis zu unendlicher Entfernung. Da nun die Anziehung bei wachsendem Abstande schnell abnimmt und bei grossen Abständen verschwindet, so ist jene Bedingung identisch damit, dass die Atome bei der definirten Bewegung nur einen Maximalabstand erreichen, welcher nicht gross ist gegen den mittleren Abstand. A fortiori ist dies der Fall, wenn die angenommene Bewegungsrichtung weitem Auseinanderfahren weniger günstig ist, als die geradlinige Entfernung.

Hiermit sind die Eigenschaften festgestellt, welche $\chi$ haben muss, damit mittlere Werthe des Abstandes der Atome die wahrscheinlichsten, sehr grosse Abstände und Zusammenfallen in einen Punkt ausgeschlossen seien. In Bezug auf die übrigen Kriterien der Stabilität der Bewegung *eines* sich selbst überlassenen Systems, wie sie Hr. Lipschitz l. c. aufstellt, ist für unseren Fall, wo es sich um sehr viele in Wechselwirkung tretende Systeme handelt, Folgendes zu bemerken. Es darf irgend welche relativen Lagen geben, in welchen die Atome dauernd in Ruhe bleiben könnten; die Zusammenstösse der Molecüle vertreiben sie dann doch wieder aus diesen Lagen. Dass die „angehäufte lebendige Kraft“ mit wachsender Zeit über jede Grenze hinaus wachse [1], ist in den Grundvorstellungen der kinetischen Gastheorie bereits erfüllt, dass nämlich alle möglichen Bewegungsphasen in stetem Wechsel vorkommen und sich wiederholen. Dass Boltzmann's Theorie diese Bedingung erfüllt, ist durch die Ableitung der Mittelwerthe der lebendigen Kraft (Gleichung (15), (16)) verificirt.

1) R. Lipschitz, Crelles Journ. 78. p. 335, 336. 1874.

### VII. Ableitung des Virialsatzes aus Boltzmann's Theorie und Vergleich einer Consequenz mit der Erfahrung.

Für stabile Bewegungen gilt der Satz vom Virial. Aus dem Boltzmann'schen Ausdruck (12) für die Wahrscheinlichkeit eines Zustandsintervalles muss man also durch Anwendung auf die innere Bewegung eines zweiatomigen Molecüls den Satz vom Virial ableiten können, unter der Voraussetzung, dass die soeben abgeleiteten Bedingungen für die Stabilität der Molecüle erfüllt sind.

Der Virialsatz bezieht sich auf den Mittelwerth von $rf(r)$, wo $r$ wie immer der Abstand der Atome ist, $f(r)$ die Kraft, welche sie aufeinander ausüben, und zwar Anziehung positiv gerechnet. Zufolge letzterer Festsetzung des Vorzeichens ist

$$f(r) = \frac{d\chi}{dr}.$$

Für den gesuchten Mittelwerth gibt die Boltzmann'sche Theorie mit Hülfe der Gleichung (17)

$$\overline{rf(r)} = \frac{\int\limits_0^R r^3 \frac{d\chi}{dr} e^{-h\chi} dr}{\int\limits_0^R e^{-h\chi} r^2 dr}$$

Nun ist durch partielle Integration

$$\int r^3 e^{-h\chi} \frac{d\chi}{dr} dr = -\frac{1}{h} \cdot e^{-h\chi} r^3 + \frac{3}{h}\int e^{-h\chi} r^2 dr.$$

Also

$$\overline{rf(r)} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{\left[e^{-h\chi} r^3\right]_0^R}{\int\limits_0^R e^{-h\chi} r^2 dr} + \frac{3}{h} \tag{24}$$

Wenn nun die Molecüle stabil sein sollen, müssen die Gleichungen (22) und (23) erfüllt sein. Aus diesen folgt a fortiori, dass $e^{-h\chi} r^3$ sowohl für $r = R$, als auch für $r = 0$ verschwindet. Da nun ferner bei Stabilität wegen (20)

$$\int_0^R e^{-h\chi} r^2 dr > 0$$

ist, so folgt, dass alsdann das erste Glied der rechten Seite von (24) gleich Null wird.

Für den Mittelwerth der lebendigen Kraft der inneren Bewegung relativ zum Schwerpunkte ergaben die Gleichungen (15) und (16) bei zweiatomigen Molecülen

$$\overline{L_i} = \frac{3}{2h} \,.$$

Mithin gibt die Gleichung (24) bei stabiler Bewegung

$$\overline{L_i} = \tfrac{1}{2} \overline{r f(r)}$$

den Virialsatz in der Form der Gleichung (10).

---

Nachdem die Bedingungen der Stabilität der Molecüle festgestellt sind, und nachdem gezeigt ist, dass bei Erfüllung dieser Bedingungen der Virialsatz in der Boltzmann'schen Theorie enthalten ist, lässt sich *eine* der Bedingungen der Stabilität mit Hülfe der abgeleiteten Beziehungen an der Wirklichkeit prüfen, wie im Folgenden geschehen soll.

Aus der Bedingung (20) wurde auf p. 487 geschlossen, dass $h\overline{U}$ grosse positive Werthe haben müsse. Nun ist $h = 3/2\overline{L_i}$; also folgt:

(25) $$3\overline{U}/2\overline{L_i}$$

muss bei stabilen Molecülen grosse Werthe haben. Multiplicirt man Zähler und Nenner des vorstehenden Quotienten mit $N$, der Zahl der Molecüle in der Volumeneinheit, so tritt im Zähler $N\overline{U}$ auf. Dies ist die Arbeit, welche die zwischen den Atomen wirksamen Anziehungen leisten, wenn alle Paare von Atomen in der Volumeneinheit aus unendlicher Entfernung sich bis auf *die* mittlere Entfernung einander nähern, welche sie in der Verbindung zu Molecülen haben. Diese Arbeit ist gleich der Wärmemenge, welche der Volumeneinheit zugeführt werden muss um alle Molecüle zu dissociiren, oder die zur Dissociation der Volumeneinheit erforderliche Wärmemenge, welche mit $w$ bezeichnet werden soll. — Im Nenner von (25)

tritt $N\overline{L_i}$ auf; für zweiatomige Molecüle ist, wie aus den Gleichungen (15) und (16) geschlossen wurde, $L_i = L_a$; also $N\overline{L_i}$ gleich dem $\Lambda_a$ der Gleichung (9) und mithin

$$N\overline{L_i} = \tfrac{3}{2} p.$$

Daraus, dass der Quotient (25) für stabile Molecüle grosse Werthe haben muss, folgt daher, dass die auf die Volumeneinheit bezogene Dissociationswärme $w$ gross sein muss gegen $p$.

Bezüglich der Dissociationswärme liegen nun folgende experimentelle Daten vor. Die Untersalpetersäure $N_2O_4$ dissociirt sich zu $2 \times NO_2$; die Dissociation beginnt bei gewöhnlicher Temperatur und ist bei etwa 150° vollendet. Diese Dissociation ist für uns ganz analog derjenigen eines zweiatomigen Gasmolecüls; denn die Gruppe $NO_2$ bleibt bei derselben ungespalten und spielt die Rolle eines Atomes. Berthelot und Ogier [1]) fanden, dass für die Dissociation von 1 g Untersalpetersäuredampf etwa 144 Grammcalorien erforderlich sind. Daraus ergibt sich für die Dissociation von 1 ccm (bei 0° und Atmosphärendruck) die oben mit $w$ bezeichnete Wärmemenge:

$$w = 25 \,.\, 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Weiterhin hat nun Hr. Boltzmann eine Theorie der Dissociation entwickelt, vermöge deren der Wärmeverbrauch bei derselben berechnet werden kann, wenn die Abhängigkeit des Dissociationsgrades von Temperatur und Druck bekannt ist. [2]) Ueber diese liegen für Untersalpetersäure Messungen von Deville und Troost vor [3]), aus welchen Boltzmann einen Werth für die Dissociationswärme berechnet, welcher mit dem obigen von Berthelot und Ogier gut übereinstimmt. Dieselbe Theorie wendet Hr. Boltzmann dann auch auf die Beobachtungen von Fr. Meier und J. M. Crafts [4]) über die zwischen 600° und 1400° sich vollziehende Dissociation des Joddampfes an und findet, dass zur Dissociation eines Grammes Joddampf $J_2$ in einzelne Atome 112,5 Grammcalorien

1) Berthelot u. Ogier, Ann. d. chim. et d. phys. (5) **30.** p. 382. 1883. Ostwald, Allgem. Chemie **2.** p. 97.

2) Boltzmann, Wied. Ann. **22.** p. 39. 1884.

3) Deville u. Troost, Compt. rend. **64.** p. 237. 1867.

4) Meier u. Crafts, Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. **13.** p. 851. 1880.

erforderlich sind. Daraus ergibt sich für Jod, bezogen auf die in 1 ccm bei 0° und 76 cm vorhandene Masse:

$$w = 54 \,.\, 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Endlich hat Hr. E. Wiedemann aus Messungen der Wärmemenge, welche zur Ueberführung des Banden- in das Linienspectrum nöthig ist, gefunden, dass einem Gramm Wasserstoffgas von gewöhnlicher Temperatur zur Zerlegung in seine Atome etwa 128 000 Grammcalorien zugeführt werden müssen.[1]) Daraus ergibt sich für 1 ccm (bei 0° und Atmosphärendruck) berechnet

$$w = 483 \,.\, 10^6 \text{ Erg pro ccm.}$$

Dissociation des Wasserstoffs durch blosse Temperaturerhöhung findet, wenn überhaupt, jedenfalls erst bei sehr hohen Temperaturen statt.

Diese Werthe von $w$ sollen nun bei stabilen Molecülen gross sein gegen $p$. Bei 0° und 76 cm Barometerstand ist

$$p = 1{,}01 \,.\, 10^6 \text{ Dynen pro cm}^2,$$

$w$ ist also in der That stets erheblich grösser als $p$; und umsomehr, je weiter das betreffende Gas bei 0° von der Dissociationstemperatur entfernt ist, d. h. je stabiler es ist. Dass die vorkommenden Verhältnisse von $w$ zu $p$ im Sinne der theoretischen Erörterungen über die Stabilität der Molecüle auch geradezu als gross zu bezeichnen sind, ist daraus ersichtlich, dass dieses Verhältniss in jenen Erörterungen als Exponent von $e$ auftritt, dass also Zahlenwerthe, welche die Einheit erheblich übertreffen, schon dann als gross zu bezeichnen sind, welche, wenn sie nicht in Exponentialfunctionen auftreten würden, noch nicht als gross gelten könnten.

Berlin, im Januar 1893.

---

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **10.** p. 253. 1880; **18.** p. 509. 1883. Ostwald, Allgem. Chemie **2.** p. 49.

## VI. *Bolometrische Untersuchungen über die Stärke der Strahlung verdünnter Gase unter dem Einflusse der electrischen Entladung;* *von Knut Ångström.*

(Von dem Hrn. Verfasser abgekürzt mitgetheilt aus „Acta Reg. Soc. Upsaliensis“ 1892.)

(Hierzu Taf. V Fig. 1—12.)

---

### I. Einleitung.

In vorliegender Abhandlung will ich die Versuche, welche ich über die Strahlung verdünnter Gase unter dem Einflusse der electrischen Entladung angestellt habe, näher besprechen.[1]) Die ganz besonderen Schwierigkeiten, mit denen diese Untersuchung verbunden ist, tragen die Schuld daran, dass man hinsichtlich der Schärfe und Genauigkeit der Bestimmungen nicht zu grosse Forderungen stellen kann, und aus demselben Grunde lässt auch die Anzahl der Versuche viel zu wünschen übrig. Die hier gemessene Strahlung ist nämlich von einer so geringen Stärke; dass sogar ein so empfindliches Instrument, wie das Bolometer, sich in einigen Fällen als unzureichend erwiesen hat. Es ist übrigens eine sehr bekannte Sache, dass die Herstellung von verdünnten Gasen von solcher Reinheit, dass dieselben sich bei durchgehenden electrischen Entladungen von Verunreinigungen frei zeigen, eine der allerschwierigsten Aufgaben des Chemikers und Physikers ist. Der Werth einer Untersuchung über die electrischen und optischen Phänomene in verdünnten Gasen scheint mir jedoch von der sorgfältigen Herstellung der Gase in hohem Grade abhängig zu sein. Demzufolge habe ich keine Mühe gescheut, um dieselben so rein wie möglich zu bekommen, eine Arbeit die viel Zeit in Anspruch genommen hat. Wenn auch infolgedessen diese Untersuchung eigentlich als eine orientirende zu betrachten

---

1) In einer vorläufigen Notiz: „L'intensité de la radiation des gaz sous l'influence de la décharge électrique“ (Öfversigt af K. Vet. Akad. Förh. p. 373, 1891) habe ich die Hauptresultate der Untersuchung mitgetheilt.

ist, so werden doch die Versuche als die ersten ihrer Art gewiss nicht ohne Bedeutung für die nähere Kenntniss der Entladungsphänome in verdünnten Gasen sein und uns hoffen lassen, dass ein eingehendes Studium einzelner Fragen mittels der bolometrischen Methode unsere Kenntniss in dieser Hinsicht noch weiter fördern werde.

Directe Versuche, die Strahlung der Gase in sogenannten Geissler'schen Röhren quantitativ zu messen, liegen, so viel ich weiss, nicht vor. Dagegen ist die Wärmeentwickelung in solchen Röhren mehrmals Gegenstand der Untersuchungen gewesen. So haben die Hrn. G. Wiedemann [1]), Naccari und Bellati [2]), E. Wiedemann [3]) und Hasselberg [4]) solche Versuche angestellt. In der letzten Zeit hat schliesslich Hr. G. Staub [5]) das Bunsen'sche Eiscalorimeter zu diesem Zwecke benutzt. Seine Versuche unterscheiden sich von den übrigen dadurch, dass er die Lichtstrahlung von der Gesammterwärmung zu trennen sucht. Das Entladungsrohr wurde nämlich theils ganz durchsichtig in das ebenfalls durchsichtige Eiscalorimeter eingeführt und die Erwärmung bei Entladung 2—3 Leydener Flaschen bestimmt, theils wurde der Versuch, nachdem das Geissler'sche Rohr durch einen in Wasser unlöslichen Lack undurchsichtig gemacht war, wiederholt. Diese Versuche zeigen, dass ein sehr bedeutender Theil der Wärmeentwickelung in sichtbarer Strahlung besteht, indem 20—30 Proc. von der Gesammterwärmung den Calorimeter verlässt, wenn das Rohr ungeschwärzt ist.

Die vorliegende Untersuchung verfolgt jedoch einen anderen Zweck. Die Erwärmung, welche man bei diesen calorimetrischen Untersuchungen beobachtet, ist nämlich eine Folge sowohl der Strahlung der Gase und der Wärmeüberführung von denselben durch Convection und Leitung wie auch der wahrscheinlichen Wärmeentwickelung an den Rohrwänden.

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **158.** p. 35 u. p. 252. 1876.

2) Naccari et Bellati (Atti dell Ist. Ven. **4.** 1878) Beibl. **2.** p. 720. 1878.

3) E. Wiedemann, Wied. Ann. **6.** p. 298. 1879 u. **10.** p. 202. 1880.

4) B. Hasselberg, Mém. de l'Acad. Imp. des sciences de St. Pétersburg **27.** Nr. 1. 1879.

5) G. Staub, Inaugural-Dissertation, Zürich 1890.

In dem Folgenden werden wir ausschliesslich die *Strahlung* der Gase bestimmen und zwar nur die *Strahlung des positiven Lichtes.* Wir wollen die Beziehung zwischen Stromstärke und Strahlung näher untersuchen, die Veränderungen, welchen diese Strahlung in quantitativer und qualitativer Hinsicht bei Aenderungen in Stromstärke und Druck unterliegt, und schliesslich die Strahlung in Gramm-Calorien pro Secunde für die Längeneinheit des Entladungsrohres berechnen. Mit Kenntniss der Stromstärke und der Potentialdifferenzen in dem Entladungsrohre wird es dann möglich, den Theil der in dem Rohre abgegebenen Energie, welche in Strahlung umgesetzt wird, zu berechnen.

In dieser Untersuchung wird angenommen:

1. Dass die absorbirende Fläche des Bolometers alle Strahlen ebenso gut absorbirt, oder also, dass das Absorptionsvermögen der Fläche von der Wellenlänge unabhängig ist. Zwar habe ich schon gezeigt[1]), dass Russ um so durchlässiger ist, je grösser die Wellenlänge; da aber aus derselben Untersuchung hervorgeht, dass das Absorptionsvermögen dennoch für jede Wellenlänge sehr gross und das Diffusionsvermögen bekanntlich sehr unbedeutend ist[2]), mag diese Annahme berechtigt sein.

2. Dass das Absorptionsvermögen der Fläche gleich *eins* gesetzt werden kann. Diese Annahme ist, wie bekannt, nicht vollständig richtig und verursacht einen constanten Fehler in den absoluten Bestimmungen von 1—2 Proc. Da ich aber das Absorptionsvermögen meiner Fläche nicht direct bestimmt habe, und da der oben angeführte Fehler von relativ geringer Bedeutung ist, habe ich, statt eine willkürliche Correction anzubringen, vorgezogen, die direct ausgeführten Bestimmungen ohne weiteres anzuführen.

3. Dass eine ca. 4 mm dicke Platte von Steinsalz für Strahlen verschiedener Wellenlänge gleich durchlässig ist, eine Annahme, die, wenn auch nicht von strenger Gültigkeit, doch

---

1) K. Ångström, Öfversigt af K. Vet. Akad. Förhandl. Nr. 6. p. 385. 1888 u. Wied. Ann. **36.** p. 715. 1889.

2) Vgl. auch: K. Ångström. Upsala Univ. Årsskrift 1885 u. Wied. Ann. **26.** p. 253. 1885.

ohne Zweifel für eine so geringe Dicke der absorbirenden Schicht, wie die hier angewandte, erlaubt ist.

Der Leser wird übrigens leicht finden, dass kleinere Abweichungen von der Richtigkeit dieser Annahme ohne Bedeutung für die Gültigkeit unserer Schlussfolgerungen sind.

## II. Instrumente und Methoden.

### 1. Das Bolometer.

Bei den ersten vorläufigen Versuchen, die Strahlung auf photometrischem Wege zu bestimmen, wurde ein Spectroskop „à vision directe“ (von Duboscq, Paris) benutzt. Dasselbe wurde mit einem Vierordt'schen Doppelspalt (von Krüss in Hamburg) versehen; vor die eine Spalthälfte war ein kleines Prisma von Kreide gestellt, wodurch das Licht von der seitlich aufgestellten Vergleichslampe in das Spectroskop hinein diffundirt wurde. Das Versuchsrohr mit gerader Durchsicht wurde vor die andere Spalthälfte in Richtung der Spectroskopaxe aufgestellt. Die Versuche wurden in leicht verständlicher Weise angestellt und ich kann umsomehr die Einzelheiten dabei übergehen, da ich im Folgendem nur beiläufig die in dieser Weise angestellten Versuche erwähnen werde.

Die photometrischen Bestimmungen lassen nämlich viel zu wünschen übrig und erlauben nur ein sehr beschränktes Gebiet des Spectrums zu studiren. Es war aber hier meine Aufgabe, einen übersichtlichen Ueberblick über die Gesammtstrahlung und ihre Veränderungen bei der electrischen Entladung durch verdünnte Gase zu gewinnen, und hierfür scheint in vieler Hinsicht die bolometrische Methode besonders geeignet. Es fragte sich nur, ob diese Methode eine genügend grosse Empfindlichkeit darbiete. Durch vorläufige Versuche zeigte sich, dass man wenigstens für einige Gase von grösserem Strahlungsvermögen gute Resultate erhoffen kann.

Das von mir benutzte Bolometer[1]) bestand aus zwei aus Stanniol geschnittenen Gittern, die in zwei Ebonitrahmen befestigt waren. Die Rahmen wurden nach einander in ein

---

1) Das Instrument ist dasselbe, welches ich bei einer früheren Gelegenheit benutzt habe; vgl.: Ångström, Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handl. **13.** Afd. 1. Nr. 4. 1887.

Rohr mit doppelten Wänden eingeschoben, ein kleiner Doppelschirm, der jedoch das Rohr nicht vollständig absperrt, schützt das hintere Gitter vor der Strahlung. Die Gitter werden durch vier in dem Rohre befindliche Diaphragmen vor störenden Luftströmungen geschützt. Das Gitter, durch welches das Instrument die Strahluug absorbirt, nimmt eine kreisförmige Fläche von 16 mm Durchmesser ein. Dasselbe ist sorgtältig durch galvanisch niedergeschlagenes Platin und darauf folgendes Berussen geschwärzt [1]). Die vier Zweige der Wheatstone-Brückencombination, von welchen, wie bekannt, die oben beschriebenen Gitter zwei bilden, haben alle dieselben Widerstände, je ungefähr 5 Ohm. Die Empfindlichkeit des Bolometers konnte durch Einschaltung von Widerständen in die Galvanometerzuleitung beliebig verändert werden. Um die relative Empfindlichkeit jedesmal bestimmen zu können, habe ich mich einer Anordnung bedient, die ich schon früher beschrieben habe. [2]) Dieselbe besteht ganz einfach darin, dass man einen constanten Widerstand als Nebenschluss in einen der Brückenzweige einführt. Die Ablenkungen des zum Bolometer gehörigen Galvanometers, die dem Schliessen oder Oeffnen dieses Nebenschlusses folgen, geben ein relatives Maass der vorhandenen Empfindlichkeit an. Bei der gewöhnlichen, von mir gebrauchten Empfindlichkeit des Instrumentes, zeigte das Bolometer-Galvanometer beim Schliessen oder Oeffnen des Nebenschlusses eine Ablenkung von ca. 75 Scalentheilen. Um die an verschiedenen Tagen angestellten Versuche vollständig mit einander vergleichbar zu machen, sind die Schlussresultate alle auf dieselbe Empfindlichkeit des Bolometers, und zwar auf die, welche einer Ablenkung von 75 Scalentheilen beim Schliessen des Nebenschlusses entspricht, reducirt.

---

1) Das gleichmässige Berussen geschieht sehr leicht durch folgendes einfaches Verfahren: Eine Stearinkerze wird so unter ein Drahtnetz gehalten, dass die Spitze der Flamme das Netz berührt. Der Rauch wird durch das Drahtnetz verbreitet und der Niederschlag auf den darüber bewegten Gegenstand sehr gleichmässig vertheilt. Die Wärme über dem Drahtnetz ist nicht grösser, als dass man nicht auch leicht schmelzbare Gegenstände, wie die Stanniolgitter, berussen könnte.

2) K. Ångström, Bestämning af känsligheten vid bolometriska mätningar. Oefversigt af K. Vet. Akad. Förhandl. p. 379. 1888.

Da das Local, in welchem ich die Untersuchung ausführte [1]) für genaue Messungen infolge der durch den Strassenverkehr verursachten Erschütterungen sehr ungünstig war, sah ich mich genöthigt für diese Untersuchung ein besonderes Galvanometer herzustellen. Die Construction des Instrumentes weicht in vieler Hinsicht von der gewöhnlichen ab und hat die Anforderungen, die ich an dasselbe gestellt habe, befriedigend erfüllt. Es scheint mir jedoch nicht nöthig, hier hinsichtlich dieses Instrumentes auf Einzelheiten einzugehen, es mag genügen, anzugeben, dass der Gesammtwiderstand der zwei Galvanometerrollen klein ist (ca. 8 Ohm), dass die Empfindlichkeit des Instrumentes sehr gross ist (1 Scalentheil bei 2 m Scalenabstand entspricht $5,7 \times 10^{-9}$ Amp.), wozu kommt, dass die Schwingungsdauer verhältnissmässig klein (ein Ausschlag nimmt eine Zeit von ca. 8 Secunden in Anspruch), die Dämpfung aber stark ist. Durch eine besondere Untersuchung überzeugte ich mich von der genauen Proportionalität zwischen Stromstärke und Ablenkung, welche sich weit über die im Folgenden gesteckten Versuchsgrenzen erstreckt.

### 2. Die Entladungsröhre.

Bei den ersten Versuchen wurden alle Verbindungen zwischen den Entladungsröhren und der Luftpumpe durch Zusammenlöthen hergestellt, also ohne jeden Schliff. Bei diesen Röhren waren auch die Aluminiumelectroden im Glase mittels Platindrähte eingeschmolzen. Die beiden Enden des Rohres wurden mit plangeschliffenen Steinsalzplatten bedeckt, welche vermittels Natriumsilikat luftdicht angekittet wurden. Dieses Mittel hat sich als ganz vorzüglich erwiesen, es erfüllt alle Ansprüche an luftdichte Verbindungen, ohne das Steinsalz anzugreifen und ohne selbst bei den höchsten Verdünnungen verunreinigende Dämpfe abzugeben. Bei dieser Anordnung zeigte es sich jedoch immer besonders schwierig, die Gase, namentlich den Sauerstoff, rein zu erhalten; nachdem der electrische Strom einige Zeit hindurchgegangen war, zeigten

1) Diese Untersuchung war die letzte, welche ich während meiner Anstellung an der Hochschule in Stockholm ausgeführt habe.

sich immer im Spectrum die charakteristischen Streifen der Kohlenverbindungen und zwar trotzdem, dass keine solche Verbindung früher in das Rohr eingeführt worden war.

Möglicherweise liegt die Ursache hiervon in dem Einschmelzen der Electrode und dem Zusammenlöthen der Röhrenverbindungen. Bei diesen Operationen ist es unmöglich, zu vermeiden, dass die Stichflamme die inneren Wände des Rohres berührt, und die Möglichkeit ist dann ohne Zweifel vorhanden, dass sich Kohlenstoffverbindungen aus den Flammengasen abscheiden und sich in den Röhren, vielleicht auch auf den Aluminiumelectroden absetzen.

Um diese eventuellen Uebelstände zu verhüten, wurde in dem Rohre, das in dem Folgenden mit Nr. 3 bezeichnet wird, die Anordnung getroffen, dass jede Löthstelle vor dem Zusammensetzen des Apparates sorgfältig gereinigt wurde. Die Verbindung der verschiedenen Theile des Entladungsrohres, der Luftpumpe etc., wurde dann mit einigen Schliffen bewirkt, die ohne jedes Fett in einander gesteckt wurden. Durch einige Tropfen Natriumsilikat wurde die Verbindung vollständig luftdicht gemacht.

Für die Electrode wurde zuerst ein Rohr, wie Fig. 3 *A*, Taf. V, zeigt ausgezogen. Der sorgfällig gereinigte Aluminiumdraht wurde dann von der einen Seite, ein Platindraht von der anderen in das Rohr *B*, Fig. 3, eingeschoben und dieses bei *f* erhitzt, sodass der Platindraht und die Aluminiumelectrode in das Glasrohr in gewöhnlicher Weise eingeschmolzen wurden. Das Rohr wird dann in eine Glasplatte *m*, Fig. 3 *C*, eingeschliffen und erst nachdem diese Operationen vollendet sind und das Rohr sorgfältig von jedem Fett gereinigt ist, wird dasselbe bei *g*, Fig. 3 *B*, und darnach die Aluminiumelectrode bei *h* abgeschnitten. Das abgeschnittene Rohrstück hat also die Electrode vor Flammengasen und jeder Berührung geschützt.

Die Glasplatten *A* und $A_1$, werden darnach, wie Fig. 2 zeigt, mit Natriumsilikat an dem Entladungsrohr befestigt, und einige Tropfen Natriumsilikat werden auch um das Electrodenrohr (bei *l*, Fig. 3 *C*) gegossen. An der oberen Seite der Glasplatte wird ein Stück eines Glasrohres *B* und $B_1$, Fig. 2, angekittet. Durch eingegossenes Quecksilber kann man darauf

in gewöhnlicher Weise den Stromübergang von den Electroden zum Zuleitungsdraht vermitteln.

Um zu prüfen, ob der so hergestellte Apparat luftdicht ist, wird durch Pumpen ein sehr hohes Vacuum hervorgebracht. Wenn dies nach einigen Tagen noch unverändert war, habe ich die Verbindungen als gut betrachtet und erst dann, um das Natriumsilikat gegen Einwirkung der äusseren Luft zu schützen eine dünne Schicht von Wachs und Vaselin darüber gebracht. In das Entladungsrohr waren zwei feine Platindrähte als Electroden für die Ableitungen zum Electrometer bei $C$ und $C_1$, Fig. 2, eingeschmolzen. Es ist wohl kaum nöthig zu sagen, dass dies vor der schliesslichen Reinigung des Rohres geschah.

Es zeigte sich, dass es bedeutend leichter war reine Gase in dem so hergestellten Rohr, Nr. 3, zu erhalten. Es muss aber zugegeben werden, dass auch andere Umstände als die eben beschriebenen Anordnungen zu diesem guten Resultate beigetragen haben können, da ich auf die Reinigung der Röhre und auf die Herstellung der Gase alle mögliche Sorgfalt verwendet habe.

### 3. Die Herstellung der Gase, das Füllen und Evacuiren.

Nur vier Gase waren Gegenstand meiner Untersuchung: Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlenoxyd.

Um die Gase in das Entladungsrohr einzuführen, wurde eine Vorrichtung getroffen, die in ihren Grundprincipien schon von Cornu angegeben ist.[1] Fig. 1, Taf. V zeigt diese Anordnung, $M$ ist ein ungefähr 1 m langes, 1 cm weites Rohr, dessen unteres Ende durch einen dickwandigen Kautschukschlauch mit dem Quecksilberreservoir $O$ in Verbindung steht. Seitlich ist bei $I$ ein Capillarrohr angeschmolzen, das, wie die Figur zeigt, so gebogen ist, dass verschiedene kleine Gefässe über sein offenes Ende geschoben werden können.

Wenn das Entladungsrohr leer ist, kann man durch Senken des Reservoires $O$ die Gase durch $I$ einführen. Dieselben steigen durch $M$ hinauf und durchstreichen vor ihrem Eintritt in das Entladungsrohr die drei Rohre $P$, $S$ und $C$. Diese

1) A. Cornu, Journ. de phys. 5. p. 100 et p. 341. 1886.

enthalten: *P* Phosphorsäureanhydrid, *S* Schwefel und *C* reine Kupferspäne; ihre Aufgabe ist Wasser, Quecksilber und Schwefeldämpfe zu absorbiren.

Wasserstoff und Sauerstoff wurde durch electrolytische Zersetzung von reinem frisch destillirtem Wasser, das durch Phossphorsäureanhydrid angesäuert war, hergestellt. Das electrolytische Gefäss ist in Fig. 4 abgebildet. Es besteht aus einem U-förmigen Rohre *GAB*, in welches die Platinelectroden eingeschmolzen sind, aus einem nach unten offenen Rohre *H* und einem aufwärts gebogenen Rohre *D*. Das Rohr *H* wird über das Capillarrohr *I* (vgl. auch Fig. 1) geschoben und ein kleines Becherglas *C* darunter gesetzt. In dasselbe wird ein wenig Quecksilber gegossen, doch nur soviel, dass die untere Oeffnung von *H* frei bleibt. Das angesäuerte Wasser wird darauf in das Rohr *A* und in den Becher gegossen, wie auch einige Tropfen Quecksilber in *D*. Wenn man jetzt an *D* saugt, tritt die Luft durch den capillaren Theil *FE* hinaus, das ganze Gefäss wird mit Wasser gefüllt, das durch den Quecksilbertropfen bei *E* abgesperrt wird. Hebt man nun das Glas *C* ein wenig, so wird auch die untere Oeffnung von *H* durch Quecksilber abgesperrt. Dieses Verfahren kann ohne Schwierigkeit wiederholt werden, so oft man von einem Gase zu einem anderen übergehen will und das Entwickelungsgefäss kann, weil es von dem übrigen Apparat getrennt ist, leicht bei Bedarf gereinigt werden.

Bei den anderen Gasen wird nur ein kleines unten verengtes Rohr *P* (Fig. 4) als Gasbehälter benutzt. Die Gase werden in gewöhnlicher Weise in diesen Röhren über reinem Wasser und Quecksilber angesammelt. Nachdem das Quecksilber durch Hebung von dem Behälter *O* (Fig. 1) bis an die Oeffnung von *I* getrieben ist, wird der Behälter *P* über *I* geschoben. In dieser Weise konnte Stickstoff und Kohlenoxyd eingeführt werden.

Das erstgenannte dieser Gase wurde durch Leitung von Luft über erhitzte Kupferspäne, die bereits durch Wasserstoff reducirt waren, hergestellt. Die Luft war vorher durch reine Baumwolle, concentrirte Schwefelsäure und Kalilauge geleitet, um Staub, Wasserdämpfe und Kohlensäure zu entfernen.

Kohlenoxyd wurde aus Schwefelsäure und Oxalsäure dargestellt und durch Leitung über Kalilauge gereinigt.

Bei der Darstellung der Gase wurde die Anwendung jedes Schlauches sorgfältig vermieden und die verschiedenen Theile des Entwickelungsapparates direct aneinander gelöthet.

Zwischen dem Entladungsrohre und der Luftpumpe ist ein Quecksilberabschluss *N* (Fig. 1) eingesetzt; bei Heben des Behälters *F* steigt das Quecksilber in das U-förmige Rohr hinauf und unterbricht die Verbindung zwischen der Pumpe *W* und dem Entladungsrohr. Die Verbindung wird nur bei dem Evacuiren des Entladungsrohres hergestellt. Durch das U-förmige Rohr wird auch die Spannung des eingeführten Gases direct bestimmt, indem die Höhendifferenz des Quecksilbers in den beiden Schenkeln vermittels eines guten Kathetometers (von Perreaux in Paris) abgelesen wird. Natürlich muss dann zuerst die Luftpumpe sorgfältig (bis auf einige hundertstel Millimeter) entleert sein. Die Spannungsbestimmungen dürften, weil das U-förmige Rohr ein wenig zu eng war, nur auf ca. 0,02 mm genau sein.

Zur Entleerung der Entladungsröhre habe ich theils eine Pumpe von der gewöhnlichen Bessel-Hagen'schen Construction (von Müller in Berlin), theils auch bei späteren Versuchen eine Pumpe, die hauptsächlich nach den Angaben von Prütz[1]) verfertigt war, benutzt. Ich habe jedoch einige Veränderungen dabei angebracht, um die Handhabung bequemer zu machen und die Verdünnung rascher ausführen zu können. Die Einrichtung der Pumpe wird durch Fig. 1, *WTK*, leicht verständlich. Ich kann die so modificirte Pumpe sehr empfehlen.

Nachdem das Entladungsrohr durch längeres Pumpen so vollständig wie möglich entleert ist, werden einige Gasblasen durch Senkung des Reservoires *O* (Fig. 1) eingelassen, Inductionsfunken durch das Entladungsrohr geleitet und dann wieder das Rohr entleert. Erst nachdem diese Operation mehrmals wiederholt worden war, wurden die bolometrischen Beobachtungen begonnen. Während derselben wurde auch oft die Strahlung des Rohres mit einem Spectroskope beobachtet, um das etwaige Vorhandensein von Verunreinigungen beurtheilen zu können.

1) Prütz, Wied. Ann. **62.** p. 191. 1891.

4. Die Electricitätsquellen und die electrischen Messungen.

Als Electricitätsquelle wurde hauptsächlich ein Accumulator von 800 Elementen benutzt. Eine von den wohlbekannten kleinen Batterien des Planté'schen Modelles von 80 Elementen[1]) hatte ich von Hrn. Bréguet in Paris bekommen, die übrigen waren sehr sorgfältig in Stockholm nachgemacht.

Bei einigen Versuchen wurde ein Ruhmkorff'sches Inductorium mittlerer Grösse benutzt. Dasselbe war ein vorzüglicher Apparat von Carpentier in Paris. Der gewöhnliche Stromunterbrecher wurde jedoch fortgenommen und eine grosse electrische Stimmgabel (von König in Paris) mit veränderlicher Schwingungszahl (von 64—96 ganzen Schwingungen pro Secunde) an seiner Stelle angebracht. Mit diesem Unterbrecher functionirte das Inductorium sehr gleichmässig, sodass man ohne Schwierigkeit sowohl über die Stärke des Inductionsstromes wie auch über die Strahlung des Rohres Messungen anstellen konnte. Zur Leitung des electrischen Stromes wurden dicke kautschuk-isolirte Kupferdrähte benutzt. Um die Stromstärke beliebig variiren zu können, waren einige grosse Flüssigkeitswiderstände in die Leitung eingeschaltet. Sie waren nach den Angaben von Hittorf[2]) hergestellt, also mittelst in Amylalkohol gelöstem Jodcadmium und konnten durch veränderte Einstellung der Electroden beliebig vermindert oder vergrössert werden.

Zur Bestimmung der Stromstärke bediente ich mich eines aperiodischen Spiegelgalvanometers, mit kautschuk-isolirtem Draht (von Hartmann & Braun in Frankfurt). Die Galvanometerrollen waren für kleine Empfindlichkeit eingestellt. Der Reductionsfactor des Instrumentes wurde mit Hülfe eines Silbervoltameters bestimmt. Ein Ausschlag von einem Scalentheil entspricht 0,000015 Amp. und die Empfindlichkeit zeigte sich während der Arbeit genügend constant.

Zur Bestimmung der Potentialdifferenz in den Entladungsröhren diente ein Quadrantelectrometer von Mascart (von Carpentier in Paris bezogen). Die Quadranten wurden durch

1) G. Planté, Recherches sur l'électricité. Paris 1883.

2) W. Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 559. 1879.

eine kleine Wasserbatterie auf constanter Ladung gehalten: die Nadel konnte vermittels eines Commutators abwechselnd mit dem einen oder anderen der in dem Entladungsrohre eingeschmolzenen Platindrähte in Verbindung gesetzt werden. Die Ablesung des Instrumentes fand durch die Projectionsmethode statt. Um die Empfindlichkeit zu bestimmen, wurde die Nadel des Electrometers abwechselnd mit den beiden Endpunkten eines Widerstandes von 10 000 Ohm in Verbindung gesetzt und gleichzeitig ein Strom von 0,00673 Amp. durch den Widerstand geleitet. Hierbei ergab sich eine Aenderung des Ausschlages des Electrometers von 8,6 Scalentheilen. Ein Scalentheil entspricht also einer Potentialänderung von 7,8 Volt. Obschon diese Empfindlichkeit des Electrometers sich während des Versuches ein wenig geändert hatte, werde ich dieselbe im Folgenden mit genügend grosser Genauigkeit als constant voraussetzen können.

### III. Versuchsanordnung und Beobachtungen.

Taf. V, Fig. 1 gibt ein schematisches Bild über die Anordnung und die Zusammenstellung der verschiedenen Theile des Apparates. Das Bolometer $B$ ist hinter einem doppelwandigen Schirm $L$ aufgestellt, dieser Schirm ist in der Axenrichtung des Bolometers mit zwei Löchern versehen; zwischen den Wänden befindet sich ein kleiner, beweglicher Schirm, der mittels einer Schnur schnell hinaufgezogen werden kann. Das Entladungsrohr $AH$ ist vor den Löchern des Schirmes und in der Axenrichtung des Bolometers aufgestellt. Eine Kundt'sche Glasfeder $D$ verbindet das Entladungsrohr mit den übrigen bereits beschriebenen Theilen des Apparates.

Bei den Beobachtungen wird, sobald das Bolometer genügend ruhig ist, die Empfindlichkeit des Instrumentes zuerst in der schon beschriebenen Weise bestimmt. Darnach wird der electrische Strom der Accumulatoren oder des Inductoriums geschlossen, die Stromstärke durch Ablesung des Galvanometers $AG$, die Potentialdifferenz in dem Entladungsrohre durch Ablesung des Electrometers $E$ bestimmt. Während dieser Beobachtungen wird ungefähr jede Minute eine Beobachtung des Bolometer-Galvanometers $BG$ vorgenommen und die Beobachtungszeiten notirt. Sobald die Strahlung, welche

gewöhnlich gleich nach dem Stromschluss infolge der Erwärmung der Rohrwände ziemlich rasch zunimmt, vollständig oder wenigstens beinahe stationär ist, wird der Strom unterbrochen und gleich darnach die Strahlung des Rohres ohne Strom beobachtet. Noch zwei bis drei Bestimmungen dieser Strahlung werden mit ungefähr einer Minute Zwischenzeit gemacht. Durch diese Beobachtungen lässt sich die Gesammtstrahlung des Gases in dem Rohre berechnen. Um aber etwas über die qualitativen Aenderungen der Strahlung kennen zu lernen, wird auch die von einer Alaunplatte durchgelassene Strahlung bestimmt. Zu diesem Zwecke wird eine solche Platte von 3,95 mm Dicke vor die Oeffnung des Schirmes $L$ (Fig. 1) und zwar zwischen denselben und das Bolometer geschoben. Bei dieser letzten Bestimmung braucht man nicht die Strahlung der Wände des Entladungsrohres besonders zu eliminiren. Diese wird nämlich vollständig von der Alaunplatte absorbirt. Man ersieht dies daraus, dass die Strahlung, welche die Alaunplatte durchlässt, gleich nach Schluss des Stromes ihren constanten Werth erreicht, um sofort beim Oeffnen des Stromes vollständig zu verschwinden.

Die Strahlung, welche die Alaunplatte durchlässt, ist, wie bekannt, hauptsächlich die des sichtbaren Spectrums. Wie ich mich vermittels des Spectrobolometers überzeugt habe, beginnt die Absorption der Alaunplatte schon gleich in dem ultrarothen Spectrum und wird sehr schnell vollständig.

Bei der directen Bestimmung der Gesammtstrahlung der Röhre bekommt man, wie schon gesagt, die Strahlung der Gase vermehrt durch die Strahlung der erwärmten Rohrwände. Um die Strahlung der Gase allein beurtheilen zu können, muss also die Strahlung der Rohrwände eliminirt werden. Durch die Beobachtungen kennen wir die Strahlung während der Abkühlung des Rohres und aus diesen Beobachtungen muss also die Strahlung der erwärmten Rohrwände berechnet werden.

Man könnte nun wohl meinen, dass diese Berechnung am besten durch Anwendung des Newton'schen Abkühlungsgesetzes und mit Zuhülfenahme der Methode der kleinsten Quadrate ausgeführt werden könnte. Wenn man aber einige Versuche in dieser Hinsicht macht, so findet man bald, dass das ge-

wöhnliche Abkühlungsgesetz hier im allgemeinen nicht anwendbar ist. Die Ursache ist auch leicht einzusehen. Die Rohrwände werden nicht überall bis auf dieselbe Temperatur erhitzt und verschiedene Theile kühlen sich also mit verschiedener Anfangsgeschwindigkeit ab. Da nun die Anfangsbedingungen für verschiedene Stromstärke, Gase und Drucke verschieden sind, ist es auch natürlich, dass die Abkühlungscurve unter verschiedenen Umständen verschiedene Formen annimmt. Unter solchen Umständen habe ich es für das beste gehalten, nur die reine graphische Methode zu benutzen, um den Werth der Strahlung der Rohrwände zu extrapoliren. Allerdings ist bei dieser Bestimmungsmethode ein wenig Willkürlichkeit nicht zu vermeiden. Da jedoch die erste Bestimmung der Strahlung der Rohrwände nur ca. 10 Secunden nach dem Oeffnen des Stromes erfolgte, braucht man die Abkühlungscurve nur sehr unbedeutend zu extrapoliren, und die Fehler, welche von der graphischen Construction herrühren, sind infolgedessen verhältnissmässig klein. Um mich davon näher zu überzeugen, habe ich die in dieser Weise zuerst ausgeführte Construction nach einigen Monaten wieder gemacht und dabei durchaus übereinstimmende Resultate gefunden. Als Beispiel einer Bestimmung mag der folgende, vollständige Auszug des Beobachtungsprotokolls angeführt werden.

*Stickstoff.* Rohr Nr. 3.

Druck 1,15 mm. Potentialdifferenz 36,7 Scalentheile.

Stromstärke: 75 Scalentheile.

Empfindlichkeit des Bolometers 79.

Abstand zwischen der Kathode und der ersten Schicht des positiven Lichtes 15 mm.

| *Zeit* | *Bolometerablenkung* | |
|---|---|---|
| $19^m\ 55^s$ | 49,2 | Mittel 50,0 |
| $20^m\ 55^s$ | 50,5 | |
| $21^m\ 55^s$ | 50,2 | |
| $22^m\ 45^s$ | der Strom wird abgebrochen | |
| $23^m\ 0^s$ | 24,5 | |
| $23^m\ 35^s$ | 23,0 | |
| $24^m\ 20^s$ | 19,9 | |

Die Gesammtstrahlung von Gas und Rohrwänden ist also 50,0. Die Strahlung der erwärmten Rohrwände findet man durch graphische Extrapolation für die Zeit $22^m\ 45^s$ gleich 26,0.

Die Strahlung des Gases war also 24,0. Wenn wir diesen Ausschlag auf normale Empfindlichkeit (75 Scalentheile) reduciren, finden wir die Gesammtstrahlung = 22,8. Die Genauigkeit jeder einzelnen Bestimmung ist natürlich von der Stärke der Strahlung abhängig. Bei den Bestimmungen der Gesammtstrahlung kann, in einzelnen Fällen wenigstens, der Fehler des Endresultats einer Bestimmungsreihe einen Scalentheil betragen. Dies bedeutet in Procenten des Endresultats einen Fehler von höchstens ca. 3 Proc. bei den grössten Werthen der Strahlung (bei Stickstoff), 25 Proc. bei den kleinsten (einigen Bestimmungen der Strahlung des Wasserstoffs).

Bei Bestimmungen der von einer Alaunplatte durchgelassenen Strahlung sind die Fehler bedeutend kleiner und betragen höchstens 0,5 Scalentheile. Jedes in dem Folgenden gegebene Schlussresultat ist jedoch das Mittel aus mehreren Bestimmungen, weshalb die Fehler noch kleiner sind.

Als Zeit der Bestimmungen ist hier und überall die mittlere Zeit des Ausschlages genommen. Alle Rechnungen, welche in den Tabellen vorkommen, sind mit dem Rechenstab gemacht worden.

### IV. Ueber die Beziehung zwischen Stromstärke und Strahlung.

Bei den ersten Versuchen, die Beziehung zwischen Stromstärke und Strahlung zu ermitteln, wurde das Licht spectrophotometrisch untersucht. Als Stromquelle diente das Ruhmkorff'sche Inductorium. Die Stärke des primären Stromes konnte variirt werden, theils durch Anwendung einer verschiedenen Anzahl von Elementen, theils durch Einführung von Widerständen. Die Electricitätsmenge, welche durch das Entladungsrohr ging, wurde theils durch ein in der Strombahn eingeführtes Galvanometer, theils durch ein Electrometer, dessen Nadel und eines Quadrantenpaar mit dem einen, und dessen anderes Quadrantenpaar mit dem anderen Endpunkte eines in der Leitung eingeführten Widerstandes verbunden war, gemessen.

Mit schwachen Strömen arbeitend fand ich immer eine sehr befriedigende Proportionalität zwischen Stromstärke und Strahlung, bei grösserer Stromstärke traten aber sehr oft bedeutende Abweichungen von diesem Gesetze ein. In solchen Fällen

zeigte es sich jedoch immer, dass die Gase sich permanent verändert hatten, denn, wenn ich hiernach zu schwächeren Strömen zurückkam, fand ich nicht dieselbe Strahlung wieder.

Die Untersuchungen mit dem Bolometer und dem Accumulatorstrom, sowohl über die Gesammtstrahlung wie auch über die durch eine Alaunplatte durchgelassene Strahlung, hat, in den Grenzen der Beobachtungen, diese Folgerungen gut bestätigt. Von den zahlreichen Bestimmungen, welche ich, um dies zu constatiren, ausgeführt habe, mögen die folgenden hier angeführt werden.

Die Tabelle 1, betreffend die Gesammtstrahlung, ist eigentlich Auszug des Beobachtungsprotokolles (vgl. p. 506). Jede Beobachtungsreihe ist in zwei Horizontalcolumnen enthalten, indem zuerst die Nummer des Versuches, und die Stromstärke, und dann erst die eigentlichen Bolometerbeobachtungen aufgeführt werden. In der ersten Horizontalcolumne stehen dann die Beobachtungszeiten, in der zweiten die Ablesungen des Bolometer-Galvanometers (B. G.) und zwar zuerst das Mittel aus den Beobachtungen während des Stromdurchganges, sodann der extrapolirte Werth der Strahlung der erwärmten Rohrwände im Momente des Oeffnens des Stromes, abgeleitet aus den folgenden drei Beobachtungen über diese Strahlung in verschiedenen Zeiten. Mit I ist die Gesammtstrahlung des Gases bezeichnet, und mit $I_{100}$ der hieraus berechnete Werth der Strahlung auf die Stromstärke 100 bezogen.

Tabelle 1.

Stickstoff. Druck = 0,4 mm. Gesammtstrahlung, Rohr Nr. 2.

| Stromst. | Bolometerbeobachtungen Zeit und Scalenablesung | | | | | I | $I_{100}$[1] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 172 | Zeit | $0^m\ 30^s$ | $0^m\ 45^s$ | $1^m\ 15^s$ | $2^m\ 5^s$ | 36,0 | 20,9 |
| | B. G. | *62,0 26,0* | 24,0 | 20,5 | 17,3 | | |
| 106 | Zeit | $0^m\ 30^s$ | $0^m\ 45^s$ | $1^m\ 35^s$ | $2^m\ 30^s$ | 21,7 | 20,5 |
| | B. G. | *40,7 19,0* | 17,4 | 14,4 | 10,2 | | |
| 74 | Zeit | $0^m\ 0^s$ | $0^m\ 15^s$ | $0^m\ 50^s$ | $1^m\ 35^s$ | 15,5 | 21,0 |
| | B. G. | *26,0 9,5* | 9,2 | 8,2 | 7,7 | | |
| 45 | Zeit | $0^m\ 0^s$ | $0^m\ 20^s$ | $1^m\ 30^s$ | $2^m\ 30^s$ | 9,1 | 20,2 |
| | B. G. | *18,0 8,9* | 8,2 | 5,5 | 5,2 | | |
| 30 | Zeit | $0^m\ 45^s$ | $1^m\ 0^s$ | $1^m\ 50^s$ | $2^m\ 45^s$ | 6,4 | 21,3 |
| | B. G. | *10,9 4,5* | 4,2 | 3,7 | 3,4 | | |

1) In dieser und der folgenden Tabelle 2 ist $I_{100}$ nicht auf normale Empfindlichkeit reducirt.

Unter denselben Versuchsbedingungen, jedoch mit einer vor der Bolometeröffnung befindlichen Alaunplatte, wurden folgende Bestimmungen gleichzeitig ausgeführt. Jede in der zweiten Columne eingeführte Zahl ist Mittel aus vier Bestimmungen.

Tabelle 2.

Stickstoff, Druck = 0,4 mm, Strahlung durch Alaun, Rohr Nr. 2.

| Stromst. I | B. G. L. | $L_{100}$ |
|---|---|---|
| 130 | 21,6 | 16,7 |
| 99 | 17,1 | 17,3 |
| 64 | 11,1 | 17,4 |
| 33 | 5,6 | 17,0 |

Aus diesen Versuchen folgt also:

1. Bei constantem Druck ist für ein und dasselbe Gas die Strahlung der Stromstärke proportional, und weil dies nicht nur für die Gesammtstrahlung, sondern auch für einen bestimmten Theil derselben gilt, so ist

2. die spectrale Vertheilung der Energie bei constantem Druck von der Stromstärke unabhängig.

### V. Ueber die Strahlung verschiedener Gase bei verschiedenem Drucke.

Durch die jetzt nachgewiesene Proportionalität zwischen Strahlung und Stromstärke wird die folgende Untersuchung sehr vereinfacht, da wir alle Bestimmungen bei verschiedenem Drucke der Gase, um den Vergleich zu erleichtern, auf dieselbe Stromstärke reduciren können. Dies wird auch in den folgenden Tabellen geschehen.

Infolge der angewandten graphischen Berechnungsmethode schien es mir wünschenswerth, so viel wie möglich von dem directen Beobachtungsmaterial mittheilen zu können. Weil aber eine Beschränkung nothwendig war, habe ich es für zweckmässig gehalten, dasselbe nur für das Rohr Nr. 3 (Taf. V, Fig. 2), hier aber vollständig anzuführen. Ich schlage nämlich den Werth dieser Beobachtungen verhältnissmässig höher als den der übrigen an, theils der grösseren Sorgfalt wegen, mit welcher die Gase etc. hergestellt wurden, theils auch deswegen, weil dieses Rohr

das einzige ist, für welches ich alle nothwendigen Bestimmungen ausgeführt habe, um den absoluten Betrag der Strahlung des Gases zu berechnen. Betreffs der übrigen Beobachtungen möchte ich nur bemerken, dass die Uebereinstimmung derselben mit den hier angeführten im grossen und ganzen sehr befriedigend ist. In der Originalabhandlung sind die Beobachtungen mit dem Rohre Nr. 3 vollständig angeführt in Tabellen ähnlich der Tabelle 1. Indem wir den Leser, für welchen das Beobachtungsmaterial von Interesse sein kann, auf die ausführlichere Mittheilung verweisen, führen wir hier nur die Zusammenstellung der Resultate an. Die Tabellen 3—5 enthalten also den Druck des Gases in Millimetern, die Gesammtstrahlung, $I_{100}$, in Bolometerablenkungen und für eine Stromstärke von 100 Scalentheile des Accumulatorgalvanometers (=0,0015 Amp.) und auf normale Empfindlichkeit des Bolometers (75 Scalentheile; vgl. p. 497) reducirt; weiter die Strahlung durch Alaun, $L_{100}$, unter denselben Bedingungen und schliesslich das Verhältniss dieser beiden Strahlungen oder L/I. Vor den Columnen, welche $I_{100}$ und $L_{100}$ enthalten, sind in besonderen Columnen die Anzahl Beobachtungen aus welchen $I_{100}$ und $L_{100}$ Mittel sind, angegeben.

Die Dimensionen des Rohres Nr. 3 waren: Abstand zwischen den Electroden 20,0 cm, Abstand zwischen den Ableitungen zum Electrometer 6,0 cm, Durchmesser des Entladungsrohres 1,32 cm. Das Rohr war so aufgestellt, dass der Abstand zwischen dem Bolometergitter und der nächststehenden Electrode 11,7 cm betrug. Diese Electrode wurde immer als die positive genommen.

Tabelle 3.

**Wasserstoff.**

| Druck | $I_{100}$ | | $L_{100}$ | | L/I | Druck | $I_{100}$ | | $L_{100}$ | | L/I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Anzahl Beob. | Mittel | Anzahl Beob. | Mittel | | | Anzahl Beob. | Mittel | Anzahl Beob. | Mittel | |
| 0,12 | 3 | 3,7 | 14 | 2,2 | 0,60 | 0,76 | 4 | 5,9 | 8 | 1,4 | 0,24 |
| 0,15 | 3 | 4,2 | — | — | — | 0,90 | 3 | 6,4 | — | — | — |
| 0,16 | 3 | 3,2 | 4 | 2,0 | 0,63 | 1,02 | 4 | 6,6 | 10 | 1,8 | 0,27 |
| 0,18 | 3 | 4,1 | 12 | 1,5 | 0,37 | 1,26 | 3 | 5,5 | 8 | 1,3 | 0,24 |
| 0,23 | 3 | 4,8 | — | — | — | 1,60 | 2 | 4,2 | 10 | 1,2 | 0,2[illegible] |
| 0,42 | 3 | 5,6 | — | — | — | 2,30 | 4 | 2,6 | 10 | 0,9 | 0,3[illegible] |
| 0,56 | 3 | 4,4 | 10 | 1,8 | 0,40 | 2,66 | 2 | 2,6 | 10 | 0,8 | 0,31 |

Es möge hier erwähnt werden, dass bei hoher Verdünnung des Wasserstoffes die Strahlung, nachdem der Strom einige Zeit lang durchgegangen ist, ziemlich stark abnimmt, was natürlich zur Folge hat, dass man schwerlich gut übereinstimmende Beobachtungen erhalten kann.

*Sauerstoff.* Die Versuche, die Strahlung von Sauerstoff zu bestimmen, haben leider keine definitiven Resultate gegeben. Mit der hier benutzten Empfindlichkeit des Bolometers ist nämlich die Strahlung zu schwach, um bestimmt werden zu können. Die Versuche wurden mit Gas von 0,8, 0,77 und 1,27 mm Druck angestellt (Potentialgefälle 21—31 Volt per Centimeter) und mit Anwendung einer Stromstärke von 120 Scalentheilen. Die Bolometerablenkungen für die Gesammtstrahlung (I) schwanken unter diesen Verhältnissen zwischen 0 bis 1,8 Scalentheilen, Werthen, die in Betracht der dabei vorkommenden Beobachtungsfehler zu klein sind, um eine, wenn auch nur ungefähre Schätzung der Strahlung zu erlauben. Alles was wir von dieser Strahlung sagen können ist, dass dieselbe unter den angeführten Verhältnissen und für eine Stromstärke von 100 Scalentheilen (A. G.) = 0,0015 Ampère kleiner als 1,5 Scalentheile (B. G.) ist.

Tabelle 4.

Stickstoff.

| Druck | $I_{100}$ | | $L_{100}$ | | L/I | Druck | $I_{100}$ | | $L_{100}$ | | L/I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Anzahl Beob. | Mittel | Anzahl Beob. | Mittel | | | Anzahl Beob. | Mittel | Anzahl Beob. | Mittel | |
| 0,12 | 1 | 22,3 | 6 | 17,0 | 0,77 | *0,88 | 2 | 29,5 | 2 | 21,0 | 0,71 |
| 0,15 | 3 | 20,8 | 4 | 19,8 | 0,95 | 1,00 | 2 | 32,4 | 5 | 24,1 | 0,76 |
| *0,16 | 3 | 20,9 | 7 | 18,9 | 0,90 | 1,10 | 2 | 32,8 | 4 | 20,4 | 0,62 |
| *0,23 | 3 | 21,5 | 3 | 18,1 | 0,84 | 1,15 | 2 | 30,0 | 6 | 21,5 | 0,72 |
| 0,35 | 2 | 21,9 | 6 | 18,5 | 0,85 | *1,21 | 2 | 35,7 | 3 | 24,8 | 0,70 |
| 0,42 | 2 | 23,8 | 7 | 19,3 | 0,81 | 1,45 | 3 | 33,8 | 6 | 18,9 | 0,56 |
| 0,57 | 3 | 26,8 | 4 | 20,8 | 0,78 | *1,54 | 3 | 33,3 | 5 | 23,0 | 0,69 |
| *0,66 | 2 | 28,7 | 2 | 23,9 | 0,83 | 1,62 | 2 | 30,7 | 5 | 21,0 | 0,68 |
| 0,70 | 3 | 29,6 | 6 | 23,8 | 0,77 | *1,64 | 3 | 37,3 | 4 | 25,4 | 0,68 |
| 0,72 | 2 | 27,3 | 6 | 20,5 | 0,75 | — | | — | | — | — |

Bei Stickstoff ist die Erwärmung und Strahlung der Rohrwände verhältnissmässig klein. Infolge dessen ist es auch möglich, die Beobachtungen in einfacherer Weise, als vorher beschrieben ist (Abth. III), auszuführen. Man braucht nämlich nur

zwei Beobachtungen unmittelbar vor und nach dem Stromdurchgange, um die Strahlung des Rohres zu ermitteln und diese Strahlung von der während des Stromdurchganges beobachteten abzuziehen. In dieser Weise wurden die in der Tabelle mit * bezeichneten Bestimmungen erhalten.

## Tabelle 5.

Kohlenoxyd.

| Druck | $I_{100}$ | | $L_{100}$ | | L/I | Druck | $I_{100}$ | | $L_{100}$ | | L/I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Anzahl Beob. | Mittel | Anzahl Beob. | Mittel | | | Anzahl Beob. | Mittel | Anzahl Beob. | Mittel | |
| 0,14 | 2 | 9,45 | 8 | 4,4 | 0,47 | 0,59 | 2 | 10,8 | 8 | 3,4 | 0,32 |
| 0,18 | 1 | 9,9 | 4 | 5,6 | 0,57 | 0,74 | 2 | 9,2 | 18 | 3,2 | 0,35 |
| 0,29 | 2 | 10,95 | 12 | 4,3 | 0,39 | 0,77 | 1 | 13,4 | 6 | 3,3 | 0,25 |
| 0,32 | 2 | 12,2 | 14 | 4,4 | 0,36 | 0,99 | 2 | 11,7 | 12 | 3,2 | 0,27 |
| 0,46 | 2 | 10,4 | 8 | 3,5 | 0,34 | 1,62 | 2 | 15,5 | 10 | 2,2 | 0,14 |

Diese Tabellen lehren uns:

1. Dass die Gesammtstrahlung verschiedener Gase höchst verschieden ist.

2. Die Grösse der Gesammtstrahlung verschiedener Gase steht in keiner erkennbaren Beziehung zu dem Absorptionsvermögen derselben bei gewöhnlicher Temperatur. Wir wissen z. B. dass Kohlenoxyd ein sehr beträchtliches, Stickstoff aber ein sehr geringes Absorptionsvermögen bei gewöhnlicher Temperatur hat.[1]) Hinsichtlich der soeben erörterten Strahlung aber sind die Rollen vertauscht.

3. Die Lichtstrahlung nimmt mit zunehmendem Drucke ab.

4. Das Verhältniss zwischen der Lichtstrahlung und der Gesammtstrahlung ist von dem Drucke abhängig, und die spectrale Vertheilung der Energie ändert sich also mit dem Drucke. Mit zunehmender Verdünnung der Gase nimmt dieses Verhältniss im allgemeinen zu, oder, mit anderen Worten, das Intensitätsverhältniss ändert sich so, dass mit vermehrter Verdünnung der Schwerpunkt des Energiespectrums

---

1) In Betreff der Absorption dieser Gase siehe: K. Ångström. Bihang til K. Svenska Vet.-Akad. Handl. **15.** Nr. 9. 1889 oder Wied. Ann. **39.** p. 267. 1890. Ebenso: Öfversigt af K. Vet. Akad. Förhandl. Nr. 9. p. 549. 1889 und Nr. 7. p. 331. 1890 oder Physikalische Revue 1. p. 597. 1892.

gegen die violette Seite des Spectrums verschoben wird. Dabei steigt das Verhältniss zwischen Lichtstrahlung und Gesammtstrahlung bis auf Werthe, die man wohl nicht erwartet hatte, so z. B. bei Stickstoff bis auf 0,95.

### VI. Einige Beobachtungen mit dem Ruhmkorff'schen Inductorium.

Um die Veränderungen des Verhältnisses zwischen Licht- und Gesammtstrahlung bei grösseren Veränderungen des Druckes verfolgen zu können, machte ich einige Versuchsreihen mit dem Ruhmkorff'schen Inductorium. Stickstoff und Kohlenoxyd wurden untersucht, dabei wurde aber für Stickstoff die Strahlung des Rohres nur nach der früher erwähnten einfachen Correctionsmethode ermittelt. Die Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle 6.

Stickstoff. Gesammtstrahlung und Strahlung durch Alaun.

| Druck | $I_{100}$ | $L_{100}$ | L/I | Druck | $I_{100}$ | $L_{100}$ | L/I |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,16 | 19,0 | 17,2 | 0,91 | 2,42 | 28,8 | 12,5 | 0,43 |
| 0,23 | 19,7 | 16,3 | 0,83 | 3,20 | 25,4 | 12,8 | 0,50 |
| 0,66 | 21,4 | 14,7 | 0,69 | 4,12 | 25,7 | 10,0 | 0,39 |
| 0,88 | 23,0 | 14,6 | 0,64 | 5,0 | 30,0 | 7,3 | 0,24 |
| 1,21 | 23,4 | 14,4 | 0,62 | 6,24 | 38,5 | 4,3 | 0,11 |
| 1,54 | 25,9 | 17,1 | 0,66 | 8,28 | 48,2 | 4,5 | 0,09 |
| 1,64 | 25,4 | 15,0 | 0,50 | 12,04 | 61,3 | 2,5 | 0,03 |

Tabelle 7.

Kohlenoxyd. Gesammtstrahlung und Strahlung durch Alaun.

| Druck | $I_{100}$ | $L_{100}$ | L/I |
|---|---|---|---|
| 0,99 | 7,4 | 2,0 | 0,27 |
| 1,7 | 9,3 | 1,5 | 0,16 |
| 6,3 | 23,6 | ca. 0,8 | 0,03 |
| 12,8 | 69,4 | unbestimmbar | |

Auf Taf. V, Fig. 11 und 12 sind diese Resultate graphisch wiedergegeben. In der Fig. 11 sind die Drucke als Abscissen, $I_{100}$ und $L_{100}$ für die beiden Gase als Ordinaten genommen. In der Fig. 12 sind ebenfalls die Drucke als Abscissen, als Ordinaten aber das Verhältniss L/I genommen, die punktirte Curve für Stickstoff, die ausgezogene für Kohlenoxyd. Diese Resultate bestätigen vollständig die Folgerungen, die wir

schon gezogen haben. Das Verhältniss L/I nimmt mit zunehmendem Drucke schnell ab, bei Stickstoff von 0,90 bis auf 0;04 für eine Druckvermehrung von 0,16—12,04 mm, bei Kohlenoxyd von 0,27 bis auf weniger als 0,01 für eine Druckänderung von 0,99—12,8 mm.

Die Uebereinstimmung zwischen den Werthen von L/I, welche wir für gleichen Druck mit dem Induktorium und mit dem Accumulatorstrom gefunden haben, ist für Kohlenoxyd sehr befriedigend. Für Stickstoff ist sie weniger gut und im allgemeinen sind die Werthe von L/I bei intermittenter Entladung niedriger ausgefallen, als bei constantem Strome. Eine Erklärung dieses Verhältnisses werden wir unten zu geben versuchen.

In der obenstehenden Tabelle habe ich auch die Strahlung für dieselbe Stromstärke berechnet. Für das gemeinsame Versuchsgebiet (zwischen 0,15—2 mm Druck) sind die Verhältnisse bei Accumulator und Inductorium in ihren Hauptzügen dieselben; mit einer Vermehrung des Druckes folgt eine Vermehrung der Gesammtstrahlung.

Bei Stickstoff scheint bei ca. 3,6 mm Druck ein schwaches Minimum der Strahlung vorhanden zu sein, was in Uebereinstimmung mit dem früher bei Wasserstoff gefundenen Werthe der Strahlung steht (vgl. auch später p. 524—525). Leider sind die Bestimmungen bei Kohlenoxyd nicht zahlreich genug, um das Vorhandensein eines solchen sehr schwerverständlichen Minimums auch bei diesem Gase zu constatiren. Bei grösserem Drucke nimmt die Strahlung stetig zu.

Obschon die Stromstärke in diesen Versuchen mit demselben Galvanometer wie vorher bestimmt ist, sind doch die oben angeführten Werthe der Stromstärke nicht direct mit den früheren, in den Versuchen mit dem Accumulator gefundenen, vergleichbar. Nichtsdestoweniger können wir aber aus denselben einen wichtigen Schluss ziehen. Die durch die Galvanometerablenkung mit Hülfe des Reductionsfactors für constante Ströme hergeleitete mittlere Intensität des Inductionsstromes kann wohl kleiner als die wirkliche, nicht aber grösser sein. Wenn, wie ich wenigstens für schwächere Stromintensität gezeigt habe, die Strahlung der Stromstärke proportional ist, so könnten wir aber unter diesen Umständen erwarten, dass der

Werth der Strahlung mit Inductionsströmen grösser als die entsprechende mit constantem Strome ausfallen würde. Das ist aber nicht der Fall. Im Gegentheil ist die mit Inductionsströmen erzeugte Strahlung immer kleiner, als die entsprechende mit constantem Strome hervorgebrachte.

Man könnte vielleicht meinen, dass das Bolometer nicht bei intermittirender Beleuchtung die mittlere Intensität angebe. Ich habe mich aber durch directe Versuche überzeugt, dass dies der Fall ist. Eine Scheibe, in welcher Oeffnungen im Rande angebracht waren, wurde zwischen dem Bolometer und einer constanten Lichtquelle so befestigt, dass durch Drehen derselben intermittirendes Licht auf das Bolometer fiel. Die Ablenkung des Bolometer-Galvanometers war, sobald die Ablenkung stetig war, bei verschiedener Rotationsgeschwindigkeit immer dieselbe.

Es bleiben mithin nur zwei Erklärungen dieses Verhältnisses übrig. Entweder verliert das Proportionalitätsgesetz, welches wir oben gefunden haben, bei den grossen Intensitäten, welche in den Inductionsfunken vorkommen, seine Gültigkeit, oder die Strahlung nimmt nicht bei Schluss des Stromes augenblicklich ihren endgültigen Werth an. Wenn es sich nämlich so verhält, dann muss ein Inductionsstrom eine kleinere Strahlungsintensität als der constante Strom ergeben, wenn auch die in den beiden Fällen übergeführte Electricitätsmenge dieselbe ist. Vermehrt man die Schwingungszahl des Unterbrechers, muss für dieselbe mittlere Intensität des Stromes die Strahlungsintensität abnehmen, solange noch die Funken einander mit so grossen Zeitintervallen folgen, dass das Gas zwischen jeder Entladung in seinen normalen Zustand zurückkehrt. Ist dies nicht länger der Fall, das heisst, werden die Zeitintervalle so klein, dass das Gas nicht in seinen normalen Zustand zurückkehrt, so muss die Strahlung wieder zunehmen.

Unter solchen Umständen darf man deswegen auch nicht erwarten, dass $L/I$ denselben Werth bei constantem und bei intermittirendem Strome hat. Bei den Versuchen mit Stickstoff fanden wir auch, dass die Werthe von $L/I$ bei constantem Strome im allgemeinen ein wenig grösser ausfielen, als bei intermittirendem, was also bedeuten würde, dass nach dem

Stromschlusse die Strahlung der kürzeren Wellenlängen später als die Strahlung der längeren zur vollen Entwickelung kommt.

Da mir eine Bestätigung des hier gesagten von Wichtigkeit war, beabsichtigte ich, Versuche mit verschiedener Brechungszahl auszuführen. Leider war mir die Zeit für diese Versuche zu knapp, weshalb ich dieselben auf eine andere Gelegenheit verschieben musste.

## VII. Ueber die Bestimmung der Strahlung in absolutem Maasse.

Bis jetzt haben wir nur die direct gefundenen Bolometerangaben als Maass der Strahlung genommen und aus diesen einige Schlüsse gezogen mit Nichtbeachtung einiger kleiner Correctionen, welche für diese Schlüsse ohne Bedeutung waren. In dem Folgenden wollen wir versuchen, die Strahlung in absolutem Maasse auszudrücken und das Strahlungsvermögen des Gases zu berechnen.

Zu diesem Zwecke ist es erstens nöthig, die Empfindlichkeit des Bolometers zu kennen, d. h. den Werth der Scalentheile in Grammcalorien pro Secunde und Quadratcentimeter auszudrücken, und zweitens den Einfluss der Rohrwände auf die Strahlung näher kennen zu lernen.

### 1. Bestimmung der Empfindlichkeit des Bolometers.

Bei dieser Bestimmung kann man verschiedene Wege einschlagen. So hat R. v. Helmholtz, der, mit Ausnahme des Verfassers, der einzige ist, welcher den absoluten Werth der Empfindlichkeit seines Instrumentes genauer bestimmt hat[1], drei verschiedene Methoden versucht. Die, welche ich früher befolgt habe[2]) und welche auf einer vergleichenden Bestimmung der Strahlung einer und derselben Wärmequelle mit dem Bolometer und mit dem von mir construirten Pyrheliometer[3]) beruht, scheint mir jedoch mit Hinsicht auf die Zuverlässigkeit der Resultate wie auch seiner Einfachheit halber Vorzüge zu haben.

1) R. v. Helmholtz, Die Licht- und Wärmestrahlung verbrennender Gase. Gekrönte Preisschrift. Berlin 1890 (vgl. p. 504).

2) K. Ångström, Wied. Ann. **26**. p. 253. 1885.

3) K. Ångström, Acta Reg. Soc. Upsaliensis. 1886.

Die Anordnung ist aus der Fig. 5, Taf. 1 leicht verständlich. $A$ und $B$ sind die als Calorimeter benutzten Kupferplatten, $CDEF$ die Thermoelemente, die mit ihren Löthstellen in den Mittelpunkt der Platten eingefügt sind und deren Leitungsdrähte zu dem Galvanometer führen. $GH$ und $IK$ sind zwei Schirme mit Oeffnungen. Vor der einen Oeffnung steht ein kleines cylindrisches Gefäss $L$, durch welches Wasserdampf geleitet werden kann, vor der anderen eine kleine Kupferplatte $M$, welche bei Zimmertemperatur erhalten wird. Die Endplatte des Cylinders $L$ ist sorgfältig berusst, wie auch die Platte $M$. Die Stellung von $L$ und $M$ kann leicht gewechselt werden, und man bestimmt dabei genau die Zeitdifferenz $T$, während welcher die Temperaturdifferenz $K$ der Calorimeter vertauscht wird.

Früher habe ich gezeigt[1]), dass bei dieser Anordnung, wenn eine Strahlung von der Stärke $Q$ auf die Platte des Pyrheliometers fällt:

$$Q\,a = \frac{2\,K\,D}{T\,c},$$

wenn nämlich $D$ den Wasserwerth, $a$ die Fläche und $c$ das Absorptionsvermögen der Calorimeterplatten bedeutet. Bei einem Versuche mit der beschriebenen Anordnung war $T = 63$ Secunden, $K = 0{,}0146^0$, $D = 3{,}039$ Grammcalorien. Wenn $c = 1$ gesetzt wird, finden wir:

$$Q\,a = 0{,}001409 \text{ Grammcalorien pro Secunde.}$$

Bei diesem Versuche (vgl. nebenstehende Figur) war der Abstand zwischen der strahlenden und der absorbirenden Fläche 5,7 cm, Durchmesser der Calorimeterplatten 3,02 cm. Wir können dann leicht das Strahlungsvermögen des Cylinderbodens $L$ berechnen. Es sei $I$ das Strahlungsvermögen des Cylinderbodens, der mit genügend grosser Genauigkeit klein im Vergleich zu der Calorimeterfläche $A\,A_1$ angenommen werden kann, $r$ der Abstand eines beliebigen Punktes der Fläche $A\,A_1$ von $L$, $2\,\alpha$ der Winkel $A\,L\,A_1$, dann ist:

1) K. Ångström, l. c.; vgl. auch Wied. Ann. 39. p. 294. 1890.

$$Q\,a = \int_0^a \frac{2\,\pi\,r^2\,I \sin\alpha\cos\alpha}{r^2}\,d\alpha = \pi\,I \sin^2\alpha,$$

woraus

$$I = \frac{Q\,a}{\pi\sin^2\alpha} = \frac{0{,}001409}{3{,}1416 \times \sin^2 14^0\,50'} = 0{,}006848.\,[1])$$

Der strahlende Cylinder wurde dann in einem Abstand $= 23{,}65$ cm vor dem Bolometer aufgestellt. Die Empfindlichkeit des Bolometers war $31{,}5\,/\,75$ von der normalen. Die Ablenkung des Bolometergalvanometers war 40,5 Scalentheile. Wenn also $R$ den Werth eines Scalentheiles in Grammcalorien per Secunde und Quadratcentimeter bei normaler Empfindlichkeit bedeutet, so ist

$$R \times 40{,}5 = \frac{0{,}006848}{(23{,}65)^2} \times \frac{31{,}5}{75},$$

woraus:

$R = 127 \times 10^{-9}$ Grammcalorien per Sec. und Quadratcentimeter.[2])

Einige Controllversuche mit einem Argand'schen Brenner, der in derselben Entfernung von Bolometer und Pyrheliometer

1) Da die strahlende Fläche 1,41 qcm ist, findet man das Strahlungsvermögen der Flächeneinheit $S = 0{,}00486$. Nach Stefan ist das Strahlungsvermögen einer Russfläche:

$$S = \frac{1{,}202 \times 10^{-12}(T_1^4 - T_2^4)}{\pi}\ \text{Grammcalorien},$$

wo $T_1$ und $T_2$ die absoluten Temperaturen der strahlenden und der absorbirenden Fläche sind. Hieraus findet man, wenn diese Temperaturen $= 373$ resp. 290 gesetzt werden,

$$S = 0{,}00458\ \text{Grammcalorien}.$$

Die Uebereinstimmung dürfte in Anbetracht der grossen Schwierigkeiten, mit welchen die beiden Bestimmungen verbunden sind, als sehr befriedigend angesehen werden können.

2) Als Vergleich mag hier angeführt werden, dass die in dieser Weise erreichte Empfindlichkeit vier- bis fünfmal so gross ist wie diejenige, mit welcher ich früher operirt habe. Das von R. v. Helmholtz benutzte Bolometer hatte eine Empfindlichkeit von $533 \times 10^{-9}$, und er hat berechnet, dass die Empfindlichkeit des Instruments von Julius ungefähr die gleiche, die des Instrumentes von Langley fünf bis achtmal so gross ist. Die Empfindlichkeit meines Instruments kommt der von Langley's Instrument also sehr nahe. — In der vorläufigen Notiz dieser Arbeit ist infolge eines Schreibfehlers die Empfindlichkeit unrichtig angegeben.

aufgestellt wurde, ergaben eine sehr gute Bestätigung der oben erwähnten Bestimmung.

Die in der vorigen Tabelle in Bolometerablenkungen angegebene Strahlung muss also mit $127 \times 10^{-9}$ multiplicirt werden, wenn man die Strahlung in Calorien per Secunde und Quadratcentimeter ausdrücken will.

## 2. Correction für die Reflexion der Rohrwände.

Die direct beobachtete Strahlung ist vermehrt durch die Reflexion von den Rohrwänden und vermindert durch die Reflexion von der Steinsalzplatte. Infolge vieler Nebenumstände (z. B. Stellung, Beschaffenheit und Form des Entladungsrohres) kann man nicht direct diesen Einfluss berechnen.

Ich war also genöthigt, einige Hülfsbeobachtungen anzustellen und habe den folgenden Weg einzuschlagen. Ein Rohr, Taf. V, Fig. 6, *SR*, dem Beobachtungsrohr so ähnlich wie möglich, wurde angefertigt, nur mit dem Unterschied, dass das eine Ende offen gelassen war. Das andere Ende wurde mit einer Steinsalzplatte *S* von ungefähr derselben Dicke wie die des Entladungsrohres bedeckt. In dieses Rohr konnte ein kleines cylindrisches Gefäss *G*, welches das Rohr vollständig ausfüllte, eingeschoben werden. Das Gefäss hatte, wie in der Figur zu sehen, Ab- und Zuleitung für Erwärmung durch Wasserdampf. Das Gefäss ist aus Messing, hochpolirt mit Ausnahme der nicht durchbrochenen Endflächen, die von berusstem Kupfer ist.

Das Entladungsrohr wurde jetzt von seinem Platz vor dem Bolometer entfernt, um durch dieses Rohr ersetzt zu werden. Nachdem das kleine Gefäss durch Zuleitung von Wasserdampf bis zur constanten Temperatur erhitzt war, wurde es bis zu einer bestimmten Stelle schnell in das Rohr hineingeschoben und die Strahlung sogleich bestimmt. Nachdem diese Versuche für verschiedene Stellen in dem Rohre wiederholt waren, wurde das Rohr fortgenommen und die Strahlung des Gefässes bei denselben Abständen von dem Bolometergitter bestimmt. Ein Auszug aus dieser Beobachtungsreihe, welcher in der folgenden Tabelle enthalten ist, wird das Gesagte genügend erklären.

Tabelle 8.

| Abstand vom Bolometer cm | Strahlung | |
|---|---|---|
| | mit Rohr | ohne Rohr |
| 11,7 | 154 | 168,5 |
| 17,7 | 125 | 70,5 |
| 23,7 | 112 | 40,5 |
| 29,7 | 102 | 26,5 |

Wenn wir jetzt die Abstände von dem Bolometergitter als Abscissen, die correspondirenden Strahlungsintensitäten als Ordinaten nehmen, so erhalten wir zwei Curven (Fig. 7, Taf. V), die eine für die Strahlung des Gefässes mit Rohr (ausgezogen), die andere ohne Rohr (punktirt).

Es ist leicht verständlich, dass das Verhältniss zwischen den beiden Flächen, die durch die Abscissenaxe, zwei beliebige Ordinaten und die respectiven beiden Curven gebildet sind, dasselbe ist wie das Verhältniss zwischen der Strahlung einer Folge voneinander unabhängiger Gasschichten, theils mit, theils ohne Rohr. Wir finden also (vgl. Fig. 7):

$$\frac{ABCD}{AFID} = \frac{I_1}{I} = \frac{\text{Strahlung ohne Rohr}}{\text{Strahlung mit Rohr}} = \alpha,$$

oder

$$I_1 = \alpha I.$$

Das Verhältniss zwischen den beiden Flächen habe ich durch die Wägungsmethode ermittelt.

Die Länge der strahlenden Gasschicht wechselt aber ein wenig bei verschiedenen Gasen, weil der dunkle Raum um die Kathode ungleich weit in das Rohr hineindringt.[1] Um die Strahlung bei verschiedenen Gasen miteinander vergleichen zu können, ist es zweckmässig, alle Bestimmungen auf dieselbe Länge der strahlenden Gasschicht zu reduciren. Ich habe als diese Länge 19 cm gewählt. Ist die Länge der Gasschicht eine andere, z. B. 17 cm, so ist die gefundene Strahlung mit dem oben gefundenen Verhältniss zwischen der Fläche ohne Rohr für den Abscissenabstand = 19 cm ($ABCD$, Fig. 7,

1) Die Länge ändert sich auch ein wenig mit der Stromstärke, doch können wir hier diese Veränderungen vernachlässigen.

Taf. V) und die Fläche mit Rohr für den Abscissenabstand = 17 cm ($AFGH$) zu multipliciren.

Folgende kleine Tabelle enthält die Reductionsfactoren für die verschiedenen Gase.

Tabelle 9.

| Gase | Länge der Gassäule, cm | Reductions-factor $\alpha$ |
|---|---|---|
| Wasserstoff | 18,0 | 0,58 |
| Stickstoff | 18,2 | 0,57 |
| Kohlenoxyd | 17,3 | 0,60 |

Mit $\alpha$ ist also der früher gefundene absolute Werth der Strahlung mit Rohr zu multipliciren, wenn man die Strahlung ohne Rohr und von einer Gassäule von 19 cm Länge erhalten will. Wenn wir diese Strahlung für eine Stromstärke = 1 Mikroampère mit I bezeichnen, so ist dieselbe also (weil $I_{100}$ die Strahlung für eine Galvanometerablenkung = 100 Scalentheile = 1,5 Mikroampère ist)

$$I = \alpha \frac{I_{100} \times 127 \times 10^{-9}}{1,5}.$$

3. Berechnung des Strahlungsvermögens und der Gesammtausstrahlung der Gase,

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, aus diesen Werthen der Strahlung unter gegebenen Bedingungen das Strahlungsvermögen der Längeneinheit der Gassäule und ihre totale Strahlung zu berechnen. Um diese zu finden, nehmen wir an, dass wir unter den hier benutzten Versuchsbedingungen die Absorption des Gases vollständig vernachlässigen können.[1]

Es sei $AB$ (vgl. nebenstehende Figur) die strahlende Gassäule, $C$ die Lage des Bolometergitters sein. Wenn $S$ das Strahlungsvermögen der Längeneinheit und $CA = a$ und $CB = b$, so ist die Strahlung, welche $C$ trifft und welche wir mit $I$ bezeichnet haben,

C x A dx B

[1] Von der Zulässigkeit dieser Annahme habe ich mich durch directe Versuche überzeugt; sogar die Absorption des Kohlenoxyds ist unter oben erwähnten Umständen kaum mittels des Bolometers zu bestimmen.

$$I = \int_a^b S \frac{dx}{x^2}, \qquad I = S \frac{b-a}{ab},$$

woraus

$$S = \frac{ab}{b-a} I.$$

Unter der Annahme, dass die Strahlung in allen Richtungen dieselbe ist, finden wir die totale Strahlung der Längeneinheit der Gassäule

$$T = 4 \pi S.$$

Wenn wir in diese Ausdrücke den Werth von $I$ einführen und dabei bemerken, dass $a = 11{,}5$ cm, $k = 30{,}5$ cm, so finden wir

$$S = \alpha \frac{I_{100} \times 127 \times 10^{-9}}{1{,}5} \times \frac{11{,}5 \times 30{,}5}{30{,}5 - 11{,}5},$$

und

$$I = 12{,}6\, S.$$

$S$ und $T$ bedeuten also hier das Strahlungsvermögen und die Gesammtstrahlung einer Gassäule von 1 cm Länge und von einem Querschnitte von 1,41 qcm (= Querschnitt des Entladungsrohres) beim Durchgange eines Stromes = 1 Mikroampère.

Da die Strahlung der Stromstärke proportional ist und das Potentialgefälle im positiven Lichte vom Querschnitte des Entladungsrohres unabhängig ist, könnte man wohl annehmen, dass auch die Strahlung vom Querschnitte des Entladungsrohres unabhängig sei. Wenn dem so ist, dann könnten wir ganz einfach sagen, dass $S$ und $T$ das Strahlungsvermögen und die Gesammtstrahlung einer Gassäule von der Länge 1 ist, wenn durch dieselbe 1 Mikroampère geleitet wird und zwar ohne Rücksicht auf den Durchmesser der Gasschicht. Nach den Untersuchungen von G. Wiedemann[1]) über die Wärmeentwickelung in Geissler'schen Röhren ist dieselbe beinahe von dem Querschnitte unabhängig. Wie ich schon hervorgehoben habe, können wir jedoch nicht von der Wärmeentwickelung auf die Verhältnisse der Strahlung schliessen. Die leider allzu spärlichen Versuche von Staub[2]) über das

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 158. p. 35 und 252. 1876.

2) G. Staub, Inauguraldissert. p. 41. Zürich 1890.

Verhältniss zwischen Lichtstrahlung und Gesammterwärmung bei Flaschenentladungen scheinen übrigens deutlich die Abhängigkeit dieses Verhältnisses von dem Rohrdurchmesser zu zeigen. Die Versuchsbedingungen, unter welchen Hr. Staub gearbeitet hat[1]) (Entladungen von grösseren Condensatoren), sind jedoch so wesentlich von den meinigen verschieden, dass man wohl nicht ohne weiteres die Untersuchungen vergleichen kann. Was meine eigenen Untersuchungen betrifft, so lassen dieselben die Frage auch noch offen. Wohl habe ich in verschiedenen Rohren immer dasselbe Verhältniss zwischen Licht- und Gesammtstrahlung bei derselben Spannung des Gases gefunden, der Unterschied in den Durchmessern der Rohre ist jedoch zu unbedeutend, um bestimmte Schlussfolgerungen über diese Frage zu erlauben. Eine neue Untersuchung mit Röhren von ganz verschiedenem Durchmesser scheint demzufolge in hohem Grade wünschenswerth.

Die folgenden Tabellen enthalten $S$ und $T_s$ aus den Tabellen 3—5 berechnet und ebenso die entsprechenden Werthe $L$ und $T_l$ für die durch eine Alaunplatte durchgegangene Strahlung.

Tabelle 10.

Wasserstoff.

| Druck mm | Potentialgefälle Volt p. cm | $S$ $\times 10^{-6}$ | $T_s$ $10^{-5}$ | $L$ $10^{-6}$ | $T_l$ $10^{-5}$ | $\frac{T_s}{V \cdot i/4,2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,12 | 12 | 3,4 | 4,2 | 2,0 | 2,5 | 0,015 |
| 0,15 | 13 | 3,8 | 4,7 | — | — | 0,015 |
| 0,16 | 13 | 2,9 | 3,6 | 1,8 | 2,3 | 0,012 |
| 0,18 | 13 | 3,7 | 4,6 | 1,4 | 1,7 | 0,015 |
| 0,23 | 15 | 3,4 | 5,4 | — | — | 0,015 |
| 0,42 | 19 | 5,1 | 6,3 | — | — | 0,014 |
| 0,56 | 22 | 4,0 | 5,0 | 1,6 | 2,0 | 0,010 |
| 0,76 | 24 | 5,4 | 6,7 | 1,3 | 1,6 | 0,012 |
| 0,90 | 25 | 5,8 | 7,2 | — | — | 0,012 |
| 1,02 | 26 | 6,0 | 7,5 | 1,6 | 2,0 | 0,013 |
| 1,26 | 27 | 5,0 | 6,2 | 1,2 | 1,5 | 0,010 |
| 1,60 | 29 | 3,8 | 4,7 | 1,1 | 1,4 | 0,007 |
| 2,30 | 33 | 2,4 | 2,9 | 0,8 | 1,0 | 0,004 |
| 2,66 | 35 | 2,4 | 2,9 | 0,7 | 0,9 | 0,003 |

1) Der Verf. hat weder die Capacität der Condensatoren, noch die Potentialhöhe, bis zu welcher dieselben geladen wurden, angegeben, was doch den Werth seiner Untersuchungen bedeutend erhöht haben würde.

Tabelle 11.

Stickstoff.

| Druck mm | Potentialgefälle Volt p. cm | $S$ $10^{-6}$ | $T_s$ $10^{-5}$ | $L$ $10^{-6}$ | $T_l$ $10^{-5}$ | $\frac{T_s}{V.i/4,2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,12 | 14 | 19,9 | 24,8 | 15,2 | 18,9 | 0,074 |
| 0,15 | 15 | 18,6 | 23,2 | 17,9 | 22,0 | 0,065 |
| 0,16 | 15 | 18,7 | 23,6 | 16,9 | 21,0 | 0,066 |
| 0,23 | 17 | 19,2 | 23,9 | 16,2 | 20,1 | 0,059 |
| 0,35 | 21 | 19,6 | 24,4 | 16,5 | 20,6 | 0,049 |
| 0,42 | 23 | 21,3 | 26,5 | 17,2 | 20,5 | 0,048 |
| 0,57 | 28 | 23,9 | 29,8 | 18,6 | 23,1 | 0,045 |
| 0,66 | 30 | 25,7 | 32,0 | 21,3 | 26,7 | 0,045 |
| 0,70 | 32 | 26,5 | 33,0 | 20,3 | 25,4 | 0,043 |
| 0,72 | 33 | 24,4 | 30,4 | 18,3 | 22,9 | 0,039 |
| 0,88 | 37 | 26,4 | 32,9 | 18,8 | 23,4 | 0,037 |
| 1,00 | 42 | 28,9 | 36,0 | 21,5 | 26,9 | 0,036 |
| 1,10 | 45 | 29,3 | 36,5 | 18,2 | 22,7 | 0,034 |
| 1,15 | 47 | 26,8 | 33,4 | 19,2 | 24,0 | 0,030 |
| 1,21 | 49 | 31,8 | 39,7 | 22,2 | 27,7 | 0,034 |
| 1,45 | 61 | 30,2 | 37,6 | 16,9 | 21,0 | 0,026 |
| 1,54 | 62 | 29,7 | 36,0 | 20,6 | 25,6 | 0,024 |
| 1,62 | 65 | 27,4 | 34,2 | 18,8 | 23,4 | 0,022 |
| 1,64 | 66 | 33,3 | 41,5 | 22,6 | 28,3 | 0,026 |

Tabelle 12.

Kohlenoxyd.

| Druck mm | Potentialgefälle Volt p. cm | $S$ $10^{-6}$ | $T_s$ $10^{-5}$ | $L$ $10^{-6}$ | $T_l$ $10^{-5}$ | $\frac{T_s}{V.i/4,2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,14 | 15 | 8,9 | 11,1 | 4,1 | 5,2 | 0,032 |
| 0,18 | 17 | 9,3 | 11,6 | 5,3 | 6,6 | 0,029 |
| 0,29 | 21 | 10,3 | 12,8 | 4,0 | 5,0 | 0,026 |
| 0,32 | 22 | 11,6 | 14,3 | 4,1 | 5,2 | 0,027 |
| 0,46 | 28 | 9,7 | 12,2 | 3,3 | 4,1 | 0,018 |
| 0,59 | 32 | 10,1 | 12,6 | 3,2 | 4,0 | 0,017 |
| 0,74 | 38 | 8,6 | 10,8 | 3,0 | 3,8 | 0,012 |
| 0,77 | 39 | 12,8 | 15,7 | 3,1 | 3,9 | 0,017 |
| 0,99 | 47 | 11,0 | 13,7 | 3,0 | 3,8 | 0,012 |
| 1,62 | 66 | 14,5 | 18,1 | 2,0 | 2,6 | 0,012 |

Die Resultate sind graphisch dargestellt auf der Taf. V. Fig. 8, 9 und 10; als Abscissen sind die Drucke, als Ordinaten $T_s$ (die punktirte Curve) und $T_l$ (die ausgezogene Curve) genommen. Die Gesammtstrahlung nimmt mit zunehmendem Drucke bei Stickstoff und Kohlenoxyd langsam zu. Bei Wasserstoff finden wir für einen Druck von ca. 1 mm ein Maximum,

das wohl aller Wahrscheinlichkeit nach von einem Minimum begleitet wird.

Die Intensität der Strahlung verschiedener Gase steht in keiner erkennbaren Beziehung zu den Potentialgefällen in denselben. Mit Kenntniss der Stromstärke und der Potentialgefälle können wir die Arbeit berechnen, die den verschiededenen Gasen bei dem Stromdurchgange zugeführt wird. Das Verhältniss zwischen der Gesammtausstrahlung und dieser Arbeit, in Grammcalorien ausgedrückt, habe ich berechnet und in der letzten Columne der obigen Tabelle aufgeführt. Diese Columne enthält also

$$\frac{T_s}{Vi/4,2},$$

oder die Gesammtausstrahlung bei derselben Stromarbeit per Längeneinheit des Entladungsrohres. Hieraus folgt nun, dass nur ein ganz beschränkter Theil der in der positiven Strombahn geleisteten Arbeit in Strahlung umgesetzt wird, weiter dass dieser Theil bei verschiedenen Gasen verschieden ist und schliesslich, dass derselbe im allgemeinen um so kleiner ist, je grösser die Spannung des Gases. Den übrigen Theil der Arbeit, welcher nicht in Form von Strahlung abgegeben wird, finden wir ohne Zweifel, zum grössten Theil wenigstens als Wärme wieder.[1]) Ein relatives Maass dieser Wärmeentwickelung in verschiedenen Gasen gibt uns die Strahlung der erwärmten Rohrwände in unseren oben angeführten Versuchen, sobald nämlich der Strom solange gewirkt hat, dass die Strahlung constant ist. Obschon eine genaue Bestimmung dieser Wärme nicht die Aufgabe vorliegender Untersuchung war, mögen doch die folgenden Zahlen angeführt werden, um eine ungefähre Vorstellung des relativen Werthes dieser Strahlung zu geben. Die kleine Tabelle 13 enthält also in der letzten Columne die Strahlung der Rohrwände allein nach längerem Durchgange eines Stromes von 100 Scalentheilen (= 0,0015 Amp.) und zwar bei ungefähr gleichem Potentialgefälle in der positiven Strombahn. Zum Vergleich führe ich auch die Strahlung der Gase allein an, diese aus den Tabellen 3—5 genommen.

1) Es ist jedoch möglich, dass ein Theil der Arbeit für moleculare Umwandlungen in Anspruch genommen wird, und dass die entsprechenden Wärmemengen nicht in der positiven Strombahn wiederzufinden sind.

Tabelle 13.

| Gas | Druck | Potentialgefälle Volt per cm | Gesammtstrahlung $I_{100}$ | Strahlung der Rohrwände $W_{100}$ |
|---|---|---|---|---|
| Wasserstoff | 1,60 | 29 | 4,2 | 30 |
| Sauerstoff | 1,27 | 31 | 0—1,4 | 24 |
| Stickstoff | 0,66 | 30 | 28,7 | 33 |
| Kohlenoxyd | 0,59 | 32 | 10,8 | 28 |

Aus diesen Zahlen, welche, wie gesagt, keine grössere Genauigkeit beanspruchen, geht doch hervor, dass die Erwärmung verschiedener Gase bei gleicher Stromarbeit ungefähr dieselbe ist. Wir sehen also, dass die Strahlung nicht eine nothwendige Folge der Wärmeentwickelung ist. Die letzte steht ohne Zweifel in enger Beziehung zu der Stromarbeit, die erste dagegen nicht.

### VII. Einige theoretische Bemerkungen.

Es ist schon durch andere Arbeiten, durch die Untersuchungen von Hittorf[1]) u. a., bekannt, dass Entladung durch Gase ohne Lichtentwickelung möglich ist. Die vorliegende Untersuchung zeigt uns aber, dass die Erklärung dieses Verhältnisses in den meisten Fällen darin zu suchen ist, dass mit der Zunahme der Spannung der Gase die Strahlung unsichtbar wird, so z. B. bei Wasserstoff, Stickstoff und Kohlenoxyd. Sauerstoff gibt uns jedoch ein Beispiel von Stromdurchgang bei schwacher Spannung, die von einer verhältnissmässig sehr schwachen Strahlung begleitet ist.

Alles dies zeigt uns, dass die Strahlung der Gase bei electrischer Entladung nicht nur in qualitativer, sondern auch in quantitativer Beziehung von der molecularen Beschaffenheit der Gase abhängig und dass sie als eine secundäre Wirkung des electrischen Stromes zu betrachten ist. Bei dem Stromdurchgang wird eine nicht unbedeutende Arbeit in Wärmebewegung umgewandelt. Ein wie grosser Theil dieser Arbeit in Strahlung umgesetzt wird, hängt von der Fähigkeit der Molecüle ab, solche Schwingungszustände anzunehmen, welche Strahlung hervorbringen.

Wenn wir uns eine Vorstellung von den inneren Vorgängen der Strahlung der Gase bei electrischer Entladung machen wollen,

1) Hittorf, Wied. Ann. **21**. p. 112. 1884.

können wir von zwei grundverschiedenen Ansichten ausgehen: entweder alle Molecüle in der Gasmasse oder nur eine beschränkte Anzahl derselben nehmen an der Strahlung theil (im ersteren Falle ist das Gas homogen, im letzteren heterogen).

Wenn die Strahlung bei der Entladung durch eine über die Molecüle hingehende Bewegung hervorgerufen wird und alle Molecüle an der Strahlung theilnehmen[1]), so muss man, weil die mittlere Temperatur des Gases dabei sehr niedrig sein kann[2]) ein ganz besonderes Verhältniss zwischen der translatorischen und vibratorischen Bewegung der Molecüle annehmen. Die Strahlung, welche nur von der letztgenannten herrührt, ist mithin nicht durch die Temperatur allein bedingt. Von diesem Standpunkte aus betrachtet unterliegt es keinem Zweifel, dass die Strahlung als irregulär (nach R. v. Helmholtz) oder als eine Art von Luminescenz (E. Wiedemann) zu betrachten ist.

Wenn dagegen die Electricitätsüberführung durch Convection (G. Wiedemann) oder durch eine Art Electrolyse (Schuster, J. J. Thomson, Arrhenius u. a.) vermittelt wird, so kann die Anzahl der Molecüle, die die Leitung herstellen, sehr gering sein.[3]) Die mittlere Temperatur des Gases kann dann sehr niedrig sein und demungeachtet kann der Bewegungszustand der activen Molecüle einer sehr hohen Temperatur entsprechen. Wenn wir nun unter irregulärer Strahlung eine solche verstehen, welche nicht ausschliesslich durch Erwärmung des ganzen Körpers hervorgebracht werden kann, dann ist auch diese Strahlung natürlich von irregulärer Natur. Verstehen wir aber unter irregulärer Strahlung eine derartige, dass in ihr die spectrale Vertheilung der Energie eine anomale ist, dann müssen wir, um beurtheilen zu können, ob die Strahlung bei Gasentladung regulärer oder irregulärer Natur sei, erst die spectrale Vertheilung der regulären Strahlung bei schwacher Spannung und hoher Temperatur kennen. Dies ist aber nicht der Fall, und unsere Schlüsse sind demzufolge nur Wahrscheinlichkeitsschlüsse. Für eine irreguläre Strahlung in

---

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **37.** p. 187—188. 1889.

2) E. Wiedemann, Wied. Ann. **6.** p. 298. 1879 und **10.** p. 202. 1880; B. Hasselberg, Mém. de l'Acad. Imp. des Sciences de St. Petersburg. **27.** Nr. 1. 1879.

3) Schuster, Proc. of the Roy. Soc. **47.** p. 526. 1890.

dem zuletzt angeführten Sinne sprechen aber folgende Thatsachen, welche wir hier gefunden haben.

1. Die Strahlung steht in keiner Beziehung zu dem Absorptionsvermögen des Gases bei gewöhnlicher Temperatur. Wenn auch das Absorptionsvermögen sich mit der Temperatur ändert, so sind doch nicht so grosse Veränderungen zu erwarten, wie die oben gefundenen Verhältnisse bei Kohlenoxyd und Stickstoff es nothwendigerweise verlangen.

2. Die Strahlung, welche z. B. bei Stickstoff bei ca. 2 mm Spannung reich an dunklen Strahlen ist, ändert mit abnehmender Spannung schnell ihre Beschaffenheit und besteht bei einem Drucke von 0,1 mm beinahe ausschliesslich aus Lichtstrahlung. Diese schnelle und doch stetige Veränderung der Zusammensetzung der Strahlung kann wohl nur durch die Annahme anomaler Strahlungsverhältnisse erklärt werden.

Die Erklärung der gefundenen Thatsachen scheint mir übrigens nur durch die Annahme möglich, dass die Strahlung des Gases bei electrischer Entladung aus zwei Theilen besteht, der eine regulärer, der andere irregulärer Natur; mit abnehmender Spannung nimmt der erste ab, die irreguläre Strahlung nimmt dagegen um so mehr zu, je weniger die Bewegungen durch die Gasmasse gedämpft werden. Durch diese Annahme erklärt sich nicht nur die Veränderung in der Zusammensetzung der Strahlung bei vermindertem Drucke, sondern auch das bei Wasssserstoff und wahrscheinlich auch bei Stickstoff vorkommende Minimum der Gesammtstrahlung (bei ca. 2 mm Druck).

Die beiden oben angeführten Theorien über die Natur der Entladung durch Gase dürften also zu derselben Annahme in Bezug auf die anomale Natur der Strahlung führen. Versuchen wir aber die näheren Umstände, die wir hier gefunden haben, nach den beiden Theorien klar zu stellen, so scheint es mir, dass, wenn wir auch nicht entschiedene Beweise für oder gegen die eine oder die andere Theorie vorbringen können, die Vorgänge doch am leichtesten durch die Annahme einer Electricitätsüberführung durch eine zu der Stromstärke proportionalen Anzahl von Molecülen erklärt werden können.

Bei constantem Drucke wird in jedem Molecüle ein bestimmter Theil der Energie in Strahlung umgesetzt; wird die Stromstärke vermehrt, so nimmt die Zahl der activen Molecüle

und damit auch die Strahlung in einem zur Stromstärke proportionalen Verhältniss zu. Weil die Zahl der activen Molecüle relativ klein ist, können wir die Dämpfungsverhältnisse als constant betrachten und die Zusammensetzung der Strahlung bleibt demzufolge bei Vermehrung der Stromstärke beinahe unverändert. Vermehrt man dagegen den Druck des Gases, so ändern sich deutlich die Dämpfungsverhältnisse, die anomale Strahlung wird dann leichter in eine normale umgesetzt und die Strahlung wird reicher an ultrarothen Strahlen. Ein grösserer Theil der zugeführten Energie wird für die Erwärmung benutzt, und für eine und dieselbe Stromarbeit nimmt die Gesammtstrahlung mit zunehmendem Drucke ab.

Nehmen wir dagegen an, dass das Gas als eine homogene Masse an der Strahlung Theil nimmt, so scheint es wohl auch hier keine Schwierigkeiten darzubieten, die Proportionalität der Gesammtstrahlung und der Stromstärke bei constantem Drucke zu erklären. Wir werden aber, um die Unabhängigkeit der Zusammensetzung der Strahlung von der Stromstärke, bei constantem Drucke erklären zu können, zu der Annahme genöthigt, dass bei einer Vermehrung der Energie der Gesammtstrahlung, doch das Verhältniss zwischen den Intensitäten der verschiedenen Schwingungsperioden oder also den Intensitäten der verschiedenen Strahlungsgattungen immer dasselbe bleibt, eine Annahme, die jedoch nicht mit dem übereinstimmt, was wir übrigens von den qualitativen Veränderungen der Strahlung homogener Körper bei einer Zunahme der Intensität der Strahlung (durch eine Temperaturerhöhung) wissen.

Wie gesagt, lässt sich jedoch, so viel ich es übersehe, die Frage über die Natur der Entladung aus den gewonnenen Resultaten nicht definitiv entscheiden. Zu diesem Zwecke sind ohne Zweifel die Versuche zu gering an Zahl und zum Theil auch zu ungenau, wozu kommt, dass einige wichtige Fragen, z. B. über den Einfluss des Rohrdurchmessers, nicht in dieser Untersuchung berücksichtigt worden sind.

## IX. Zusammenstellung der wichtigsten Resultate.

Um die Uebersicht der gewonnenen Resultate zu erleichtern, stelle ich die wichtigsten zusammen, dabei ausdrücklich bemerkend, dass dieselben natürlich nur eine definitive

Bedeutung unter den oben näher angegebenen Versuchsbedingungen haben.

1. Für ein bestimmtes Gas und eine bestimmte Spannung ist die Strahlung des positiven Lichtes proportional der Intensität des electrischen Stromes.

2. Bei einem und demselben Gase und für eine bestimmte Spannung ist die Zusammensetzung der Strahlung constant und unabhängig von der Stromstärke.

3. Wenn die Spannung des Gases vergrössert wird, nimmt die Gesammtstrahlung für dieselbe Stromstärke in der Regel zu, bei schwachem Drucke aber zuerst langsam, dann schneller; gleichzeitig ändert sich auch die Zusammensetzung der Strahlung insofern, als das Verhältniss zwischen der Intensität der Strahlung kürzerer Wellenlängen zur Intensität der Gesammtstrahlung abnimmt. Die Intensitätsvertheilung im Spectrum ändert sich also, indem mit abnehmender Spannung die Intensität der Strahlung kürzerer Wellenlängen verhältnissmässig zunimmt.

4. Das Verhältniss zwischen der Intensität der Gesammtstrahlung und der Stromarbeit nimmt mit abnehmender Spannung des Gases stetig zu.

5. Der optische Nutzeffect der Strahlung (hier durch das Verhältniss der Intensität der durch die Alaunplatte hindurchgegangenen Strahlen zu der Intensität der Gesammtstrahlung angegeben) ist bei niedriger Spannung für einige Gase sehr gross (ca. 0,90 Proc. für Stickstoff); der optische Nutzeffect der geleisteten Arbeit ist dagegen nicht besonders gross (ca. 8 Proc. für Stickstoff von 0,1 mm Druck).

6. Die Stärke der Gesammtstrahlung ist als eine secundäre Folge der Entladung zu betrachten und hängt von der molecularen Beschaffenheit des Gases ab.

7. Von welcher Ansicht über die Natur der Gasentladung man auch ausgeht, scheint diese Untersuchung die Annahmen von Hittorf, E. Wiedemann und anderen zu bestätigen insofern, als die Strahlung keine reine Function der Temperatur der Gase ist, sondern als eine anomale („irreguläre", „Luminescenz") zu betrachten ist.

Upsala, Dec. 1892.

## VII. *Bestimmung des Brechungsexponenten für Flüssigkeiten durch Spiegelablesung mit Fernrohr und Scala; von H. Ruoss.*

---

Hr. Zenger[1]) hat eine Bestimmung des Brechungsexponenten durch lineare Messungen ohne Theilkreis angegeben, welche die Winkel auf 3″ und den Exponenten auf 5 Decimalen genau anzugeben gestattet. Bei dieser Bestimmung wird ein Glasprisma vor den Spalt eines Dunkelzimmers aufgestellt, durch den Spalt fällt Licht ein, welches in der Entfernung $x = 3$ m auf einer Scala ein Spectrum erzeugt. Will man den Brechungscoefficienten etwa der Linie $B$ des Spectrums bestimmen, so stellt man das Prisma so am Spalte auf, dass der Lichtstrahl $B$ Minimalablenkung erfährt (Fraunhofer'sche Stellung); hierauf stellt man es so, dass der einfallende Strahl senkrecht zur Prismenfläche auffällt (Meyerstein'sche Stellung).

In beiden Stellungen werden die Abstände $y$ der Linie $B$ von demjenigen Punkt der Scala bestimmt, welcher durch das ungebrochene Licht des Spaltes auf der Scala getroffen wird. Die Ablesungen geschehen auf 0,1 mm mit einem längs der Scala verschiebbaren Fernrohr. Die Winkel werden aus $\operatorname{tg} w = y / x$ bestimmt.

Die beiden Stellungen geben zwei Gleichungen für den Brechungsexponenten $n$ und den brechenden Winkel $\varphi$ des Prismas; ermöglichen also die Bestimmung von $n$.

Wir müssen hier beifügen, dass bei der Bestimmung von $w$ Fehler bis zu mehreren Minuten begangen werden können, da für beide Stellungen die Scheitel der Winkel $w$ im allgemeinen nicht im Spalt liegen. Um diese Fehler zu vermeiden, muss man die Spitze dieser Winkel in den Spalt bringen, indem man Strahlen betrachtet, welche an der Kante des brechenden Winkels auffallen und nicht innerhalb der Seitenfläche des Prismas.

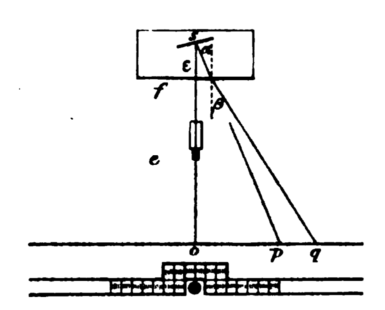
---

1) Zenger, Compt. rend. **99**. p. 377—380. 1884.

Hr. Feussner[1]) bestimmt mit Hülfe zweier Scalen und Fernrohr den Winkel und Brechungsexponenten von Prismen. Auf das Fernrohr wird ein eigens hierzu construirtes Rohr aufgesetzt, welches zwei Spiegel trägt, von denen der eine in die Axe des Fernrohres fällt, während der andere eine Neigung gegen diese Axe besitzt.

Der Brechungsexponent wird mit der Minimalablenkung bestimmt. Bezüglich des Einzelnen verweisen wir auf die Abhandlung selbst.

Zu meinen Versuchen ist ein kleines Gefäss nothwendig, das auf einer Seitenfläche $f$ (vgl. Fig.) durch eine planparallele Platte abgeschlossen ist. Im Gefäss befindet sich ein Spiegel $s$, der um eine verticale Axe drehbar ist. Diese Axe ist mit einer Justirvorrichtung versehen, welche dazu dient, den Spiegel parallel zur Platte $f$ zu stellen.




Senkrecht zur Platte wird ein Fernrohr mit Gauss'schem Ocular horizontal aufgestellt und in einer Entfernung von etwa 4 m eine 3 m lange Scala parallel der Platte.

Füllt man das Gefäss so weit mit Wasser, dass der Spiegel etwa zur Hälfte im Wasser steht, so sieht man im Fernrohr einen Scalenstrich im oberen von Luft umgebenen Spiegeltheil, und einen anderen Scalenstrich im unteren von Wasser umgebenen Spiegeltheil. Sind $p$ und $q$ die Entfernungen der Scalenstriche von demjenigen Punkt $O$ der Scala, welcher in der Fernrohraxe liegt, so ergibt sich aus:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{p}{e + \varepsilon} \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{q - \varepsilon \operatorname{tg} \alpha}{e} \\ n &= \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \end{aligned} \right.$$

der Brechungsexponent.

1) Feussner, Sitzungsber. d. Gesellsch. z. Bef. d. ges. Naturw. Marburg p. 65—76. 1888.

Das Fernrohr und der Spiegel haben die richtige Lage, wenn:

1. bei der Einstellung des Fernrohres auf Unendlich das seitlich beleuchtete Fadenkreuz mit seinen zwei Reflexionsbildern dem in der Platte $f$ und dem im Spiegel coincidirt;

2. die Spiegelaxe mit dem verticalen Faden des Fadenkreuzes zusammenfällt. Durch Justirung der Axe und Verschiebung des Fernrohres wird dieses erreicht.

Damit die Hälfte jedes abzulesenden Scalentheilstriches im Wasser und in der Luft gesehen wird, muss die Mittellinie der Scala annäherd in die Horizontalebene des horizontalen Fadens fallen. Da sich bei einer so aufgestellten Scala der Theilstrich $O$ im Fernrohr nicht sehen lässt, so bringt man im Nullpunkt $O$ einen Aufsatz an, auf welchen dieser Theilstrich verlängert wird.

Bringt man die Scala wie bei der gewöhnlichen Spiegelablesung direct über dem Fernrohr an, so muss dieselbe in der Nähe des Nullpunktes $O$ einen Ausschnitt und Aufsatz besitzen (vgl. Fig.), damit sie reiterförmig aufgesetzt werden kann. Für die Vergrösserung ist es indessen vortheilhafter, das Fernrohr näher am Spiegel aufzustellen, als die Scala.

Die Scala hat die richtige Lage:

1. wenn sie horizontal steht;

2. wenn das Bild des Theilstriches Null im Spiegel oder auf der Platte $f$ mit dem verticalen Faden coincidirt;

3. wenn das Loth in $O$ auf der Scala durch die Spiegelaxe geht.

Diese Bedingungen werden durch Probiren sehr leicht erreicht, ebenso die Bedingung, dass das Scalenbild annähernd in die Mitte des Gesichtsfeldes fällt. Was die Bedingung 3 anlangt, so kann man in $O$ eine Reisschiene an die Scala anlegen und längs derselben visiren. $\varepsilon$ wird direct gemessen vom Spiegel bis zur *Vorderfläche* der Platte $f$; $e$ von dieser Vorderfläche bis zur Scala.

### Correction.

Durch die Platte $f$ erleiden die Strahlen eine kleine Verschiebung. Ist $n$ und $\alpha$ auf die angegebene Weise aus den

Gleichungen (1) bestimmt, und ist die Dicke der Platte $\delta$, $\nu$ ihr Brechungocoefficient, so erhält man als Verschiebungen:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \Delta p = \delta . (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi), \text{ wo } \sin \varphi = \frac{\sin \alpha}{\nu} \\ \Delta q = \delta . (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \psi), \text{ wo } \sin \psi = \frac{n}{\nu} \sin \alpha. \end{cases}$$

Diese Werthe sind zu den abgelesenen $p$ und $q$ zu addiren und dann geben die Formeln (I) mit diesen neuen Werthen von $p$ und $q$ das richtige $n$.

Bei dem weiter unten angeführten Beispiel waren die Correctionen in $q$ gleich Null zu setzen; die in $p$ 0 bis 0,1 mm.

Ablesungen, bei denen das Flüssigkeitsbild des Scalenstriches bei nicht homogenem Licht noch deutlich (nicht verschwommen) ist, sind werthlos, da die Dispersion zu klein ist, um ein genaues $n$ zu geben.

Man nehme daher Ablesungen von möglichst grossem $p$. Bei homogenem Licht kann man einen schwarzen, auf der Scala bewegbaren Schieber so weit verschieben, bis seine Grenzlinie mit dem verticalen Faden coincidirt; dadurch ist auch bei ganz ungünstiger Beleuchtung ein genaues Ablesen möglich. Da bei $e = 4$ m $1''$ einen Bogen von 0,019 mm gibt, so erlaubt die Methode bei Ablesungen auf 0,1 mm eine Genauigkeit der Winkelangaben auf $5''$.

Da ferner im Maximum die Fehler $dp$ und $dq$ gleich 0,1 mm, so ergibt sich im Maximum

$$dn = \frac{1}{e \,.\, 10\,000 \,.\, \sin \alpha} [\cos^3 \beta \pm n \cos^3 \alpha],$$

also

$$dn < \frac{\cos^3 \alpha \, (1 + n)}{e \,.\, 10\,000 \,.\, \sin \alpha},$$

wobei $e$ in Metern ausgedrückt ist.

Dieser Ausdruck nimmt mit wachsendem $\alpha$ ab. Für $\alpha = 15^0$ resp. $30^0$ und $n = \frac{4}{3}$, $e = 4$ wird z. B.: $dn < 0{,}000203$ resp. $dn < 0{,}000075$, sodass für $\alpha = 15^0$ der mittlere Fehler der Einzelmessung kleiner als 0,000 101.

Die Methode hat aber ausser dieser grossen Genauigkeit noch den Vortheil, dass man nicht bloss zwei Bestimmungen (wie bei den anderen Methoden), sondern beliebig viele mit verschiedenen Brechungswinkeln durchführen kann, indem man dem Spiegel verschiedene Drehungen ertheilt.

Für Wasser von 22,9° C. und Natriumlicht ergab sich für fünf Beobachtungen nach Durchführung der an ihnen vorzunehmenden Correction:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 781,5 | 699,4 | 750,2 | 779,3 | 800,5 |
| $q$ | 1056,2 | 942,3 | 1012,4 | 1053,1 | 1082,8. |

Dabei war $e = 3817{,}5$ mm und $\varepsilon = 33{,}5$ mm.

Hieraus ergab sich als mittlerer Werth

$$n = 1{,}33\,276,$$

als mittlerer Fehler der Einzelmessung resp. des Mittels

$$0{,}00\,011 \text{ resp. } 0{,}00\,005,$$

und als wahrscheinlicher Fehler des Mittels 0,00 003.

Der obige Werth für $n$ stimmt bis zur vierten Decimale mit dem von Hrn. B. Walther[1]) überein.

Stuttgart, Phys. Inst. der techn. Hochschule, Dec. 1892.

1) B. Walther, Wied. Ann. **46**. p. 423. 1892.

## VIII. *Ueber die Beziehung der Dielectricitätsconstanten zum optischen Brechungsexponenten; von P. Drude.*

(Nach den Gött. Nachr. 1893, Nr. 2 mitgetheilt.)

---

Der Satz, dass der optische Brechungsexponent eines Körpers gleich der Quadratwurzel aus seiner Dielectricitätsconstante ist, findet bekanntlich bei den meisten Körpern keine Bestätigung, schon allein wegen des Auftretens der Dispersion. In neuerer Zeit sind nun von Koláček [1]), Goldhammer [2]), Ebert [3]) und v. Helmholtz [4]) die electromagnetischen Gleichungen auch auf die Dispersionserscheinungen erweitert, sodass der obengenannte Satz auch theoretisch nicht mehr bestehen bleibt.

Für Körper mit normaler Dispersion hat sich die Dispersionsformel

$$n^2 = -A T^2 + B + \frac{C}{T^2} + \frac{D}{T^4} \tag{I}$$

als sehr brauchbar bewiesen. [5]) Es bedeutet $n$ den Brechungsexponenten (gegen den leeren Raum), $T$ die Schwingungsdauer des Lichtes, $A$, $B$, $C$, $D$ sind positive Coefficienten. $B$ charakterisirt den ungefähren Werth von $n^2$ innerhalb des sichtbaren Spectrums, und diese Grösse ist vorzugsweise mit der Dielectricitätsconstanten verglichen. Es zeigt sich nun, dass $B$ höchstens annähernd gleich, aber nie grösser als die Dielectricitätsconstante $\varepsilon$ ist.

Wenn man in den verschiedenen Theorien der Dispersion (auch in den mechanischen) nach dem Grunde dieser Thatsache forscht, so erkennt mau leicht, dass sie durch die im Ultrarothen liegenden Absorptionsgebiete verursacht wird. Diese machen auch eine Extrapolation des optischen Brechungsexponenten auf unendlich langsame Schwingungen unmöglich.

---

1) F. Koláček, Wied. Ann. **32.** p. 224, 429. 1887; **34.** p. 673. 1888.

2) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. **47.** p. 93, 1892.

3) H. Ebert, Wied. Ann. **48.** p. 1. 1893.

4) H. v. Helmholtz, Berl. Ber. Dec. 1892 p. 1.

5) Vgl. E. Ketteler, Theoret. Optik, Braunschw. p. 547. 1885.

wie neuerdings Ketteler[1]) nach seiner und von der v. Helmholtz'schen mechanischen Theorie nachwies.

Wenn daher auch wohl die Ursache für die Abweichung des optischen Brechungsexponenten von der Dielectricitätsconstanten klar zu Tage liegt, so möchte ich im Folgenden doch noch etwas näher auf diesen Punkt eingehen, um zu zeigen, in welch bestimmter und einfacher Weise jene Abweichung mit gewissen Vorstellungen der mechanischen und electromagnetischen Dispersionstheorie verknüpft ist.

Ich beginne mit der mechanischen Theorie von v. Helmholtz, weil sie die Form der Ausgangsgleichungen in der bestimmtesten und mechanisch anschaulichsten Weise liefert.

## I. Mechanische Theorie.

Bezeichnet $u$ die Elongation der Aethertheile aus der Ruhelage, $U$ die der ponderabeln Theile (Molecüle), so bestehen nach v. Helmholtz[2]) für ebene Wellen, welche sich nach der $z$-Axe fortpflanzen, die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta(u - U), \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\gamma U - \delta\frac{\partial U}{\partial t} + \beta'(u - U). \tag{2}$$

Die Gleichungen sind auf die Masseneinheit des Aethers und der Molecüle bezogen. Bezeichnet man daher die Reactionskraft zwischen Aether und Molecülen mit $R$, so muss sein

$$\beta m(u - U) = \beta' M(u - U) = R,$$

d. h.

$$\beta : \beta' = M : m, \tag{3}$$

falls $m$ die Dichte des Aethers bedeutet, $M$ die Dichte des Antheils der Materie, welche durch die Lichtschwingungen mit in Bewegung versetzt wird.

Die Gleichung (2) lehrt, dass die Molecüle, falls sie sich ohne Reibung bewegen könnten ($\delta = 0$) und der Aether in Ruhe verbliebe ($u = 0$) eine Eigenschwingung besitzen von der Dauer

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{\beta' + \gamma}.$$

1) E. Ketteler, Wied. Ann. 46. p. 572. 1892.

2) H. v. Helmholtz, Berl. Ber. 1874. p. 667.

Man setze zur Integration:

$$
(4)\quad \begin{cases} u = A\, e^{-kz} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda}\right) & = \Re\left[A\, e^{\frac{i}{\tau}(t - \pi z)}\right], \\ U = A'\, e^{-kz} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{z}{\lambda} + \Delta\right) & = \Re\left[B\, e^{\frac{i}{\tau}(t - \pi z)}\right], \end{cases}
$$

wobei das vorgesetzte $\Re$ bedeutet, dass der reelle Theil der nachfolgenden complexen Grösse genommen werden soll und wobei $A$ und $1/\tau = 2\pi/T$ reell sind, während für die complexen Grössen $\pi$ und $B$ die Beziehungen bestehen:

$$
(5)\quad \begin{cases} \pi = p - i p', \quad p = \frac{T}{\lambda} = \frac{1}{V}, \quad p' = \tau k, \\ B = \mathfrak{A} + i \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{A} = A' \cos 2\pi \Delta, \quad \mathfrak{A}' = A' \sin 2\pi \Delta. \end{cases}
$$

$V$ bezeichnet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Körper.

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man

$$
(6)\quad a \pi^2 = 1 - \beta \tau^2 + \frac{\beta \beta' \tau^2}{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2} + i \frac{\delta}{\tau}},
$$

wobei $\tau_1 = T_1 / 2\pi$, d. h.

$$
(7)\quad \tau_1^2 = \frac{1}{\beta' + \gamma}.
$$

Trennt man das Reelle vom Imaginären, so gewinnt man aus (6)

$$
(8)\quad \begin{cases} a(p^2 - p'^2) = 1 - \beta \tau^2 + \beta \beta' \tau^2 \dfrac{\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}}{\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}} \\ 2 a p p' = \dfrac{\beta \beta' \delta \tau}{\left(\frac{1}{\tau_1^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)^2 + \frac{\delta^2}{\tau^2}}. \end{cases}
$$

Wir wollen sehen, ob diese Gleichungen mit der nach der electromagnetischen Theorie nothwendigen Bedingung verträglich sind, dass für unendlich grosses $\tau$, $p$ einen endlichen Grenzwerth annimmt, während $k$ einen sehr kleinen Werth (oder Null) erreicht. Diese Körper würden electrische Isolatoren sein.

Die Gleichungen (8) ergeben, wenn man die erste der-

selben nach Potenzen von $\tau$ entwickelt und die Entwickelung mit dem zweiten Gliede abbricht:

$$a(p - p'^2) = \tau^2 \beta (\tau_1^2 \beta' - 1) + 1 + \beta \beta' \tau_1^4 (1 + \delta^2 \tau_1^2),$$
$$2 a p p' = \tau \beta \beta' \delta \tau_1^4.$$

Hieraus folgt für $p^2$ die Gleichung:

$$a p^2 - \frac{\tau^2}{p^2} \frac{\beta^2 \beta'^2 \delta^2 \tau_1^8}{4 a} = 1 + \beta \beta' \tau_1^4 (1 + \delta^2 \tau_1^2) + \tau^2 \beta (\tau_1^2 \beta' - 1).$$

Zur Erfüllung dieser Gleichung bieten sich zwei Möglichkeiten: Entweder man setzt die Factoren von $\tau^2$ auf beiden Seiten der Gleichung einander gleich. Dann würde $p^2$ (also auch $n^2$) unendlich klein werden, falls die Reibung $\delta$ zu Null abnimmt. Dieses Verhalten ist unwahrscheinlich. Oder man bestimmt $p^2$ dadurch, dass man die von $\tau$ unabhängigen Glieder obiger Gleichung einander gleich setzt. Es muss dann eine bestimmte Relation zwischen den Constanten $\beta$, $\beta'$, $\delta$, $\tau_1$, $a$ stattfinden, damit auch die Glieder der Gleichung, welche mit $\tau^2$ multiplicirt sind, einander gleich werden. Dies Verfahren liefert, falls man $\delta^2 \tau_1^2$ gegen 1 vernachlässigt, was bei kleiner Reibung gestattet sein wird:

$$a p^2 = 1 + \beta \beta' \tau_1^4, \quad 1 - \tau_1^2 \beta' = \frac{\beta \beta' \delta^2 \tau_1^8}{4 (1 + \beta \beta' \tau_1^4)}.$$

Setzen wir für $1 / \tau_1^2$ seinen Werth nach (7), so erkennt man, dass $\gamma$ klein wird von der Ordnung $\delta^2$. Geht man bis auf erste Ordnung in $\delta^2$ und berücksichtigt die Beziehung (3), so folgt:

$$\gamma = \tfrac{1}{4} \delta^2 \frac{M}{M + m}, \quad a p^2 = \frac{M + m}{m}.$$

Bezeichnet $a_0$ das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $V_0$ des Lichtes im leeren Raume, so ist nach (5)

$$a_0 p^2 = n^2.$$

Daher nach (9) der Grenzwerth $n_\infty^2$ für sehr lange Wellen:

$$n_\infty^2 = \frac{a_0}{a} \cdot \frac{M + m}{m}, \tag{10}$$

während für den Grenzwerth $k_\infty$ des Schwächungscoefficienten $k$ nach (5) folgt:

$$k_\infty = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{V_0} \cdot \frac{M}{\sqrt{m (M + m)}}. \tag{11}$$

Es ist also thatsächlich $k_\infty$ sehr klein, $n_\infty$ endlich.

Da $\gamma$, wie die erste der Formeln (9) lehrt, sehr klein ist, so werden nach Gleichung (2) die Molecüle wesentlich nur durch ihre relativen Verschiebungen gegen den Aether in ihre Ruhelage getrieben. Für sehr langsame Bewegungen würden Aether und Materie nahezu relativ ruhen, d. h. letztere würde ersteren sozusagen mitführen. Diese Anschauung wird durch neuere Untersuchungen[1]), welche direct dazu angestellt sind, um von der relativen Bewegung des Aethers gegen die Materie, z. B. die Erde, Kenntniss zu erhalten, unterstützt.

Verallgemeinert man die Formel (10) auf den Fall, dass mehrere Arten schwingungsfähiger Molecüle im Körper vorhanden sind, was nach einer entsprechenden Verallgemeinerung der Grundgleichungen (1) und (2) leicht geschehen kann, so würde man erhalten:

$$(10') \qquad n_{\infty}^{2} = \frac{a_0}{a} \cdot \frac{m + \sum M_h}{m}$$

Macht man die Annahme, dass der Werth von $a$ nur infolge einer Verdichtung des Aethers zwischen den Molecülen von dem Werthe von $a_0$ verschieden ist, so ist $a_0 : a = m : m_0$, falls $m_0$ die Dichtigkeit des Aethers im leeren Raume bezeichnet. Es wird dann

$$(10'') \qquad n_{\infty}^{2} = \frac{m + \sum M_h}{m_0},$$

*d. h. der Grenzwerth des Quadrates des Brechungsindex für sehr langsame Schwingungen ist gleich dem Verhältniss der gesammten an den Schwingungen theilnehmenden Masse eines bestimmten Körpervolumens zu der Masse des Aethers, welche in dem gleichen Volumen des leeren Raumes enthalten ist.*

Untersuchen wir jetzt die Frage, welchen Werth der Brechungsexponent für Wellen von der Dauer der Lichtschwingungen bei Körpern mit normaler Dispersion besitzen muss. Da man diese als einen Specialfall der anomalen Dispersion auffasst, nur mit dem einzigen Unterschiede, dass die Dauern der Eigenschwingungen der Molecüle nicht mit den Schwingungsdauern sichtbaren Lichtes zusammenfallen, so muss sich nach (8) das allgemeinste Dispersionsgesetz ergeben, wenn

1) Vgl. Des Coudres, Wied. Ann. 38. p. 71. 1889.

man diese Gleichungen nur für den Fall beliebig vieler Molecülarten erweitert.

Da $\tau$ sich wesentlich von jedem $\tau_h$, welches einer Eigenschwingung entspricht, unterscheidet, so kann man in (8) $\delta^2/\tau^2$ gegen $(1/\tau_1^2 - 1/\tau^2)^2$ vernachlässigen, und ebenso $p'^2$ gegen $p^2$. Es folgt dann aus (8), unter Rücksicht auf die Beziehung (7) mit Vernachlässigung von $\gamma$ nach (9) für mehrere Molecülarten:

$$a_0 p^2 = n^2 = \frac{a_0}{a}\left\{1 + \tau^2 \sum \frac{\beta_h \tau_h^2}{\tau^2 - \tau_h^2}\right\}.$$

Sondert man die Absorptionsgebiete im Ultravioletten (Index $v$, $\tau_v < \tau$) von den Absorptionsgebieten im Ultrarothen (Index $r$, $\tau_r > \tau$), so nimmt diese Gleichung die Form an:

$$n^2 = \frac{a_0}{a}\left\{1 + \sum_v \frac{\beta_v \tau_v^2}{1 - \frac{\tau_v^2}{\tau^2}} - \sum_r \frac{\beta_r \tau^2}{1 - \frac{\tau^2}{\tau_r^2}}\right\};$$

oder mit Entwickelung nach Potenzen von $\tau_v/\tau$, resp. $\tau/\tau_r$ und mit Weglassung von kleineren Gliedern:

$$(12) \quad n^2 = \frac{a_0}{a}\left\{-\tau^2 \sum \beta_r + 1 + \sum \beta_v \tau_v^2 + \frac{\sum \beta_v \tau_v^4}{\tau^2} + \frac{\sum \beta_v \tau^6}{\tau^4}\right\}.$$

Diese Formel ist mit der anfangs erwähnten Dispersionsformel (I) identisch. Es ist sonach erklärt, weshalb die in ihr auftretenden Coefficienten $A$, $B$, $C$, $D$ positiv sein müssen. Speciell folgt für $B$ nach (12), (7) und (3):

$$B = \frac{a_0}{a}(1 + \sum \beta_v \tau_v^2) = \frac{a_0}{a} \frac{m + \sum M_v}{m};$$

daher nach (10'):

$$(13) \qquad n_\infty^2 - B = \frac{a_0}{a} \cdot \frac{\sum M_r}{m},$$

oder falls $a_0 : a = m : m_0$:

$$(13') \qquad n_x^2 - B = \frac{\sum M_r}{m_0}.$$

Acceptirt man das Resultat der electromagnetischen Theorie, nach der $n_\infty^2$ gleich der Dielectricitätsconstanten ist, so erzielt man daher den Satz:

*Die Differenz zwischen den Dielectricitätsconstanten und dem Quadrat des optischen Brechungsexponenten eines Körpers* (genauer dem von $T$ unabhängigen Gliede der Dispersionsformel) *ist gleich dem Verhältniss der in einem Körpervolumen enthaltenen*

*Massen, deren Eigenschwingungen im Ultrarothen liegen, zu der Masse des Aethers, welche sich in dem gleichen Volumen des leeren Raumes befindet.*

Das Gebiet des Ultrarothen ist dabei von $T = \infty$ bis zu solchen Werthen von $T$ definirt, welche rothes Licht erzeugen. — Dass obige Differenz $n_\infty^2 - B$ stets positiv ist, wie die Versuche zeigen, erscheint sonach nothwendig. Der Satz erfährt auch dadurch eine gewisse experimentelle Stütze, als die Differenz für das stark undiathermane Wasser den grössten Werth (nämlich 76) erreicht, der bisher unter allen Körpern beobachtet ist.

## II. Die electromagnetische Theorie.

Man kann in einfacher Weise eine electromagnetische Theorie der Dispersion erhalten, wenn man an den Gleichungen, welche zwischen der electrischen, bez. magnetischen Polarisation und den electrischen, bez. magnetischen Kräften besteht, festhält.[1]) Dieselben lauten für Isolatoren in der Bezeichnung von Hertz[2])

$$(14) \qquad A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad A\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}.$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Dagegen muss man die Beziehungen, welche zwischen den Polarisationen und ihren bez. Kräften stattfinden, und welche für isotrope Körper lauten:

$$(15) \qquad \mathfrak{L} = \mu L, \qquad \mathfrak{X} = \varepsilon X$$

für schnelle Schwingungen erweitern.

Für den leeren Raum ist $\mathfrak{X} = X$, man kann daher die Differenz $\mathfrak{X} - X$ als durch die Wirksamkeit der ponderabeln Molecüle herbeigeführt ansehen, z. B. sie als die Polarisation der Molecüle selbst definiren. Setzt man daher, falls mehrere Molecülarten vorhanden sind

$$(16) \qquad \mathfrak{X} = X + \sum \mathfrak{X}_h,$$

1) Diesen Gedanken verdanke ich einer brieflichen Mittheilung des Hrn. Prof. Hertz. — Auf dem eingeschlagenen Wege erhält man für die Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Schwingungsdauer Resultate, welche mathematisch identisch mit den Resulaten sind, die sich aus den anfangs erwähnten electromagnetischen Dispersionstheorien ergeben.

2) H. Hertz, Gött. Nachr. 4. p. 106. 1891.

so kann man annehmen, dass die $\mathfrak{X}_h$ gewisser Eigenschwingungen fähig sein sollen, sei es nun deshalb, weil sie sozusagen an der ponderablen Materie haften, sodass ihre Eigenschwingungen mit denen der $\mathfrak{X}_h$ identisch sind, sei es deshalb, weil jeder Körper gewisse Eigenschwingungen seines electrischen Zustandes besitzt, deren Dauer aus seiner Selbstinduction und Capacität zu berechnen ist. Nach beiden Anschauungen müssen zwischen den $\mathfrak{X}_h$ und $X$ Differentialgleichungen der Form bestehen:

$$\mathfrak{X}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{d t^2} = \varepsilon_h X, \tag{17}$$

wobei sämmtliche Coefficienten $a_h$ $b_h$, $\varepsilon_h$ positiv sind. Für sehr langsame Zustandsänderungen geht daher die Formel (16) in die zweite von (15) über, falls gesetzt wird

$$\varepsilon = 1 + \sum \varepsilon_h. \tag{18}$$

Um die Abhängigkeit der magnetischen Polarisationen von ihren Kräften kümmern wir uns nicht weiter, es genügt, zu wissen, dass für Lichtschwingungen $\mu = 1$ sein muss bei allen Körpern.

Für periodische Bewegungen mit der Periode $T = \tau / 2\pi$ wird die Gleichung (17) zu

$$\mathfrak{X}_h = X \frac{\varepsilon_h}{1 + i \cdot \frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}} = X \cdot \varepsilon_h(\tau).$$

falls $\varepsilon_h(\tau)$ eine Abkürzung ist. Es wird daher nach (16)

$$\mathfrak{X} = X\left(1 + \sum \varepsilon_h(\tau)\right).$$

Gerade wie sich nach den ursprünglichen Gleichungen $n^2 = \varepsilon$ gibt, folgt daher hier

$$n^2 = 1 + \sum \varepsilon_h(\tau), \tag{19}$$

wobei die Gleichungen bestehen:

$$\varepsilon_h(\tau) = \frac{\varepsilon_h}{1 + i \cdot \frac{a_h}{\tau} - \frac{b_h}{\tau^2}}. \tag{20}$$

$\varepsilon_h$ bedeutet gewissermaassen die Dielectricitätsconstante der bestimmten Molecülgattung und bestimmt die Polarisation derselben bei langsamen Zustandsänderungen. Es möge daher $\varepsilon_h$ als „Polarisationsconstante“ der $h$ten Molecülgattung bezeichnet werden.

$b_h$ steht in einfachem Zusammenhange mit der Eigenschwingungsdauer $T_h$ oder $\tau_h$. Nimmt man wiederum an, dass dieselben nur im Ultravioletten ($\tau_v$, $\varepsilon_v$) und im Ultrarothen ($\tau_r$, $\varepsilon_r$) lägen, so erhält man aus (19) und (20) durch Reihenentwickelungen eine ganz ähnliche Dispersionsformel, wie die Formel (12) der mechanischen Theorie ist. Ueberhaupt gehen die Formeln beider Theorien völlig ineinander überein, wenn man setzt:

$$\varepsilon_h = M_h : m, \qquad a_0 = a.$$

Hätte man anstatt (16) den allgemeineren Ansatz

$$\mathfrak{X} = \varepsilon_0 X + \sum \mathfrak{X}_h$$

gemacht, d. h. würde man annehmen, dass die Polarisationsconstante $\varepsilon_0$ des Aethers innerhalb eines Körpers von der des freien Aethers ($\varepsilon_0 = 1$) verschieden ist, so lässt sich völlige Identität der mechanischen und electrischen Theorie erreichen, falls man setzt:

$$a_0 : a = m : m_0, \qquad \varepsilon_h = M_h : m_0, \qquad \varepsilon_0 = m : m_0.$$

Es ist daher auch eine innere Identität beider Theorien zu ermöglichen, falls man einerseits die Molecülmasse $M_h$ als verdichtete Aethermasse selbst auffasst, andererseits die electrische Polarisation als Verschiebung des Aethers auffasst, diesem aber in verschiedenen Körpern und in demselben Körper an verschiedenen discreten Stellen (den Orten der Molecüle) verschiedene Dichte beilegt.

Unabhängig von diesen Speculationen ergibt sich jedenfalls aus (18) und (19):

$$\varepsilon - B = \sum \varepsilon_r,$$

wobei $B$ das von $T^2$ unabhängige Glied der Dispersionsformel (I) bedeutet, d. h. falls man $B$ schlechtweg den optischen Brechungsexponenten eines (normal dispergirenden) Körpers nennt, so erhält man den Satz:

*Die Differenz zwischen der Dielectricitätsconstanten und dem Quadrat des optischen Brechungsexponenten ist gleich der Summe der Polarisationsconstanten der Molecülarten, deren Eigenschwingungen im Ultrarothen liegen.*

Um die optischen und electrischen Eigenschaften der

Metalle unter ein System von Gleichungen fassen zu können, genügt noch nicht die Erweiterung von (14) in:

$$A\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} + A \cdot 4\pi\lambda\frac{\partial X}{\partial t}, \tag{14'}$$

während für $\mathfrak{X}$ die Gleichung (16) bestehen bleibt.[1]) Man kann dadurch allerdings zu scheinbar negativen Werthen der Dielectricitätsconstanten gelangen, wenn Eigenschwingungen im Ultrarothen liegen, indes erhält man dann infolge des bedeutenden Werthes der electrostatisch gemessenen Leitfähigkeit $\lambda$ zu grosse Werthe für das Product $n k$, wie sie an Metallen nicht auftreten.[2]) Ich glaube vielmehr, dass für Metalle in (14') noch ein Glied der Form

$$p\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) = \frac{p}{A}\Delta X$$

zugefügt werden muss. Durch ein solches kann man durch passende Wahl von $p$ die optischen Constanten der Metalle unter Benutung der Leitfähigkeit $\lambda$ der Erfahrung entsprechend berechnen und erhält dabei einen grossen positiven Werth für ihre Dielectricitätsconstante, wie H. A. Lorentz[3]) zeigte. — Physikalisch kann die Form des genannten Zusatzgliedes erklärt werden, wenn man annimmt, dass die Polarisation in irgend einem Raumpunkte nicht nur von der dort herrschenden Kraft abhängt, sondern infolge der endlichen Ausdehnung der Molecüle auch von der Kraft in benachbarten Raumpunkten. Dann muss nämlich die Polarisation auch von den Differentialquotienten der Kräfte nach den Coordinaten abhängen. — Die ersten Differentialquotienten können nur bei dissymetrischen Medien bestehen und ergeben dann eine völlig ausreichende Erklärung und Berechnung der optischen Erscheinungen in natürlich activen Medien, während die zweiten Differentialquotienten in Metallen auftreten.

Göttingen, December 1892.

---

1) In ähnlicher Weise verfährt Goldhammer l. c.

2) Vgl. P. Drude, Gött. Nachr. 1892. **10.** p. 390.

3) H. A. Lorentz, Schlöm. Zeitschr. **23.** p. 209. 1878.

## IX. *Zur Polarisation des ungebeugten Lichtes durch Gitter; Notiz von H. E. J. G. du Bois.*

Hr. Quincke leitet eine Notiz „Ueber das Verhalten des polarisirten Lichtes bei der *Beugung*" [1]), welche sich in der Hauptsache auf zwei Abhandlungen von Hrn. K. Exner bezieht, mit einem Hinweis auf meine Arbeit über „Reflexion und Transmission des Lichtes durch gewisse äolotrope Gebilde" [2]) ein. Hinsichtlich dieser bemerkt er dann Folgendes: „Ich erlaube mir darauf hinzuweisen, dass ich eine grosse Reihe ähnlicher Versuche in meinen optischen Experimentaluntersuchungen [3]) beschrieben habe."

Um Missverständnissen vorzubeugen, sei es mir gestattet, hinsichtlich dieses Passus Folgendes zu erwidern: Der zweite Theil meiner oben angeführten Arbeit behandelt ausschliesslich den Einfluss von Gittern auf das *ungebeugt senkrecht* hindurchgegangene oder reflectirte Licht, also auf diejenigen Strahlen, welche zum sogenannten „Centralbilde" sich vereinigen. Dies ist überall ausdrücklich hervorgehoben worden; im ganzen kamen bisher etwa 20 Gitter der verschiedensten Art zur Untersuchung. Dagegen habe ich l. c. § 21 kurz die ausgedehnte Literatur erwähnt, welche sich auf die Polarisation des *gebeugten* Lichtes bezieht, welche mit den von mir speciell untersuchten Erscheinungen zwar Berührungspunkte hat, wovon sie aber andererseits wohl zu unterscheiden ist. Unter den dort citirten Autoren befindet sich auch Hr. Quincke, und unter den angeführten abnormen Erscheinungen die speciell von ihm beobachteten gefärbten Centralbilder. — Wenn ich dort statt in einem Paragraphen eine gedrängte Literaturübersicht zu geben, eine Discussion des gesammten vorliegenden höchst umfangreichen Beobachtungsmaterials hätte versuchen wollen, so wäre der Umfang der betreffenden Arbeit verdoppelt oder verdreifacht worden, was mir nicht erwünscht schien.

---

1) Quincke, Wied. Ann. **47.** p. 765. 1892.

2) du Bois, Wied. Ann. **46.** p. 542. 1892.

3) Quincke, XV. Ueber Beugungsgitter, Pogg. Ann. **146.** p. 1. 1872. Und XVI. Ueber d. Verh. des pol. Lichtes bei der *Beugung*, Pogg. Ann. **149.** p. 273. 1873. Auch Gött. Nachr. 1873. p. 22.

Wie schon aus ihrer Ueberschrift hervorgeht, beschäftigt sich die zweite der citirten Arbeiten von Hrn. Quincke in weit überwiegendem Maasse mit der Polarisation des *gebeugten* Lichtes. Allerdings sind unter der grossen Zahl von Beobtungen auch solche mit verzeichnet, welche sich auf das „Centralbild" beziehen und deren Einzelheiten l. c. (speciell § 103) nachzusehen sind[1]; diese letzteren wären vielleicht passender an einer anderen Stelle meiner Arbeit nochmals besonders erwähnt worden. Aus ihnen schloss Hr. Quincke u. a., dass sich bei unter $45^0$ zur Gitterstrichrichtung „gekreuzten" Nicols im allgemeinen keine Auslöschung, sondern Färbung zeigte; dass dementsprechend bei spectraler Zerlegung ein schwarzer Streifen im Spectrum entstand. Auch wurden Drehungen gemessen, einmal mit Hülfe dieses Streifens, dann auch im angenähert monochromatischem Lichte, welches durch Zwischenschieben rother oder blauer Gläser erhalten wurde. Aus der Menge der Beobachtungen wird folgender Schluss besonders hervorgehoben (l. c. p. 295).

„Nach den vorstehenden Versuchen überwiegt also für eine Reihe von Gittern bei dem direct hindurchgegangenen Licht (dem centralen Bilde entsprechend) im rothen Ende des Spectrums die Amplitude , im blauen Ende des Spectrums die Amplitude $\perp$ zur Hauptbeugungsebene polarisirt. Bei einer anderen Reihe von Gittern ist es umgekehrt. Der Unterschied ist im allgemeinen um so grösser, je mehr Ränder oder Oeffnungen auf den wirksamen Theil des Gitters kommen, der noch Licht zum Auge sendet."

Dieser allgemeine Satz schildert eine Mannigfaltigkeit von Erscheinungen und umfasst eine grosse Anzahl der überhaupt denkbaren Verhältnisse. Dem gegenüber möchte ich mir erlauben, die verhältnissmässig einfachen Ergebnisse nochmals zusammenzufassen, welche ich, wenigstens bei blanken Metalldrahtgittern, feststellen konnte; das überwiegende Interesse dieser geometrisch wie physikalisch scharf definirbaren Gitterart habe ich in meiner Arbeit wiederholt betont, namentlich in Bezug auf deren Analogie mit den Hertz'schen Gittern für die Polarisation electromagnetischer Strahlung.

1) Die kurze Zusammenstellung der Hauptresultate Hrn. Quincke's in den Gött. Nachr. für 1873 p. 22, war mir bisher leider entgangen.

1. Bei einem Silberdrahtgitter wurde die Drehung der Polarisationsebene für monochromatisches (Natron) Licht bei verschiedenen Incidenzazimuthen gemessen und gefunden, dass sie dem Sinus des doppelten Azimuths proportional verläuft. Erst daraus lässt sich folgern, dass es sich um ein constantes, numerisch angebbares, Verhältniss zwischen den Durchlässigkeiten für | oder ⊥ zur Drahtrichtung polarisirtes Licht handelt.

2. Jenes Verhältniss wurde als Function der Wellenlänge und der scheinbaren Oeffnungsbreite des Gitters innerhalb gewisser Grenzen bestimmt.

3. Ein Umkehrpunkt im Vorzeichen der Erscheinung wurde zwischen dem blauen und rothen Ende des Spectrums nicht beobachtet; vielmehr wurde im ganzen sichtbaren Gebiet das ⊥ zur Drahtrichtung polarisirte Licht in grösserer Intensität durchgelassen. Ein solcher Umkehrpunkt tritt erst im Ultrarothen auf, wie ich neuerdings in Gemeinschaft mit Hrn. Rubens fand[1]); für noch grössere Wellenlängen überwiegt dann die || der Drahtrichtung polarisirte Componente.

4. Bei denjenigen Metallen (Gold, Platin, Eisen), welche bisher ausser Silber noch untersucht wurden, ergab sich qualitativ das gleiche Verhalten, und zwar wurden bisher im hiesigen Institut an sechs ganz verschiedenen Metalldrahtgittern Beobachtungen angestellt.

Diese wenigen Bemerkungen werden, wie ich glaube, darlegen, dass meine Arbeit kaum als eine blosse Wiederholung bereits beschriebener Versuche aufzufassen ist, wie etwa aus dem eingangs citirten Passus gefolgert werden könnte. Dass ich eine ganz neue Erscheinung zu beschreiben wähnte, habe ich nirgends behauptet; im Gegentheil habe ich die Hrn. Fizeau, J. Fröhlich, G. Quincke, Gouy, W. Wien citirt und erkenne deren Priorität im vorwiegend qualitativ beschreibenden Stadium auf dem vorliegenden Gebiete vollständig an. Auf den ferneren Inhalt der Notiz von Hrn. Quincke, welcher sich gegen Hrn. K. Exner wendet, kann es nicht meine Aufgabe sein, hier weiter einzugehen.

Berlin, Physikal. Inst. der Univ., 15. Februar 1893.

1) du Bois u. Rubens, Berl. Ber. p. 1129. December 1892.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1893. ANNALEN № 4.
DER
PHYSIK UND CHEMIE.
NEUE FOLGE. BAND XLVIII.

---

# I. *Ueber electrische Entladungen; Erzeugung electrischer Oscillationen und die Beziehung von Entladungsröhren zu denselben;*

*von H. Ebert und E. Wiedemann.*

(Mitgetheilt aus dem physikalischen Institut zu Erlangen.)[1]

---

## I. Einleitung und Uebersicht über den Gesammtinhalt der folgenden Untersuchungen.

1. Die Erscheinungen der electrischen Entladungen in gasverdünnten Räumen sind sowohl in qualitativer wie in quantitativer Hinsicht vielfach Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen. Der specifische Unterschied zwischen Anode und Kathode, die Rolle, welche ihre Form und Grösse und zwar vor allem die der Kathode, sowie die des ganzen Entladungsrohres spielen, der dunkle Raum um die Kathode, die Glimmlichtschicht, das Wesen der Kathodenstrahlen mit ihrer ausserordentlichen Wärmewirkung, ihre Eigenschaft Fluorescenz und Phosphorescenz zu erregen, die Vertheilung des Entladungsgefälles, die Wirkung von Ableitungen am Rohre auf dasselbe u. a. m. bieten indess noch immer der Erklärung grosse Schwierigkeiten.

2. Wir glauben qualitativ wie quantitativ den Versuch einer Erklärung begründen zu können, aus welcher eine grosse Anzahl der Erscheinungen bei Entladungen in gasverdünnten Räumen einheitlich und ohne Annahme neuer Eigenschaften der electrischen Bewegungen abgeleitet werden kann. Die Grundvorstellung, von der wir ausgehen, ist die Folgende:

Jedes Entladungsrohr ist ein *Condensator*, bei dem die

1) Die Untersuchung wurde mit Unterstützung des *Elisabeth Thompson Fund* in Boston ausgeführt. Wir benutzen diese Gelegenheit, um den Verwaltern desselben für ihre uns erwiesene grosse Liberalität erneut unseren allerbesten Dank auszusprechen.

Electroden die Rolle der Belege, die Gasfüllung diejenige des Dielectricums spielt. Die aus isolirendem Material bestehenden Rohrwände betheiligen sich zum Theil als Belege, indem sie sich mit freier Electricität laden, zum Theil sind ihre dielectrischen Eigenschaften maassgebend; sie sind für die Capacität des Rohres wesentlich mitbestimmend. Die Capacität ist meist sehr klein; sie ist ausser von der Gestalt und dem Material des Rohres von der Natur des füllenden Gases und dessen Dichte abhängig.

Bei der Entladung der Röhre bilden sich electrische Oscillationen aus, welche für die Art des Electricitätsüberganges maassgebend sind. Die specielle Entladungsform richtet sich nach der Art der ausgebildeten Oscillationen, ihrer Periode, ihrer Vertheilung im Rohre und der Grösse der durch sie übergeführten Energie.

3. Von diesem Gesichtspunkte aus haben wir die Erscheinungen der Gasentladungen behandelt. In zwei in den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen vom 14. December 1891 und 8. Februar 1892 veröffentlichten Abhandlungen haben wir zunächst eine Uebersicht über eine Reihe der erhaltenen Resultate mitgetheilt.

In unserer ersten Mittheilung haben wir im Speciellen stets unter Benutzung der Influenzmaschine gezeigt, wie aus dem Grundgedanken sich die Phänomene in Röhren mit Electroden ergeben, und zwar waren es folgende Gegenstände, die behandelt wurden: Capacitätsbestimmungen von Entladungsröhren; die Entladungsröhren unter dem Einflusse der electrischen Oscillationen von bestimmter Periode; Einfluss eingeschalteter Funkenstrecken; Vorgänge an der Kathode (Umwandlung der Energie der eintretenden Oscillationen an der Kathode, Erscheinungen der Kathodenstrahlen, Energie der Kathodenstrahlen, Dispersion der Kathodenstrahlen, Durchlässigkeit von Metallschichten für Kathodenstrahlen[1]), Reflexion von Kathodenstrahlen, Einfluss des Magneten auf die Kathodenstrahlen, Erscheinungen an der Kathode infolge der kurzen

1) Die hierauf bezüglichen Beobachtungen sind ebenso wie ähnliche von Hrn. Hertz in einer Abhandlung von Hrn. Boltzmann zu weiteren Schlüssen benutzt worden. Wied. Ann. 48. p. 64. 1893.

Schwingungsdauer der ankommenden Oscillationen, Verhalten des dunklen Raumes).

In der zweiten Mittheilung wurden die Erscheinungen in electrodenlosen Röhren behandelt und zwar unter dem Einflusse von Oscillationen (Resonanzschwingungen), wie sie in dem Lecher'schen Drahtsystem entstehen. Dabei wurden Versuche nach folgenden Richtungen angestellt: Anregung von Entladungsröhren durch electrische Oscillationen; Schirmwirkungen von Leitern und leuchtenden Entladungsröhren auf leuchtende Entladungsröhren; Erscheinungen in Entladungsröhren unter dem Einflusse von Oscillationen (Erscheinungen in evacuirten Räumen zwischen Condensatorplatten und Erscheinungen in evacuirten Räumen, die neben die Condensatorplatten gelegt sind, sodass ihre Axe parallel der Axe des Endcondensators liegt.)

Die folgenden Untersuchungen enthalten die in den oben erwähnten Abhandlungen mitgetheilten Resultate in wesentlich umgestalteter und erweiterter Form. Mannigfache Versuche haben die früher erhaltenen Resultate nach experimenteller und theoretischer Hinsicht ergänzt. Wir gedenken die gefundenen Ergebnisse in einer Reihe von Arbeiten mitzutheilen, welche, möglichst unabhängig von einander, bestimmte abgegrenzte Fragen behandeln sollen.

4. Nach unseren Anschauungen sind die Leuchterscheinungen in gasverdünnten Räumen unter dem Einfluss electrischer Entladungen bedingt durch das Auftreten electrischer Oscillationen. Um zu prüfen, ob diese Anschauung den Thatsachen entspricht, musste zunächst gezeigt werden, dass in der That, wenn ein Gas schnellen electrischen Oscillationen ausgesetzt ist, Erscheinungen auftreten, welche den in gewöhnlichen Entladungsröhren beobachteten entsprechen oder sogar dieselben in noch charakteristischer Weise als bei Anwendung der gewöhnlichen Hülismittel hervortreten lassen. —

Um sichere Schlussfolgerungen zu gewinnen, musste das Gas der Einwirkung electrischer Oscillationen von wohl definirten Eigenschaften ausgesetzt werden; diese mussten dazu 1. eine ganz bestimmte Periode besitzen, und nicht etwa aus einer Uebereinanderlagerung von Schwingungen verschiedener Perioden bestehen, 2. musste ihre Dämpfung eine bestimmbare

sein; und zwar waren, wie spätere Versuche zeigen, Schwingungen mit sehr kleiner Dämpfung zu verwenden.

Nachdem einmal erkannt war, dass nur bei Berücksichtigung dieser Bedingungen klare Resultate erzielt werden konnten, folgte von selbst, dass wir zunächst die gewöhnlichen Anordnungen zu Untersuchungen von Entladungsröhren verlassen mussten.

*Electrische Oscillationen* erhalten wir bei Entladungen von Condensatoren. So, wenn wir von dem Entstehen von Oscillationen in der Entladungsröhre selbst absehen, in allen den Fällen, wo in den Kreis, in dem sich die Entladungsröhre befindet, eine Funkenstrecke eingeschaltet ist, oder in den Fällen, wo eine solche zu dem Kreise parallel geschaltet ist, oder endlich in den Fällen, wo in der Nähe eines Gefässes ohne Electroden sich ein Drath befindet, durch den die Entladung einer Leydener Flache geht; sowie endlich bei den Versuchen mit rasch periodischen Wechselströmen. In allen diesen Fällen mit Ausnahme der letzteren, bei denen aber die Zahl der Oscillationen eine relativ sehr kleine ist, hat man es mit den sehr schnell gedämpften Schwingungen eines Condensators zu thun. Man kann eine solche Entladung auffassen als eine einseitige Entladung, über die sich dann Oscillationen lagern. Die Erscheinungen müssen in hohem Grade verwickelt werden. einfache und klare Versuchsergebnisse waren daher hier nicht zu erwarten. Bei Besprechung der Phänomene selbst werden wir hierauf eingehend zurückzukommen haben.

Oscillationen dagegen, welche die oben angegebenen Eigenschaften besitzen, haben wir bei den schwach gedämpften Resonanzschwingungen in Drähten. Wir haben uns der letzteren bedient und zwar der grösseren Bequemlichkeit wegen derjenigen, die in der Lecher'schen Drahtcombination auftreten.

Eine erste Reihe von Untersuchungen musste demnach diesem von uns verwandten Hülfsmittel gelten. Ferner mussten die Bedingungen der Erregbarkeit von Röhren festgestellt werden. Erst dann konnten die Erscheinungen in elektrodenlosen Röhren unter fest bestimmten Bedingungen untersucht werden. Zum Schlusse haben wir dann das Verhalten der Röhren mit Electroden studirt.

---

In der vorliegenden ersten Untersuchung beschreiben wir zunächst den von uns verwendeten Apparat. Da selbstverständlich die Eigenschaften des Instruments bei der Verwendung desselben von grosser Bedeutung sind, so haben wir sie eingehend studirt und zwar zunächst die aus den Dimensionen desselben folgenden, so das Auftreten von Knoten, ferner die Abhängigkeit der Lage derselben von verschiedenen Umständen, so der Dicke der Lecher'schen Drähte, der Länge der Zuführungsdrähte zwischen den Kugeln des primären Condensators und der Grösse und dem Abstand der Platten der beiden Condensatoren. Dabei hat sich eine Reihe neuer Eigenschaften in der Vertheilung der Knoten, für die Art der Ueberbrückung u. a. m. ergeben. Andererseits haben wir die experimentellen Bedingungen untersucht, unter denen eine gegebene Entladungsröhre unter dem Einfluss von Oscillationen anspricht; dabei ergab sich, dass dies caet. par. um so besser stattfindet, je kleiner die Dämpfung der Resonanzschwingungen ist.

## II. Versuchsanordnung.

Wir beschreiben hier zunächst nur die bei den ersten Theilen unserer Untersuchung verwendeten Anordnungen; die später zu speciellen Zwecken, z. B. zur Ermittelung der Energie und Amplitude der Bewegung der Kathodenstrahlen, benutzten Apparate werden an den betreffenden Stellen besprochen werden.

### 1. Electricitätsquelle.

Zur Erregung der primären Funken haben wir uns nicht, wie es bisher bei den meisten Untersuchungen über electrische Schwingungen geschehen ist, des Inductoriums, sondern der Influenzmaschine bedient. Auf die Vortheile, welche die letztere speciell bei dem vorliegenden Zwecke bietet, werden wir später eingehender zu sprechen kommen. Wir glauben, dass es uns nur dadurch, dass wir von vornherein die Versuche mit der Influenzmaschine, statt mit einem Inductorium anstellten, gelungen ist, stets sichere Resultate zu erhalten. [1])

1) Zur Erzeugung der Oscillationen hat auch Hr. Töpler die Influenzmaschine mit gutem Erfolge verwendet. Vgl. Wied. Ann. **46**. p. 306. 1892.

Unsere Maschine war eine 20 plattige grosse *Influenzmaschine* von Hrn. O. Leuner in Dresden. Sie unterscheidet sich von den früheren aus derselben Werkstatt nur dadurch, dass die rotirenden Scheiben sich in einem hermetisch verschlossenen Kasten befinden, in dem einige Schaalen mit Schwefelsäure stehen; eine Erwärmungsvorrichtung ist dann nicht nöthig.

Wir haben die Influenzmaschine im Wesentlichen in der Form verwendet, in der sie vom Mechaniker geliefert wird; nur haben wir allen Hartgummi entfernt. Die Vorderwand des die Maschine bedeckenden Kastens, durch welche die Verbindungen zu den Electroden gehen, wird von Hrn. Leuner aus Hartgummi gefertigt. Nachdem wir unsere Maschine eine Zeit lang benutzt hatten, versagte sie vollkommen, es stellte sich heraus, dass die Isolationen unvollkommen geworden waren: in der That konnte man sich leicht davon überzeugen, dass der Hartgummi innen mit einer Schwefelsäureschicht überzogen war, die sich unter dem Einfluss des Ozons aus dem Schwefel des Hartgummi gebildet hatte. Nach Ersatz des Hartgummi durch Glas hatten wir in dieser Hinsicht keine Schwierigkeiten mehr. Auch die kleineren Influenzmaschinen des Instituts gehen weit besser als früher, seit aller Hartgummi durch Glas ersetzt ist.

Ueber die Behandlung der Maschine hat uns Herr Leuner folgende Mittheilungen gemacht, die vielleicht auch für andere Forscher, die mit Influenzmaschinen arbeiten, von Werth sind:

1. Die Maschine ist, wenn nöthig, nur am Spätnachmittage zu öffnen; wird sie am Vormittage geöffnet, so hat das Innere der Maschine noch nicht die äussere höhere Zimmertemperatur angenommen und es müssen bei Oeffnung der Maschine die kälteren Glasplatten sehr feucht werden. 2. Die im Innern aufgestellte concentrirte Schwefelsäure muss öfter erneuert oder doch umgerührt werden, um ihre Oberfläche wieder absorptionsfähig zu machen. Bei den zwanzigplattigen Maschinen sind sechs möglichst grosse, etwa 4 cm hohe Glasgefässe nöthig, die bis auf ca. 1 cm mit Schwefelsäure gefüllt werden. 3. Vor dem Verschliessen der Maschine ist zu untersuchen, ob die Dichtungsschläuche aus Kautschuck an den Thüren noch in Ordnung sind; sonst sind sie zu erneuern. 4. Um das Trocknen der Glasplatten zu beschleunigen ist die

Maschine öfters zu drehen. 5. Die Maschinen sind so selten wie möglich zu öffnen.

Die Influenzmaschine wurde durch einen *Wassermotor* von Schmidt in Zürich in constante Umdrehungen versetzt. Die Zahl der Umdrehungen der die rotirenden Scheiben tragenden Axe betrug etwa 10 bis 15 in der Secunde.

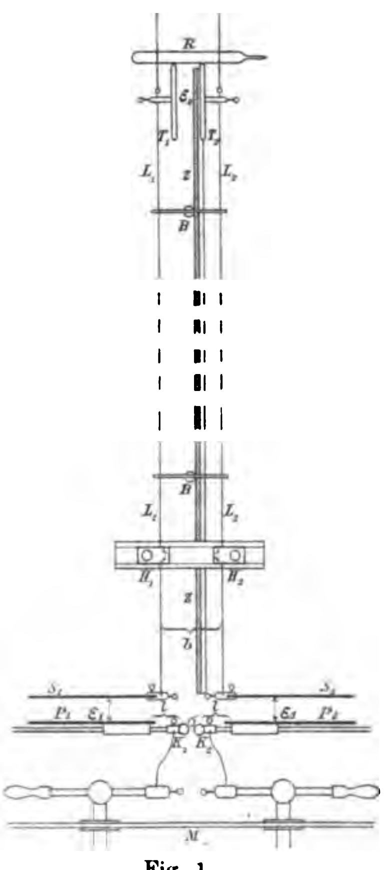


Fig. 1.

2. Das Lecher'sche Drahtsystem (Fig. 1).

*α*) Der primäre Kreis.

Von den Polkugeln der Maschine $M$ führten etwa 1 m lange, gut isolirte Leitungsdrähte zu den primären Kugeln $K_1$ und $K_2$.

Die Kugeln der *primären Funkenstrecke* hatten in den meisten Fällen 3,3 cm Durchmesser; ihre einander zugekehrten Hälften waren mit Platinhauben bekleidet; dadurch wurde die Verunreinigung der primären Strecke sehr verringert, wenn auch nicht ganz aufgehoben. Wir wollen im Folgenden die Länge der primären Funken immer mit $\sigma$ bezeichnen. Die Zuleitung fand unmittelbar hinter den Kugeln statt. Sie waren an 0,6 cm dicke, 50 cm lange Messingstangen befestigt, welche sich in kurzen, horizontalen Rohrstücken verschoben, die unmittelbar hinten an die primären Condensatorplatten angelöthet waren. Durch Herausziehen oder Hineinschieben der Stangen konnte in weitaus den meisten Fällen die Selbstinduction des primären Schliessungskreises in hinreichend weiten Grenzen variirt werden. Sollte sie noch grösser gemacht werden,

so wurden die Kugeln so weit auseinandergezogen, dass keine Funken übergingen und besondere Drahtleitungen vorgeschaltet, welche zu einem Funkenmikrometer mit Kugeln vom gleichen Durchmesser führten (vgl. z. B. p. 581). Die Länge der herausragenden Stücke der Stangen vom Plattenrande bis zu den Kugeln sei $l$.

Die *primären Condensatorplatten* $P_1$ und $P_2$ hatten bei den meisten Versuchen quadratische Gestalt. Wir haben Platten von $20 \times 20$ cm² und $30 \times 30$ cm² Fläche $f_1$ verwendet, je nachdem eine kleinere oder grössere Capacität erwünscht war. Den Platten $P_1$ und $P_2$ standen gegenüber die ihnen an Gestalt und Grösse vollkommen gleichen secundären Platten $S_1$ und $S_2$. $P_1$, $P_2$, $S_1$, $S_2$ bilden zusammen den *primären Hauptcondensator*.

Die Ecken der Platten waren abgerundet und ihre Ränder mit Schellack umkleidet.

Namentlich bei Messungen mit dem Electrometer und geringen Abständen der Platten des Hauptcondensators macht sich sonst leicht ein directes Ueberströmen von Electricität störend geltend; dann wird das ganze Drathsystem auf ein bestimmtes Potential electrostatisch geladen, weil der Electricitätsverlust in der Machine in Folge ihres unsymmetrischen Baues nicht ganz derselbe für die beiden Electricitäten ist. Auch bei vielen anderen Versuchen mit gewöhnlichen Maschinen kann sich dies in höchst unangenehmer Weise bemerkbar machen.

Die Plattenpaare wurden von Einschnitten von Ebonitstäben gehalten; zwei derselben waren auf Glasplatten festgekittet; ein dritter Stab hielt die Platten oben. Dadurch dass man die Platten in verschiedene einander entsprechende Einschnitte dieser Stäbe setzte, konnte der Plattenabstand $\varepsilon_1$ zwischen den primären $P_1$ und $P_2$ und secundären Platten des Hauptcondensators variirt werden. Wir haben meist mit Plattenabständen von 2 bis 8 cm gearbeitet.

Ausser quadratischen Platten haben wir auch kreisförmige verwendet, deren Zuleitungen sich in der Mitte befanden; diese haben in Folge ihrer Gestalt den Vortheil, dass bei ihnen die Vorgänge im Felde bis zu einem hohen Grade der Genauigkeit berechnet werden können, da sich alle für das Feld maassgebenden Grössen als schnell convergirende Reihen darstellen, welche nach Bessel'schen Functionen fortschreiten.

Wir haben zu verschiedenen Zwecken Platten verwendet von 2,5; 5; 10; 18 und 32 cm Radius $r_1$. Die Plattenränder waren abgerundet resp. umgebogen. Die messingenen Zuleitungsstangen wurden von Säulen getragen, die sich auf Holzschlitten bewegten; hierdurch war eine stetige Aenderung der Entfernungen $\varepsilon_1$ ermöglicht.

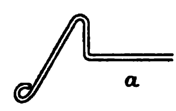
Zu einem besonderen Versuche (vgl. p. 579) haben wir 150 cm lange, 6 cm hohe Zinkstreifen als Platten des Hauptcondensators verwendet.

### β) Der secundäre Kreis.

An die *secundären Platten* $S_1$ und $S_2$ waren die Drähte, in denen sich die Resonanzschwingungen ausbilden sollten, die „*Lecher'schen Drähte*", wie wir sie der Kürze wegen in Zukunft nennen werden, befestigt, bei den kreisförmigen Platten in der Mitte, bei den quadratischen oder rechteckigen Platten an einem Punkte des Randes mittels einer aufgesetzten Klemmschraube.

Als Lecher'sche Drähte haben wir Kupferdrähte von verschiedenen Durchmessern sowie dicke Metallröhren verwendet. Bezeichnen wir mit Cohn und Heerwagen den Radius der Drähte mit $a$, den Abstand ihrer Axen mit $b$, so wurden Messungsreihen angestellt mit Leitern, für die $a$ die Werthe: 0,05; 0,1 und 1,045 cm hatte; für jede dieser Dicken wurden Messungen bei $b = 10$ cm und $b = 30$ cm angestellt. Die Leiter mit $a = 1{,}045$ cm waren Gasleitungsrohre, welche aneinandergeschraubt wurden; an den Enden waren kurze 0,2 cm dicke Zuleitungsdrähte angelöthet. Die Gesammtlänge $L$ eines der Doppeldrähte war je nach den Zwecken sehr verschieden. Bei dem Studium der Vertheilung der Knoten und der Prüfung der Cohn-Heerwagen'schen Theorie wurden immer ziemlich lange Drähte verwendet: $L = 11$ bis 14 m. Handelte es sich um das Studium der Erscheinungen in einem irgendwie begrenzten Gasraume an den Platten des Endcondensators, so sind kürzere Drähte ($L = 4$ bis 6 m) verwendet worden, was deshalb möglich war, da hier immer nur der mittelste Knoten überbrückt zu werden brauchte. Selbst bei 2 bis 3 m langen Drähten konnten die wesentlichen Erscheinungen noch beobachtet werden.

Die Drähte wurden zwischen Hartgummiplatten in $H_1$ und $H_2$ festgeklemmt, welche je in einer Schlittenführung in verschiedenen Entfernungen voneinander festgeschraubt werden konnten; diese Führungen waren auf grosse Holzböcke aufgeschraubt; die Höhe der Drähte über dem Fussboden betrug meist 135 cm. Die Drähte wurden immer straff gespannt, nachdem sie vorher glatt gezogen und metallisch blank gemacht worden waren. Bei verschiedenen Versuchsreihen waren an den Enden der Drähte Oesen angebogen worden, und hier mittels Schnüren die Drähte an einem *hinter* dem Endcondensator und dem Electrometer stehenden Stativ befestigt. Dies hatte den Vortheil, dass die Theile der Drähte unmittelbar vor dem Endcondensator zum Ueberlegen von Brücken vollkommen frei blieben, was bei einigen Erscheinungen wichtig war. Die dickeren Drähte wurden bei grosser Gesammtlänge $L$ ausserdem noch in der Mitte durch an der Decke befestigte Fäden gehalten. Die ca. 12 m langen Röhren werden von Stativen getragen, auf denen sie festgeschraubt wurden.



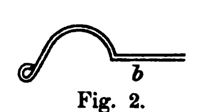




Fig. 2.

Die *Brücken* hatten eine verschiedene Gestalt und Grösse, je nachdem Drähte oder die Röhren verwendet wurden, und je nach dem Werthe von $b$. Die Enden waren so gebogen, sie bei festem, sicheren Aufsitzen doch leicht abgehoben und dass aufgesetzt werden konnten; deshalb eignete sich eine hakenförmige Gestalt weniger; wir haben ihnen die Gestalt Fig. 2, *a* für die Drähte, Fig. 2, *b* für die Röhren gegeben. An den Stellen, wo sie auf den Drähten auflagen, waren sie amalgamirt. Jede Brücke war in der Mitte mit einem Griff aus Hartgummi versehen.

Parallel den Drähten und zwischen ihnen war auf hölzernen Trägern eine Holzlatte $Z$ in solcher Höhe befestigt, dass die unteren Enden der Brückengriffe sie gerade berührten. Auf der Latte war eine vom primären Condensator bis zum Ende der Drähte reichende *Centimetertheilung* aufgeschraubt. Alle auf die Leiterbahn bezüglichen Längenangaben sind von dem Anfang der Drähte an gerechnet; wir bezeichnen die Lagen der einzelnen Knoten durch ihre Entfernungen von den secundären Platten des primären Condensators $k_h^i$, indem wir in Ueberein-

stimmung mit Cohn und Heerwagen durch den unteren Index $h$ die Ordnung des betreffenden Knotensystems bezeichnen, durch den oberen Index $i$ aber angeben, der wievielte Knoten des betreffenden Systems gemeint ist (dabei entspricht dem Falle, dass der secundäre Leiterkreis durch *eine* in der Nähe der Drahtmitte aufliegende Brücke in zwei auf einander resonirende Theile zerlegt ist, dem unteren Index $h = 0$).

Am Ende der Drähte war in allen Fällen, wo electrodenlose Gasräume untersucht wurden, ein *Endcondensator* angeschlossen. Seine Platten $T_1$ und $T_2$ waren ausschliesslich kreisförmig; wir benutzten Platten mit Radien $r_2 = 2{,}5$; 5; 7,6; 10; 18 und 32 cm, die drei kleineren Paare aus Messing, die grösseren aus Zinkblech mit umgebogenen, gerundeten Rändern. Die Platten waren auf einer Schlittenführung beweglich. Wenn es darauf ankam, die Erscheinungen, welche verdünnte Gase im Felde des Endcondensators darbieten, in der Richtung der Axe des Condensators zu studiren, wurden die massiven Platten durch engmaschige Drahtnetze ersetzt, die auf Ringe ($r_2 = 7{,}5$ cm) aus 0,4 cm dickem Messingdraht aufgelöthet waren. Da die Drahtabstände des Netzes (0,1 cm) immer klein waren gegenüber der Plattenentfernung $\varepsilon_2$, so ist die Vertheilung der Spannungen im Felde hier nicht wesentlich anders, als bei den Vollscheiben.

Um einen Anhalt zu haben über die maximalen Potentialschwankungen $B$ an den Platten des Endcondensators, war bei vielen Versuchen ein Funkenmikrometer $F$ (vgl. Fig. 5) demselben parallel geschaltet. Seine Kugeln hatten 3,4 cm Durchmesser und konnten durch eine Mikrometerschraube ($^1/_{100}$ Millimeter direct ablesbar) bewegt werden. Aus der gemessenen (bei der Annäherung von aussen) grössten Funkenlänge ergab sich dann nach der Tafel von Paschen[1]) die Maximalhöhe, bis zu der das Potential anstieg.

Dieses Verfahren ist nicht ganz einwurfsfrei, denn die zur Entladung nöthige Potentialdifferenz hängt ausser von ihrer absoluten Grösse noch von der Art, wie sie sich herstellt, d. h. vom Verlaufe der Electricitätszufuhr ab.[2]) Da aber im vor-

1) Paschen, Wied. Ann. **37**. p. 699. 1889.

2) Vgl. Jaumann, Wien. Ber. (2) **97**. p. 765. 1888; Beibl. **12**. p. 872.

liegenden Falle die Ladungs- und Entladungserscheinungen fast genau einen harmonischen, d. h. durch Kreisfunctionen darstellbaren, zeitlichen Verlauf haben, ausserdem bei den einzelnen Reihen die Brücken meist an denselben Stellen der Drähte standen, also immer einander ähnliche Wellenzüge zur Verwendung kamen, so kann man gewiss annehmen, dass die hier erhaltenen Werthe für die Potentiale wenigstens untereinander vergleichbar sind und nur darauf kommt es im Folgenden an.

$\gamma$) Die Röhren und Druckmessungen.

In die Nähe des Endcondensators $T_1$ und $T_2$ wurden die evacuirten Röhren $R$ gebracht, welche bei den Voruntersuchungen über die Schwingungen in dem Drahtsystem zunächst nur als

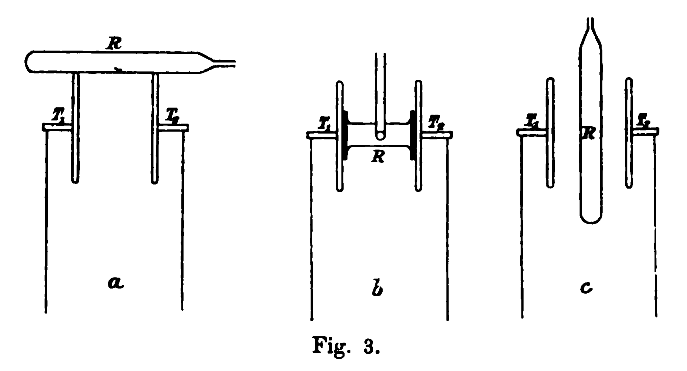



Fig. 3.

Indicatoren dienten. Wir werden später eingehender die Bedingungen erörtern, die erfüllt sein müssen, damit ein Rohr möglichst empfindlich ist.

Die Entladungsröhren wurden hauptsächlich in folgenden Lagen untersucht:

1. Die Röhren lagen ausserhalb der Condensatorplatten neben denselben, so dass ihre Axe parallel derjenigen des Condensators lag. Wir werden diese Lage kurz als „Röhre neben dem Condensator“ bezeichnen (Fig. 3 *a*).

2. Die Röhren lagen zwischen den Condensatorplatten: a) so, dass ihre Axe parallel der Condensatoraxe war, b) so, dass ihre Axe senkrecht zu der Condensatoraxe stand. Wir werden diese beiden Lagen bezeichnen als „Röhre zwischen den Condensatorplatten parallel zur Axe“ (Fig. 3 *b*) und

„Röhre zwischen den Condensatorplatten senkrecht zur Axe“ (Fig. 3 *c*).

Durch Annähern und Entfernen der Platten $T_1$ und $T_2$ des Condensators an das Entladungsrohr konnte die Stärke der wirkenden Oscillationen verändert werden, ferner durch Aenderung der primären Funkenstrecke $\sigma$ das Potential $B$ am Endcondensator $T'_1\, T'_2$.

Die zu untersuchenden Entladungsröhren waren entweder bei einem bestimmten Druck des Gases von der Pumpe abgeschmolzen oder blieben an der Pumpe, um bei verschiedenen Drucken untersucht zu werden. Zum Messen der Drucke haben wir uns des *Mac Leod-Manometers* bedient (Fig. 4).

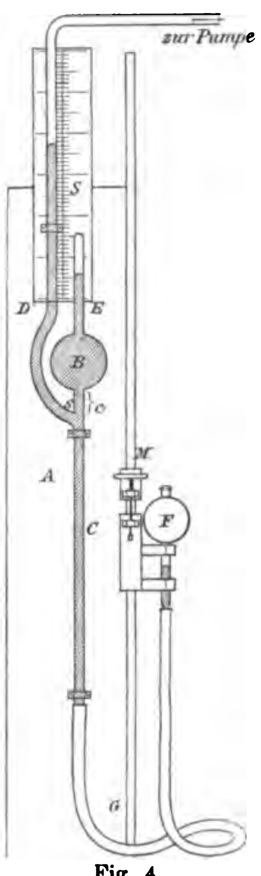


Fig. 4.

An ein vertical stehendes Brett ist die Kugel $B$ mit den Glasrohren $C$, $E$ und $D$ befestigt. Der innere Durchmesser der Kugel ist 50 mm, der des Rohres $E$: 5 mm. Das Rohr $C$ steht durch den Gummischlauch $G$ mit dem Gefäss $F$ in Verbindung, welches auf einem Schlitten in verticaler Richtung beweglich ist und nach Festklemmung in irgend einer Höhe noch mit der Mikrometerschraube $M$ fein bewegt werden kann. Kugel und Röhrensystem sind mit Quecksilber gefüllt. Der Apparat wird folgendermaassen benutzt. Zunächst ist $F$ so weit heruntergelassen, dass das Quecksilber in $C$ unter dem Punkte $s$ steht; dann communicirt die Kugel $B$ und das Rohr $E$ durch $D$ mit der Pumpe, das hier eingeschlossene Gas nimmt den Druck $p$, der in dem ganzen Rohrsystem herrscht, an. Treibt man durch Heben von $F$ das Quecksilber in $C$ in die Höhe, so schliesst es in dem Moment, wo es den Punkt $s$ überschreitet, das Volumen $c$, $B$ und $E$ ab und drückt das hier enthaltene Gas zusammen. Der

Höhenunterschied der Säulen in $E$ und $D$ wird um so grösser, je mehr das ursprüngliche Volumen in $E$ zusammengedrückt wird. Der auf der Quecksilbersäule in $D$ lastende Gasdruck $p$ kann gegenüber dem Druck der Quecksilbersäule selbst vernachlässigt werden. Man hat dann, wenn $v_1$ das Volumen in $c$, $V$ das Volumen von $B$, $v_2$ das von Quecksilber erfüllte Volumen der Röhre $E$, $v_0$ das von Quecksilber freie obere Volumen von $E$ ist,

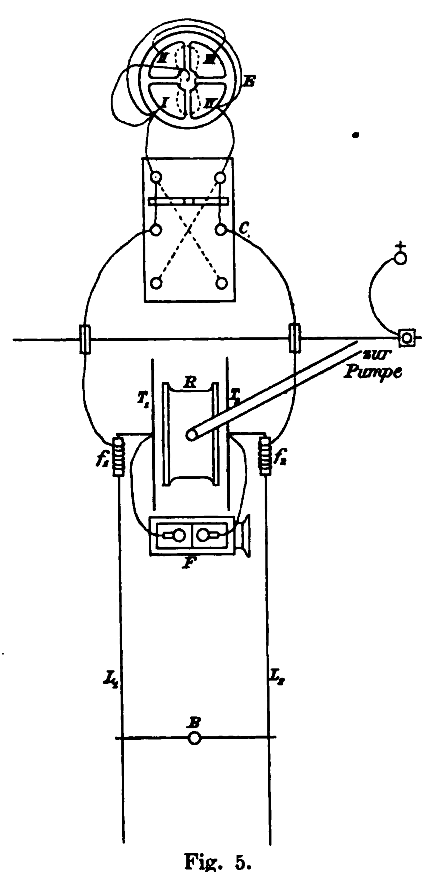


Fig. 5.

$$p = P \frac{v_0}{v_1 + V + v_2}$$

wo $P$, die Höhendifferenzen der Säulen in $E$ und $D$, an der Scala $S$ abgelesen wird.

Man kann auf diese Weise die Drucke bequem bis auf hundertstel Millimeter genau messen. Bezüglich dieser Druckmessungen, wie der Arbeiten mit hochevacuirten Räumen überhaupt, muss bemerkt werden, dass man den Druck in einem Vacuumrohr u. dgl. nie unter den Dampfdruck des Quecksilbers bei der betreffenden Temperatur bringt. Da die Tension des Quecksilberdampfes bei 20° C. gleich 0,0013 mm (Hertz) ist, so kommt man mit der besten Quecksilberluftpumpe nicht unter diesen Druck hinab, selbst wenn man Röhren mit Kupferdrehspähnen und Schwefelstücken vorschaltet.

3) Anordnung mit dem Electrometer am Endcondensator.

Ausser durch das Ansprechen empfindlicher Röhren in dem Felde des Endcondensators oder angehängter electroden-

loser Röhren oder Röhren mit Electroden haben wir noch die Höhe der Potentialschwankungen an den Enden der Drähte bei verschiedenen Brückenlagen direct mit dem Electrometer verfolgt. Wir haben uns bei diesen Versuchen im Wesentlichen der von Hrn. Francke[1]) angegebenen Anordnung, bei der das Quadrantelectrometer verwendet wird, bedient.

Diese Anordnung wurde auch benutzt bei den Bestimmungen über die Dämpfung im secundären Kreise.

Das Schema der Verbindungen stellt (Fig. 5) dar; die Maschine und der primäre Condensator sind unten zu denken, $L_1$ und $L_2$ sind die Lecher'schen Drähte, $B$ ist die letzte der übergelegten Brücken, $T_1$ und $T_2$ die Platten des Endcondensators, $F$ ein ihnen parallel geschaltetes Funkenmikrometer. $R$ stellt ein als Indicator benutztes, mit der Pumpe verbundenes Glasrohr mit an den Enden aufgekitteten Glasplatten dar.

Ueber die Enden der Lecher'schen Drähte $L_1$ und $L_2$ waren zwei 5 cm lange, 0,4 cm weite, meist dünnwandige Glasröhren $f_1$ und $f_2$ geschoben, um welche die einen Enden 0,1 cm dicker Kupferdrähte 5 mal herumgewunden und dann mit Siegellack festgekittet waren. Die Capacität dieser Flaschen war demnach eine sehr geringe. Die anderen Enden der Kupferdrähte führten zu dem Paraffincommutator $C$ und von hier zum Electrometer $E$. Bei dieser Anordnung spielt die Capacität des Electrometers keine Rolle; bei directer Verbindung eines Electrometers mit den Platten $T_1$ und $T_2$ des Endcondensators würde die hierdurch herbeigeführte Verlängerung der Leiterbahn und namentlich die hinzutretende Endcapacität grosse Störungen in dem System der Drahtschwingungen herbeigeführt haben.

Auch aus einem anderen Grunde durften wir das Electrometer nicht direct an den Endcondensator anschliessen. Um gewisse Erscheinungen in den evacuirten Röhren $R$ zu erhalten, mussten grosse Potentialschwankungen an $T_1$ und $T_2$ auftreten. Dann hätte aber das Electrometer verhältnissmässig sehr unempfindlich sein müssen, wenn nicht unbequem grosse Ausschläge oder gar erhebliche Störungen (Ueberschlagen von Funken im Electrometer oder dergleichen) auftreten sollten.

1) Francke, Wied. Ann. **44.** p. 713. 1891.

Dies alles wurde vermieden durch die Zwischenschaltung der Flaschen, die leicht ausgewechselt werden konnten und von denen ein grösserer Vorrath, in der Wandstärke von einander verschiedener Paare zur Verfügung stand. Die speciell auf diese Frage gerichteten Untersuchungen des Hrn. Rubens[1]) haben gezeigt, dass die Hinzufügung einer solchen kleinen Flasche keine Aenderung in der Energievertheilung längs des Drahtsystems herbeiführt. Ferner war es leicht, die Wirksamkeit beliebig hoher Potentialschwankungen am Endcondensator durch Wahl eines Flaschenpaares mit geeigneter Bindungszahl so weit herabzusetzen, dass immer dasselbe Electrometer mit derselben Empfindlichkeit angewendet werden konnte. Für jedes Flaschenpaar fand eine besondere Aichung statt.

Das verwendete Electrometer war ein Quadrantelectrometer gewöhnlicher Form. Die Quadranten hatten einen äusseren Durchmesser von 12 cm, einen inneren von 3,5 cm und einen Abstand von 1 cm. Die bis auf 8 cm gekürzte Nadel hing an einem 32 cm langen, 0,003 cm dicken Platiniridiumdraht von Matthey in London, wie er auch in den Multicellularelectrometern von W. Thomson (Lord Kelvin) benutzt wird. Derselbe hat den grossen Vorzug, dass seine elastische Nachwirkung verschwindend klein ist. Das Electrometer kehrte daher nach jeder Ablenkung wieder vollständig in die ursprüngliche Ruhelage zurück. Wir haben das Instrument in Doppelschaltung verwendet, derart, dass die eine Flasche $f_1$ mit dem Quadrantenpaar I und III (vgl. Fig. 5), gleichzeitig aber noch durch den Aufhängedraht mit der Nadel verbunden war. Hierbei wird die abstossende Wirkung der Quadranten I und III noch verstärkt durch die gleichzeitige Anziehung der entgegengesetzt geladenen Quadranten IV und II; die andere Flasche $f_2$ war mit dem Quadrantenpaar IV und II verbunden.

## Tabelle der Bezeichnungen.

Wir lassen noch eine Uebersicht der von uns benutzten Bezeichnungen folgen.

$\sigma$ Länge der primären Funkenstrecke.

$l$ Länge der Messingstangen, an denen die primären Kugeln befestigt sind (so weit sie über die Platten hervorragen).

1) Rubens, Wied. Ann. **42.** p. 154. 1891.

$r_1$ Radius } der primären Platten gleich dem (der) der
$f_1$ Fläche } secundären Platten.

$\varepsilon_1$ Abstand zwischen primären und secundären Platten.

$L$ Gesammte Länge eines der Lecher'schen Drähte (von den secundären Platten des primären Condensators an bis zu den Platten des Endcondensators.

$a$ Radius der Lecher'schen Drähte.

$b$ Gegenseitiger Abstand der Axen der Lecher'schen Drähte.

$r_2$ Radius }
$f_2$ Fläche } der Platten des Endcondensators.
$\varepsilon_2$ Abstand }

$c_2$ Capacität des Endcondensators.

$q = 4 \log \operatorname{nat} (b / a)$ Selbstinductionscoefficient der Doppeldrähte.

$d$ Durchmesser von Entladungsröhren.

$h$ Höhe resp. Länge cylinderförmiger Entladungsröhren.

$p$ Gasdruck in den Entladungsröhren (in Millimetern Hg).

$\varphi$ Potential am Endcondensator.

$A$ } Amplitude der { primären } Potentialschwan-
$B$ } { secundären } kungen.

$T$ Schwingungsdauer.

$\beta$ Dämpfungsverhältniss } der secundären
$\delta = \beta T$ logarithmisches Decrement } Schwingungen.

## III. Allgemeine Bedingungen für das Aufleuchten gasverdünnter Räume im electrischen Felde.

Da wir die Oscillationen, die in dem Lecher'schen Drahtsystem entstehen, zur Untersuchung der Leuchterscheinungen in Entladungsröhren verwenden wollten, so erschien es uns angezeigt, die Lage der Knoten, deren Vertheilung etc. hauptsächlich in der Art zu studiren, dass wir das Aufleuchten von Entladungsröhren, die neben oder zwischen den Platten des Endcondensators lagen (Fig. 3), als ein Anzeichen dafür nahmen, dass wir uns bei Ueberbrückungen in dem Knoten befanden.

Dies Verfahren hat gegenüber den Messungen mit dem Electrometer den grossen Vortheil, dass die statischen Ladungen auf den Drahtsystem ohne Einfluss sind.

Von den später mitzutheilenden Erscheinungen in Ent-

ladungsröhren theilen wir nur diejenigen von uns gefundenen Ergebnisse mit, deren Kenntniss für die Verwendung von Entladungsröhren zum Studium der Vertheilung der Knoten unentbehrlich ist.

1. *Einfluss der Dimensionen der Röhren.* Röhren von verschiedenen Dimensionen sprechen verschieden leicht an, am besten nimmt man weite und nicht zu kurze Röhren.

2. *Einfluss der Zuleitung der Electricität.* Will man nicht Röhren mit Electroden anwenden, so sprechen am leichtesten und fast sicher Röhren mit inneren Belegen an. Diese letzteren stellt man durch Ueberziehen der Innenwand der Röhren an den beiden Enden mit Platin her. Man löst $PtCl_4$ in Alkohol, setzt die Lösung zu etwas Lavendelöl, bestreicht damit das Glasrohr im Inneren in der Nähe der beiden Enden und erhitzt, bis das Lavendelöl verdampft ist. Hierbei schlägt sich das Platin als dichter, schwarzer Ueberzug auf dem Glase nieder. Dann setzt man das Rohr an die Pumpe, evacuirt bis zu einem passenden Druck und schmilzt ab. Die inneren Belegungen befinden sich so an den Enden der Röhre und sind von einander durch unbelegtes Glas getrennt. Man kann auch die Röhren innen versilbern, indess hat man dann zu beachten, dass das Silber etwas von dem stets vorhandenen stark leuchtenden Quecksilberdampf absorbirt.

3. *Einfluss früherer Erregungen.* Entladungsröhren, die einmal geleuchtet haben, und zwar sowohl solche mit, wie solche ohne Electroden, sprechen kurze Zeit nach dem ersten Leuchten leichter, d. h. bei kleineren Potentialschwankungen an, als ein Rohr, das noch gar nicht geleuchtet hat oder ein Rohr, das längere Zeit nach der ersten Anregung nicht mehr dem Einfluss von Oscillationen ausgesetzt gewesen ist.

Für die *Bestimmung der Lagen der Knoten* ergiebt sich hiernach folgende Regel:

**Man evacuirt zunächst die neben oder zwischen den Platten des Endcondensators gelegene Röhre so weit, dass sie, wenn keine Brücke auf den Lecher'schen Drähten liegt, leuchtet (das Leuchten ist im allgemeinen in diesem Falle nicht sehr hell und die Erscheinung in der Entladungsröhre nicht scharf ausgeprägt und vor allem nicht symmetrisch). Legt man eine Brücke auf, so kann man bei mittelhohen Drucken über den**

ganzen Draht hinfahren, ohne dass ein Leuchten eintritt, das Gas ist an sich bei dem herrschenden Druck für Potentialschwankungen der gegebenen Höhe nicht erregbar. Bei dem Aufsuchen eines Knotens verfährt man nun, wenn die Röhre nicht beim Verschieben der Brücke über die Drähte hin bei einer Stelle der Brücke anspricht, wodurch die Lage des Knotens bestimmt ist, so, dass die Brücke unter gleichzeitigem Abheben und wieder Aufsetzen verschoben wird. Das Leuchten, das ohne Brücke eintritt, hält auch noch an, wenn man sie auf den zu bestimmenden Knoten setzt, ja es wird viel heller, stetiger und die Erscheinung in der Entladungsröhre ganz symmetrisch. Bei mittelhohen Drucken ist dies nur für den mittelsten Knoten der Fall. Sollte bei keiner Stelle nach Aufsetzen der Brücke das Leuchten anhalten, so muss man etwas weiter evacuiren.

Aehnlich wurde auch beim Ueberbrücken von mehreren zusammengehörigen Knoten verfahren, wobei stets die Röhre am Endcondensator lag; es wurde zunächst der erste derselben und zwar der dem Endcondensator zunächst gelegene aufgesucht und überbrückt und dann mit der zweiten Brücke unter schwachen Erschütterungen des Drahtes längs desselben hingefahren, wobei sich die erste Brücke ein wenig lockerte und von demselben abhob, und der zweite ermittelt; eventuell hob ein Gehülfe die erste Brücke in die Höhe und setzte sie erst wieder auf, wenn der zweite Knoten gefunden war.

Selbstverständlich wurde in dieser etwas umständlichen Weise nur dann vorgegangen, wenn die Röhren nicht so empfindlich waren, dass sie ohne Weiters ansprachen, was bei niederen Drucken fast immer der Fall ist. Da diese Trägheit bei ankommenden Oscillationen sich nicht bei dem Electrometer und Bolometer findet, so sind diese Instrumente für gewisse Messungen von Vortheil.

Die Methode des Aufsuchens der Knoten mit den Entladungsröhren hat dagegen den grossen Vorzug der directen Anschaulichkeit und der grossen Bequemlichkeit.

4. *Einfluss des Druckes auf das Ansprechen von Entladungsröhren für die verschiedenen Knotensysteme.* Bringen wir in die Nähe des Endcondensators, etwa zwischen die Platten desselben einen evacuirten Raum, ein cylindrisches Rohr, und evacuiren wir dasselbe allmählich, so zeigt sich, dass zunächst

das Rohr nur auf das System mit einem Knoten anspricht und zwar bei der ganz bestimmten Stelle $a$ der Brücke. Bei weiterer Evacuation ist dies für Brückenlagen zu beiden Seiten der Stelle $a$ der Fall, und zwar ist der Abstand der Punkte, wo überbrückt werden kann, ohne dass das Leuchten aufhört, um so grösser, je niedriger der Druck ist; der Knoten wird scheinbar länger, zugleich spricht das Rohr auch auf Schwingungen an, welche dem System mit zwei Knoten entsprechen, bei noch niedrigerem auf solche mit drei Knoten etc. Bei einem gewissen sehr niedrigen, aber nicht dem niedrigsten überhaupt erreichbaren Druck leuchtet das Rohr für alle Lagen der Brücke zwischen dem Endcondensator und einem Punkt nahe an der Mitte der Lecher'schen Drähte.

Die folgende Tabelle enthält für eine Reihe von Drucken $p$ in mm Hg die beiden Grenzlagen der Brücke, bei denen die Röhre beim Verschieben der Brücke vom Knoten aus eben erlischt, und die Lage für das Maximum der Helligkeit, sowie die maximalen Potentialschwankungen $B$ am Endcondensator für die Brückenlage, bei der das Rohr am hellsten leuchtet.

| Hauptcondensator: | Drähte: | Endcondensator: | Röhre: |
|---|---|---|---|
| $f_1 = 30 \times 30$ cm² | $L = 1250$ cm | $r_2 = 10$ cm | $d = 4{,}0$ cm |
| $e_1 = 2$ cm | $b = 32{,}5$ „ | $\varepsilon_2 = 10$ „ | $h = 7{,}8$ „ |
| $l = 15$ cm | $a = 0{,}05$ „ | $c_2 = 5{,}3$ „ | |
| $\sigma = 1{,}0$ „ | | (vgl. p. 585). | |

| $p =$ | 9,3 mm | 8,1 mm | 0,77 mm | 0,21 mm |
|---|---|---|---|---|
| $k_0^0$ Eben erlöschen | 458—500 | 425—522 | 336—550 | 342—unbest. |
| $k_0^0$ Max. d. Helligkeit | 485 | 485 | 488 | 492 (II. Max. bei 585) |
| $B$ für $k_0^0$ Max. | 19 E.S.E. | 16 | 16 | 20 |
| $k_1^0$ (ohne $k_1^1$) Erl. | — | 87—115 | 80—128 | ca. 50—118 |
| $k_1^0$ (ohne $k_1^1$) Max. | — | 100 | 105 | 103 |
| $B$ für $k_1^0$ Max. | — | 4 | 4 | 5 |
| $k_1^1$ (ohne $k_1^0$) Erl. | — | 992—1012 | 957—1020 | 946—1040 |
| $k_1^1$ (ohne $k_1^0$) Max. | — | 1002 | 1003 | 1005 |
| $B$ für $k_1^1$ Max. | — | 3 | 1,5 | 1 |
| $k_1^1$ Erl. | — | 977—1020 | 960—1040 | 950—1065 |
| $k_1^1$ Max. | — | 1003 ($k_1^0$ auf 105) | 1010 ($k_1^0$ auf 105) | 1005 ($k_1^0$ auf 103) |
| $B$ für die Doppelüberbrückung | — | 11 | 10 | 9 |

Bei $p = 9{,}3$ war nur der Hauptknoten zu erhalten.

Die Tabelle zeigt: 1. *Die Lage der Knoten, die durch die Stelle der Brücke bestimmt ist, wo in der am Endcondensator befindlichen Röhre das Maximum der Lichtentwickelung auftritt, ist gänzlich von dem Drucke p unabhängig,* 2. *der Abstand der Stellen zu beiden Seiten eines Knotens, wo bei Ueberbrückung noch Leuchten vorhanden ist, wächst sehr schnell mit der Verdünnung.*

Die Reihenfolge, in der die einzelnen Knotensysteme bei allmählich zunehmender Evacuation auftreten, ist etwa dieselbe, in der sie sich nach den Beobachtungen von Hrn. Rubens nach ihrer Energie ordnen; je grösser die Energie für ein Knotensystem, bei um so höherem Drucke tritt das Leuchten ein.

Eine blosse Vermehrung der Energie, etwa durch Vergrössern der Funkenstrecke im primären Condensator, hat aber lange nicht den Einfluss, wie eine Verminderung des Druckes.

*Da je höher der Druck, um so enger die Grenzen der Ueberbrückung zu beiden Seiten eines Knotens sind, innerhalb deren die Röhren am Endcondensator ansprechen, so ergibt sich für eine genaue Bestimmung der Lage des Knotens die Regel, das Aufsuchen des Knotens bei möglichst hohen Drucken vorzunehmen.*

5. *Einfluss der Ueberbrückung des Knotens in der Nähe des Endcondensators.* Damit bei den Systemen mit mehreren Knoten die Röhren sicher ansprechen, ist es vor Allem nöthig, dass die dem Endcondensator zunächst gelegenen Knoten richtig überbrückt sind, sonst spricht bei Ueberbrückung der anderen zugehörigen Knoten die Röhre nicht an.

Die Aufsuchung der Knotensysteme mit mehr als sechs Knoten bietet daher gewisse Schwierigkeiten. Die am Ende des Drahtes gelegenen Knoten rücken immer weiter nach dem Endcondensator hin und drängen sich dort zusammen. Beim Hingleiten mit der Brücke sieht man, wenn überhaupt ein Leuchten auftritt, nur ein Anschwellen und ein Abschwellen der Helligkeit der Röhre am Endcondensator; dadurch wird die Sicherheit der Einstellung wesentlich beeinträchtigt.

Von dem 8. bis 9. Knotensysteme an liegen ferner die Knoten am Ende des Drahtsystems schon fast im Condensator und lassen sich daher nicht mehr überbrücken.

Aus den eben angeführten Gründen ist daher bei einer

Aufsuchung der Knoten immer mit den letzten begonnen worden, auch haben wir uns im allgemeinen mit dem Aufsuchen von Systemen bis zu fünf Knoten begnügt.

### IV. Abhängigkeit der Schwingungssysteme der Lecher'schen Drahtcombination von den Constanten der Schliessungskreise.

Wir haben zunächst die rein geometrischen Eigenschaften des Drahtsystems in Bezug auf die Vertheilung der Schwingungen, Lage der Knoten u. s. w. untersucht. Es handelte sich hier hauptsächlich darum, zu untersuchen, inwieweit sich die von den Hrn. Cohn und Heerwagen[1]) aufgestellte allgemeine Formel auch für Fälle bewährt, die weit von denjenigen abweichen, welche dieselben zunächst der Prüfung unterzogen haben.

Einige der von uns angestellten Versuchsreihen sind unter nahezu denselben Bedingungen wie diejenigen der Hrn. Cohn und Heerwagen angestellt, andere unter weit davon abweichenden Bedingungen. Wir bemerken schon hier, dass sich die Theorie der genannten Herren auch in diesen Fällen recht gut bewährt hat. Nur in einem Punkte weichen unsere Bestimmungen auffallend von denen anderer Beobachter ab. Es ergab sich, dass *in weitaus den meisten Fällen die Knoten nicht äquidistant sind*, sondern dass sich die Knotenabstände unter Umständen erheblich vergrössern in dem Maasse, wie man vom Endcondensator zum primären Condensator fortschreitet.[2])

Dies zeigt, dass die Verhältnisse in der Wirklichkeit nicht so einfach liegen, wie man es zunächst für die Aufstellung der Theorie voraussetzen musste. Vor allem ist der Einfluss des primären Kreises nicht zu vernachlässigen. Wenn die primäre Entladung zunächst auch wesentlich nur die erregende Ursache der secundären Schwingungen ist, so sind die Art der Erregung, sowie die dieser unmittelbar folgenden Vorgänge im primären Kreis auch für den secundären Kreis von maassgebender Bedeutung. So wird sich ersterer ganz anders verhalten in der, wenn auch nur kurzen Zeit, wo der Funken zwischen den primären Kugeln übergeht, während dessen diese sich wie metallisch geschlossen verhalten, als in

1) Vgl. E. Cohn und F. Heerwagen, Wied. Ann. **43.** p. 343. 1891.
2) Vgl. auch Kr. Birkeland, Wied. Ann. **47.** p. 611. 1892.

der Zeit, wo der Funkenstrom erloschen ist, wo er dann als offener Kreis schwingt.

Streng genommen hat man in der That schon bei einfacher Ueberbrückung zum Mindesten drei schwingungsfähige Systeme zu unterscheiden:

1. Das System, das den Endcondensator, die beiden ihm zunächst liegenden Drahtstücke sowie die Brücke enthält.

2. Das System, welches besteht aus den Platten $S_1$ und $S_2$ (vgl. Fig. 1), den ihnen zunächst liegenden Drahtstücken, der Brücke und den Platten $P_1$ und $P_2$, welche isolirt sind, so lange kein Funken übergeht.

3. Dasselbe System, wobei aber die Platten $P_1$ und $P_2$ durch die leitende Funkenbahn verbunden sind.

Als weitere Nebensysteme können unter anderen noch in Betracht kommen solche, die die ganzen Lecher'schen Drähte oder kleinere Theile derselben enthalten.

Durch Verschieben der Brücke lässt sich wohl zwischen zweien der angeführten Systeme 1, 2 und 3, aber nicht zwischen allen dreien ein einfaches Schwingungsverhältniss herstellen, um so weniger, als, wie erwähnt, das System 3 infolge der veränderlichen Leitfähigkeit der Funkenbahn schnell von einem solchen mit gut leitender Schliessung in ein solches mit gar nicht leitender Schliessung nach dem Aufhören des Funkens übergeht.

Wollen wir daher gut definirte Knoten und Bäuche erhalten, so müssen wir die Schwingungen des dritten Systemes, die nie vollkommen zu vermeiden sind, — es dient ja gerade der Ausgleich der Electricitäten in der Funkenstrecke dazu, um die Schwingungen anzuregen, — möglichst schnell dämpfen; d. h. alles vermeiden, was eine längere Andauer des Funkens befördern könnte (vgl. die später mitzutheilenden hierauf bezüglichen eingehenden Untersuchungen).

---

Die Cohn-Heerwagen'sche Theorie stellt eine Beziehung zwischen dem System 1) und den davorliegenden durch Brücken abgegrenzten Systemen dar, deren Länge für die Wellenlänge maassgebend ist. Anhangsweise nur wird auch das System 2) behandelt; hier haben aber die Untersuchungen

des Herrn Salvioni[1]) einige Modifikationen nöthig erscheinen lassen.

Wir schliessen uns an die Bezeichnungsweise der Herren Cohn und Heerwagen möglichst eng an, um die Vergleichung der Resultate zu erleichtern.

Ist für das $n + 1$ fache Knotensystem $z_n'$ die Drahtlänge von den secundären Platten $S_1$ und $S_2$ bis zur ersten Brücke, $\lambda_n$ der Abstand von je zwei aufeinander folgenden Brücken, d. h. die halbe Wellenlänge des $n + 1$ fachen Knotensystems, $z_n$ das Drahtstück von der letzten Brücke bis zu dem Endcondensator, so ist die Gesammtlänge der Lecher'schen Drähte

$$L = z_n' + n\lambda_n + z_n, \quad n = 0,\ 1,\ 2 \ldots n.$$

Hierbei sind $z_n'$ und $z_n$ Funktionen der Wellenlänge

$$z_n' = \varphi(\lambda_n) \qquad z_n = f(\lambda_n),$$

in welche als Parameter die Constanten des Drahtkreises und der betreffenden Condensatoren eingehen. Im Speciellen finden Cohn und Heerwagen für den offenen Kreis des Endcondensators:

$$z_n = \frac{\lambda_n}{\pi} \operatorname{arc\,tg}\left(= \frac{\lambda_n}{\pi\, q\, c_2}\right). \tag{1}$$

Hier ist $c_2$ die Capacität des Endcondensators und $q$ eine Grösse, welche von den Dimensionen des Lecher'schen Drahtsystems abhängt, und die man den Selbstinductionscoefficienten der Leiterbahnen pro Längeneinheit nennen könnte. Es ist

$$q = 4 \log \operatorname{nat}\left(\frac{b}{a}\right),$$

wo $b$ den gegenseitigen Abstand der Drahtaxen, $a$ den Drahtradius bezeichnet. Gemessen werden die Knotenabstände $k_n^i$ von den secundären Platten des primären Condensators; es ist

$$k_n^i = z'(\lambda_n) + i\lambda_n. \quad i = 0, 1, \ldots i.$$

Hat man die Knotenlage für die einzelnen Systeme gefunden, so kann man bei $n \gtreqless 2$ für die Wellenlängen nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichene Werthe ableiten. Setzt man

$$\sum k_n^i = A, \quad \sum i\,.\,k_n^i = B, \quad \sum i = C, \quad \sum i^2 = D,$$

1) Diesem entsprechende Resultate haben wir schon in unserer zweiten vorläufigen Mittheilung p. 5 mitgetheilt.

so ist $\overline{\lambda_n} = \frac{kB - AC}{kD - C^2}, \quad z'(\lambda_n) = \frac{AD - BC}{kD - C^2}$

($k$ Anzahl der Knoten) und die ausgeglichenen Werthe sind

$$z'(\lambda_n) + 0 \,.\, \overline{\lambda_n} = \overline{k_n^0}$$

$$z'(\lambda_n) + 1 \,.\, \overline{\lambda_n} = \overline{k_n^1}$$

$$z'(\lambda_n) + 2 \,.\, \overline{\lambda_n} = \overline{k_n^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$z'(\lambda_n) + n \,.\, \overline{\lambda_n} = \overline{k_n^n}$$ [1])

Aus der Gleichung (1) erhält man dann hieraus einen ausgeglichenen Werth $\overline{z_n}$.

Eine Controlle der Theorie besteht nun darin, dass bei demselben Leitersystem für die verschiedenen Knotensysteme immer die Grösse

$$t = \overline{k_n^n} + \overline{z_n} \tag{2}$$

nahezu dieselbe sein muss; $t$ gibt offenbar ein Maass für die Entfernung des Endpunktes der Schwingungen von den Platten $S_1$, $S_2$; diese Grösse muss nahe mit der direct zu messenden Gesammtlänge $L$ des ganzen Drahtsystems übereinstimmen. Die Phase des Endpunktes $t$ wächst in dem Maasse, als man den Endcondensator öffnet, und zwar von 0 (geschlossener Condensator, Capacität $c_2 = \infty$) bis $^1/_2$ (Dräthe frei endend, Capacität $c_2 = 0$), wie die Formeln (1) und (2) erkennen lassen.

Wir haben die Ausgleichung vorgenommen, wo uns die beobachteten Zahlen von systematischen Fehlern frei zu sein schienen. Wo dies nicht in genügendem Maasse der Fall war, sich vielmehr in den Differenzen zwischen den Abständen der einzelnen Knoten der oben (p. 570) erwähnte Gang zeigte, wurde einfach das arithmetische Mittel für $\lambda$ genommen.

Die folgenden Tabellen werden verschiedene sehr augenfällige Beispiele dieses Ganges zeigen. Wo eine Ausgleichung möglich erschien, sind die ausgeglichenen Werthe wie oben durch darüber angebrachte Striche gekennzeichnet. Auch in den Fällen, wo nur die einfache Mittelbildung erlaubt schien,

1) *Anmerkung.* In der entsprechenden Formel tritt bei Cohn und Heerwagen noch die additive Constante $s$ auf. Ein Theil derselben war bei uns überhaupt gleich Null, weil wir den Nullpunkt der Skala an die Platten $S_1$ und $S_2$ selbst verlegt haben, den anderen Theil (die reducirte halbe Brückenlänge) konnten wir als in dem $z'(\lambda_n)$ befindlich betrachten.

entspricht die Cohn-Heerwagen'sche Theorie vielfach den Beobachtungen recht gut, insofern als sie nahezu constante Werthe für $t$ liefert.

**Resultate.**

Die folgenden Tabellen enthalten die erhaltenen Versuchsresultate nebst den sich daraus ergebenden Schlüssen. Die Ueberschriften der Tabellen geben an, welche Theile des Systems bei den betreffenden Abschnitten verändert wurden.

Die Tabellen sind wie bei Cohn und Heerwagen eingerichtet. Zwischen den einzelnen Columnen stehen die Abstände der aufeinander folgenden Knoten. Man sieht, dass diese im allgemeinen nicht äquidistant sind. Die Abweichungen gehen bis zu 10 Proc., wogegen andere Reihen (z. B. II, X oder XVII) grosse Constanz zeigen. Die Zahlen sind oft controllirt worden. Da wir ausserdem den Druck in der Röhre jedesmal nur eben soweit erniedrigten, dass der betreffende Knoten gerade erhalten wurde, so waren die Einzeleinstellungen recht genau; jedenfalls sind die Abweichungen von der Aequidistanz nicht durch Beobachtungsfehler erklärbar.

Wir beginnen mit der Behandlung des Einflusses, welchen Veränderungen am Hauptcondensator auf die Schwingungszustände in dem secundären Drahtsystem zur Folge haben.

**A. Haupt- oder primärer Condensator.**

a) Capacitätsänderungen.

$\alpha$) Einfluss der Plattengrösse $f_1$.

Tabelle I.

| | Hauptcondensator: | Drähte: | Endcondensator: |
|---|---|---|---|
| Quadrat. | Platten $f_1 = 20 \times 20\ \mathrm{cm}^2$ | $L = 1252$ cm | $r = 10$ cm |
| | $\varepsilon_1 = 2{,}0$ cm | $b = 10$ „ | $\varepsilon_2 = 10$ „ |
| | $l = 0$ cm | $a = 0{,}05$ „ | $c = 5{,}3$ cm |
| | | $q = 21{,}19$ | (vgl. p. 585). |

Indicator: Kugel zwischen den Platten des Endcondensators.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $k_n^4$ | $k_n^5$ | $\lambda_n$ | $z_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 555 | | | | | | | | |
| 1 | — | 970 | | | | | | | |
| 2 | 82 | 596 | 1100 | | | | 509 | 156 | 1256 |
| | 514 | 504 | | | | | | | |
| 3 | 44 | 422 | 794 | 1160 | | | 372 | 96 | 1256 |
| | 378 | 372 | 366 | | | | | | |
| 4 | — | 316 | 618 | 908 | 1191 | | 292 | 64 | 1255 |
| | | 302 | 290 | 283 | | | | | |
| 5 | — | 263 | 504 | 738 | 972 | 1207 | 238 | 45 | 1252 |
| | | 241 | 234 | 234 | 235 | | | | |

Die zwischen den Werthen von $k_n^i$ stehenden Knotenabstände, nehmen gegen den primären Condensator hin zu, dennoch gruppieren sich die Werthe von $t$ ziemlich nahe um den Mittelwerth 1254, der nur wenig von der wahren Gesammtlänge $L$ der Drähte abweicht.

### Tabelle II.

Hauptcondensator: $f_1 = 30 \times 30$ cm², alles andere wie in I.
$l = 30$ cm.

| $n$ | $k_n^0$ | | $k_n^1$ | | $k_n^2$ | | $k_n^3$ | | $k_n^4$ | | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $\bar{t}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 457 | | | | | | | | | | | | |
| | (457) | | | | | | | | | | | | |
| 1 | 97 | 845 | 942 | 944 | | | | | | | 847 | 317 | 1261 |
| | (97) | 849 | (946) | | | | | | | | | | |
| 2 | 28 | 531 | 559 | 529 | 1088 | 1091 | | | | | 532 | 167 | 1258 |
| | (28) | 534 | (562) | 533 | (1095) | | | | | | | | |
| 3 | — | | 388 | 384 | 772 | 380 | 1152 | 1155 | | | 383 | 101 | 1256 |
| | — | | (391) | 386 | (777) | 381 | (1158) | | | | | | |
| 4 | — | | 287 | 303 | 590 | 297 | 887 | 296 | 1183 | 1185 | 299 | 67 | 1252 |
| | — | | (288) | 303 | (591) | 298 | (889) | 298 | (1187) | | | | |

Die unter den für die $k_n^i$ beobachteten Werthe stehenden, in Klammern eingeschlossenen Werthe sind die nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichenen Zahlen, die zwichen den Columnen stehenden Zahlen wieder wie in I die entsprechenden Differenzen. Wiewohl diese Differenzen constanter sind als in I, die Knoten also mehr äquidistant, so weichen doch die Werthe von $\bar{t}$ weiter von einander ab, als in I. Das schon dort bemerkbare Abnehmen von $t$ mit der Wellenlänge tritt hier noch deutlicher hervor. Bezüglich des anderen Werthes von $l$, von dem die Selbstinduction im primären Kreise abhängt, hier und in I vgl. p. 580.

### β) Einfluss des Plattenabstandes $\varepsilon_1$.

## Tabelle III.

$\varepsilon_1 = 6,7$ cm, alles andere wie in I, nur $b = 10$, $a = 0,1$ cm.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $k_n$ | $\lambda_n$ | $z_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 619 | | | | | | | |
| 1 | 262 | 993 | | | | 731 | 273 | 1266 |
| | 731 | | | | | | | |
| 2 | 142 | 630 | 1110 | | | 484 | 155 | 1265 |
| | 488 | 480 | | | | | | |
| 3 | 85 | 455 | 815 | 1160 | | 358 | 98 | 1258 |
| | 370 | 360 | 345 | | | | | |
| 4 | — | 345 | 634 | 920 | 1186 | 280 | 66 | 1252 |
| | | 289 | 286 | 266 | | | | |

## Tabelle IV.

$\varepsilon_1 = 4,6$ cm, sonst wie oben.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $k_n^4$ | $\lambda_n$ | $z_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 613 | | | | | | | |
| 1 | 246 | 985 | | | | 739 | 277 | 1262 |
| | 739 | | | | | | | |
| 2 | 132 | 621 | 1105 | | | 486 | 156 | 1261 |
| | 489 | 484 | | | | | | |
| 3 | 74 | 441 | 804 | 1158 | | 361 | 100 | 1258 |
| | 367 | 363 | 354 | | | | | |
| 4 | 39 | 338 | 625 | 911 | 1188 | 287 | 69 | 1257 |
| | 299 | 287 | 286 | 277 | | | | |

## Tabelle V.

$\varepsilon_1 = 1,8$ cm, sonst wic oben.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $k_n^4$ | $\lambda_n$ | $z_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 578* | | | | | | | |
| 1 | 189 | 968 | | | | 799 | 306 | 1274 |
| | 799 | | | | | | | |
| 2 | 80 | 592 | 1095 | | | 507 | 166 | 1261 |
| | 512 | 503 | | | | | | |
| 3 | — | 421 | 795 | 1153 | | 366 | 102 | 1255 |
| | | 374 | 358 | | | | | |
| 4 | — | 315 | 610 | 904 | 1185 | 290 | 54 | 1239 |
| | | 295 | 294 | 281 | | | | |

Die Beobachtungen der Tabelle III entsprechen, was die Drähte und den Hauptcondensator betrifft, ziemlich genau denen der Tabelle III von Cohn und Heerwagen p. 352;

nur ist bei uns die Gesammtdrahtlänge (1252) grösser als bei den genannten Beobachtern (ca. 1075) und der Plattenabstand auch grösser (6,7 gegen 6,0). Dagegen hatte der Endcondensator bei uns eine viel kleinere Capacität (5,3 gegen 15,7 resp. 16,3). Wir wählten dieselbe so klein, um den Einfluss der Capacität des Hauptcondensators möglichst hervortreten zu lassen. Eine Vergleichung der Tabelle III bis V zeigt, wie bei abnehmendem Plattenabstande $\varepsilon_1$, also zunehmender Capacität am primären Ende, die Werthe von $t$ zunächst sich besser zusammenschliessen, dann aber weit auseinander gehen und stark vom Mittel und der wahren Gesammtdrahtlänge $L$ abweichen.

Was die absolute Lage der Knoten betrifft, so sieht man, dass sie mehr und mehr nach dem primären Condensator rücken, wenn dessen Capacität wächst; an diesem Vorrücken betheiligen sich aber nicht alle Knoten eines Systems im gleichen Maasse, sodass eine Deformation des ganzen Systems eintritt. Wir haben diese Veränderungen in einer grossen Anzahl von Fällen verfolgt; als Beispiel möge nur noch das folgende, freilich etwas unvollständige Werthsystem Platz finden.

Tabelle VI.

$f_1 = 20 \times 20\ \text{cm}^2$ $\quad b = 10$ cm $\quad r_2 = 10$ cm
$\varepsilon_1 = 6{,}7$ cm $\quad a = 0.1$ „ $\quad \varepsilon_2 = 2$ „
$l = 10$ „ $\quad q = 18{,}42$ $\quad c = 16{,}3$ cm

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $\lambda_n$ | $x_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 718 | | | | | |
| 1 | 289 | 1079 | | 790 | 175,4 | 1254,4 |
| | 790 | | | | | |
| 2 | 155 | 665 | 1169 | 507,6 | 79,7 | 1248,7 |
| | 510 | 504 | | | | |
| | $\varepsilon_1 = 4.6$ | | | | | |
| 0 | 719 | | | | | |
| 1 | 275 | 1077 | | 802 | 180 | 1257 |
| | 802 | | | | | |
| | $\varepsilon_1 = 1{,}8$ | | | | | |
| 0 | 660 | | | | | |
| 1 | 215 | 1075 | | 860 | 202,4 | 1277 |
| | 860 | | | | | |
| 2 | 89 | 627 | 1160 | 536 | 88,2 | 1248 |
| | 538 | 538 | | | | |
| | (89,8) | (625,8) | (1161,8) | | | |

Die erste dieser Tabellen entspricht noch genauer als die vorigen den Verhältnissen, unter denen die Tabelle III der Herren Cohn und Heerwagen erhalten wurde, da jetzt der Endcondensator $r_2 = 10$, $\varepsilon_2 = 2$ cm wie dort hatte. Für seine Capacität haben wir den von Jenen aus Schwingungsbeobachtungen abgeleiteten Wert $c = 16{,}3$ benutzt. Unsere Zahlen sind sämmtlich grösser, was aber bedeutungslos ist, da der Anfangspunkt der Zählung ein verschiedener war. Man sieht indess, dass auch die Wellenlängen bei uns grösser sind und die Knotensysteme nach dem Hauptcondensator zu erweitert erscheinen. Als Indicator diente bei diesen Versuchen wie bei denen der Hrn. Cohn und Heerwagen eine mit Electroden versehene, in der Nähe der Endcondensatoren an die Drähte metallisch angeschlossene Röhre.

### $\gamma$) Einfluss der Plattengestalt.

Bei allen bisherigen Versuchen über electrische Schwingungen hat man stillschweigend angenommen, dass die Gestalt der primären und secundären Platten keinen Einfluss auf die Schwingungen selbst habe; man wählte sie rechteckig, quadratisch oder rund, bald grösser, bald kleiner. Eine einfache Ueberlegung zeigt aber, dass die Dimensionen der Platten nicht ganz ohne Einfluss sein können in dem Momente, wo sie commensurabel werden mit der Wellenlänge der Schwingungen. Denn dann kommt die Zeit in Betracht, innerhalb deren sich die Platten entladen; die Phase der Entladung ist für die verschiedenen Plattentheile eine merklich verschiedene. Legen wir das Bild der Energiezellen und Energieröhren zu Grunde. so sind diese Röhren, wenn das Maximum der Ladung erreicht ist, also unmittelbar vor dem Ueberspringen des primären Funkens, bis auf einen verschwindenden Bruchtheil zwischen den primären und secundären Platten ausgespannt; ihre Vertheilung ist eine gleichförmige. Sowie die Entladung einsetzt. wandern zunächst die der primären Funkenstrecke nächsten Energieröhren aus und in das Drahtsystem ein. Es ist eine gewisse Zeit erforderlich, bis sich diese Bewegung den einzelnen Röhren und Zellen mittheilt, sind die Platten lang, so sind die äussersten noch in Ruhe, wenn die vorderen schon die Schwingungen in Gang gesetzt haben.

Es entstand also die Frage, ob auch in Fällen, wo man zu extremen Plattenformen, sehr langen, schmalen Streifenpaaren übergeht, die Cohn-Heerwagen'sche Theorie noch die Beziehung zwischen den einzelnen, die Schwingungen am Ende des Drahtkreises bestimmenden Grössen darstelle. Wir theilen einige Versuchsreihen mit, bei der wir 150 cm lange und nur 6 cm hohe Zinkblechstreifen verwandten (also Platten von derselben Fläche, wie unsere grossen quadratischen Platten, sodass die hier erhaltenen Ergebnisse sofort mit den mit jenen Platten gewonnenen verglichen werden können). Die Versuche zeigen, dass in der That die Cohn-Heerwagen'sche Theorie auch für diesen Fall gilt, da die verschiedenen Werthe von $t$ vom Mittel 1254,4 nur um Grössen abweichen, die innerhalb der Grenze der unvermeidlichen Beoachtungsfehler liegen.

### Tabelle VII.

$f_1 = 6 \times 150$ cm² $L = 1252$ cm $r_2 = 10$ cm
$\varepsilon_1 = 2$ cm $b = 10$ „ $\varepsilon_2 = 10$ „
$l = 0$ „ $a = 0{,}05$ „ $c = 5{,}3$ cm
$q = 21{,}19$

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $k_n^4$ | $k_n^5$ | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 425 | | | | | | | | |
| 1 | 94<br>844 | 938 | | | | | 844 | 316 | 1254 |
| 2 | 27<br>535 | 562<br>530 | 1092 | | | | 533 | 167 | 1259 |
| 3 | 4<br>391 | 395<br>380 | 775<br>377 | 1152 | | | 383 | 101 | 1253 |
| 4 | — | 299<br>299 | 598<br>294 | 892<br>295 | 1187 | | 296 | 66 | 1253 |
| 5 | — | — | — | 732<br>240 | 972<br>235 | 1207 | 288 | 45 | 1253 |

Das Mittel der $t$-Werthe stimmt mit der direct gemessenen Länge $L$ sehr nahe überein.

### Tabelle VIII.

$f_1 = 30 \times 30$ cm², sonst alles wie bei VII.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $k_n^4$ | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 461 | | | | | | | |
| 1 | 114<br>841 | 955 | | | | 841 | 314 | 1269 |
| 2 | — | 575<br>522 | 1097 | | | 522 | 162 | 1259 |
| 3 | — | 407<br>381 | 788<br>372 | 1160 | | 377 | 98 | 1258 |
| 4 | — | 315<br>295 | 610<br>290 | 900<br>289 | 1189 | 291 | 64 | 1253 |

Die Zahlen zeigen wie die der Tabelle IV ein weiteres Auseinandergehen der Einzelwerthe bei den quadratischen Platten und einen höheren, von $L$ in demselben Sinne, wie bei den anderen Reihen abweichenden Mittelwerth 1260.

**b) Einfluss von Aenderungen der Selbstinduction des primären Schliessungskreises.**

**$\alpha$) Einfluss der Stangenlängen $l$.**

Wir theilen hier eine Beobachtungsreihe mit, welche unter ganz analogen Bedingungen wie die in Tabelle II erhalten wurde, nur dass jetzt die Messingstäbe, welche die primären Kugeln trugen, ganz hineingeschoben wurden, also $l = 0$ war.

Tabelle IX.

$l = 0$, sonst alles wie in II.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $k_n^4$ | $k_n^5$ | $k_n^6$ | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 467 | | | | | | | | | |
| 1 | 115<br>386 | 951 | | | | | | 836 | 312 | 1263 |
| 2 | 44<br>529 | 578<br>524 | 1097 | | | | | 526 | 164 | 1261 |
| 3 | 22<br>387 | 409<br>376 | 785<br>375 | 1160 | | | | 379 | 100 | 1260 |
| 4 | — | 314<br>296 | 610<br>293 | 903<br>287 | 1190 | | | 292 | 64 | 1254 |
| 5 | — | 249<br>248 | 497<br>239 | 736<br>240 | 976<br>231 | 1207 | | 239 | 45 | 1252 |
| 6 | — | — | — | — | 834<br>198 | 1032<br>188 | 1220 | 139 | 31 | 1251 |

Die Vergleichung mit Tabelle II zeigt, dass mit abnehmender Selbstinduction im primären Kreise sich das ganze Knotensystem mehr nach dem Endcondensator hinschiebt, dabei aber zugleich etwas zusammenschiebt, so dass die entsprechenden Knotenabstände etwas abnehmen und zwar die der einfachen Systeme mehr als die der zusammengesetzteren. Die Selbstinduction ändert fast nichts an dem Auseinandergehen der Einzelwerthe von $t$ und dem Wachsen über die wahre Länge $L$ hinaus bei den längeren Wellen. Darum konnte auch das Werthsystem II direct mit dem in I verglichen werden, wiewohl die Selbstinduction bei beiden Beobachtungsreihen ausser der Capacität des Hauptcondensators verändert war.

$\beta$) Einfluss von Drahtlängen zwischen primärem Condensator und Funkenstrecke.

Wir haben noch den Einfluss untersucht, welchen am primären Condensator vorgeschaltete Drahtlängen haben. Dabei wurde die Electricität von der Maschine wie bisher unmittelbar hinter den primären Kugeln bei völlig eingeschobenen Stangen ($l = 0$) zugeleitet. In den Klemmschrauben an den primären Kugeln werden aber bis zu 5 m lange Drähte befestigt, die zu einem Funkenmikrometer in der Verlängerung der Lecher'schen Drähte einander möglichst parallel liefen (vgl. p. 556). Die primären Kugeln wurden so weit auseinandergezogen, dass zwischen ihnen keine Funken mehr übergingen, sondern das Funkenspiel am Mikrometer einsetzte. Dabei zeigte das ganze Knotensystem grosse Veränderungen, die um so auffallender wurden, je grösser die Zusatzlängen waren. Die Veränderungen bestehen im Wesentlichen in Folgendem:

1. Die Knoten wandern nach dem primären Condensator hin, die nächsten schneller, die weiter wegliegenden langsamer.

2. Die Intensitätverhältnisse der Knoten ändern sich; sehr deutlich ausgesprochene Knoten können bei gewissen Zusatzlängen überhaupt nicht wieder aufgefunden werden.

3. Besonders auffallend ist aber schon bei kleinen Zusatzlängen, dass nahe der Mitte der Drähte, wo sonst nur der einfache Knoten $k_o^0$ ziemlich isolirt liegt, ein neuer sehr deutlich ausgesprochener, von $k_o^0$ deutlich geschiedener Knoten auftrat, der wie dieser nur eine einfache Ueberbrückung gestattet, dem sonst also kein anderer Knoten des Systems zugeordnet werden kann. Nur als ein Beispiel geben wir aus dem grossen Beobachtungsmaterial, welches wir hierüber gesammelt haben, die folgende unvollständige und skizzenhafte Reihe; wir haben gerade sie ausgewählt, weil sie umittelbar mit der ersten Reihe (für $a = 0{,}05$ cm) der Tabelle XVI vergleichbar ist, die unter genau denselben Bedingungen erhalten wurde; dort war aber die Zusatzlänge $Z = 0$.

### Tabelle IXa.

**Alles wie bei XVI; nur $Z = 50$ cm.**

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 451 | | | | | | |
| 1 | 109<br>843 | 952 | | | 843 | 315 | 1267 |
| 2 | — | 554<br>588 | 1087 | | 533 | 167 | 1254 |
| 3 | — | 359<br>398 | 757<br>392 | 1149 | 395 | 106 | 1255 |

Daneben aber noch ein nur einfach zu überbrückender Knoten bei 514.

$Z = 100$ cm.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 438 | | | | | | |
| 1 | 109<br>840 | 949 | | | 840 | 314 | 1263 |
| 2 | — | 537<br>547 | 1084 | | 547 | 174 | 1258 |
| 3 | — | — | — | 1142 | | | |

Daneben noch Knoten bei 531, 707, 817, zu denen keine zugeordneten gefunden werden konnten, erstere sehr deutlich.

Sehr leicht lassen sich die Verschiebungen der mittleren Knoten beobachten, wenn man die Funken einmal zwischen den Kugeln des primären Condensators überspringen lässt, dann diese auseinanderzieht und die Funken zwischen den Electroden der Maschine übergehen lässt.

Beachtet man, dass durch das Vorschalten eines besonderen Drahtkreises zu den drei p. 571 genannten schwingenden Systemen ein viertes tritt, dass ferner diese Systeme zu zweien und dreien combinirt schwingen können, so lässt sich die vollständige Aenderung der Knotensysteme auf den Lecher'schen Drähten verstehen. Wir wollen hier nicht näher darauf eingehen; ein Theil dieser Beziehungen ist unterdessen schon von Hrn. Salvioni in zwei Arbeiten discutirt worden. Uns kam es bei der vorliegenden Untersuchung hauptsächlich darauf an, diesen Einfluss auf unser Instrument festzustellen, weil von ihm die Vergleichbarkeit der verschiedenen Beobach-

tungsreihen mit abhing. Wir haben diesen Einfluss möglichst herabgesetzt durch Verwendung kurzer Zuleitungen zu den Kugeln der primären Funkenstrecke von den Platten $P_1$ und $P_2$ aus, besonders in allen den Fällen, wo ausser der primären Funkenstrecke noch eine Parallelfunkenstrecke verwendet werden musste. —

### B. Drähte.

Wir haben bei einzelnen Versuchsreihen einen Theil des Drahtsystems durch Röhren mit verdünnten, leuchtenden Gasen ersetzt. Um diese Versuche den übrigen über electrische Schwingungen anreihen zu können, war zunächst zu untersuchen, ob der Durchmesser der Leitungsbahnen und ihr Abstand die Erscheinungen wirklich so beeinflusst, wie die Theorie verlangt, selbst dann, wenn man die Drähte durch dicke Metallröhren (p. 557) ersetzt. Andererseits lassen sich 2 mm dicke Drähte, wie sie die Hrn. Cohn und Heerwagen und auch wir vielfach verwendeten, nicht so gut spannen wie dünnere; wir haben daher für die meisten späteren Versuche 1 mm dicke verwendet. Daher musste zuvor durch besondere Versuchsreihen festgestellt werden, ob auch hier die Theorie noch volle Gültigkeit behält.

#### a) Dicke Drähte.

##### α) Kleiner Abstand.

Am Hauptcondensator blieb alles unverändert, variirt wurde bei den verschiedenen Reihen nur die Capacität des Endcondensators.

Tabelle X.

$f_1 = 30 \times 30$ cm², $\varepsilon_1 = 2$ cm, $l = 30$ „ ; $L = 1245$ cm, $b = 10$ „, $a = 0,1$ „, $q = 18,42$ ; $r_2 = 10$ cm, $s_2 = 0$ „, $c_2 = \infty$

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $\lambda_n$ | $k_n^n = t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 429 | | | | | |
| 2 | 49 | 647 | | | 598 | 1245 |
| | 598 | | | | | |
| 3 | — | 433 | 839 | | 406 | 1245 |
| | | 406 | | | | |
| 4 | — | 308 | 620 | 933 | 212 | 1245 |
| | | 312 | 313 | | | |

$\varepsilon_2 = 2$ cm, $c_2 = 16,3$.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $\lambda_n$ | $z_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 587 | | | | | | |
| 1 | 141 | 1038 | | | 897 | 217 | 1245 |
| | 897 | | | | | | |
| 2 | 48 | 601 | 1155 | | 553 | 93 | 1248 |
| | 553 | 554 | | | | | |
| 3 | — | 415 | 810 | 1204 | 395 | 50 | 1254 |
| | | 395 | 394 | | | | |

$\varepsilon_2 = 10$ cm, $c_2 = 5,3$.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $k_n^4$ | $k_n^5$ | $\lambda_n$ | $z_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 474 | | | | | | | | |
| 1 | 114 | 935 | | | | | 821 | 317 | 1252 |
| | 821 | | | | | | | (310) | (1245) |
| 2 | 40 | 559 | 1078 | | | | 519 | 171 | 1249 |
| | 519 | 519 | | | | | | (167) | |
| 3 | — | 392 | 766 | 1139 | | | 373 | 105 | 1244 |
| | | 374 | 373 | | | | | (106) | |
| 4 | — | 289 | 584 | 878 | 1172 | | 294 | 72 | 1244 |
| | | 295 | 294 | 294 | | | | (73) | |
| 5 | — | — | — | 735 | 966 | 1197 | 231 | 44 | 1241 |
| | | | | 231 | 231 | | | (48) | |

Die Mittel der drei Reihen (1245, 1249 und 1246) weichen nur sehr wenig von der wahren Länge 1245, und die Einzelwerthe wenig von den Mitteln ab. Die dritte dieser Reihen wurde zur Berechnung der *Capacität des Endcondensators bei $\varepsilon_2 = 10$ cm* benutzt. Da wir einen Kreisplattencondensator mit $r_2 = 10$ cm wie Cohn und Heerwagen verwendeten, so konnten wir bei $\varepsilon_2 = 2$ cm deren Werth 16,3 für die Capacität bei Ladungen durch rasche electrische Schwingungen verwenden. Mit $\varepsilon_2 = 10$ cm haben die genannten Beobachter keine Versuche angestellt. Wir haben nun hier nach ihrem Vorgang (vgl. a. a. O. p. 365) diese Capacität dadurch berechnet, dass wir die Forderung stellten, der Mittelwerth der $t$-Werthe der dritten Reihe sollte sich möglichst eng an den wahren Werth von $L$ anschliessen, auf den ja die beiden anderen Reihen mit grosser Annäherung führten. Die hierfür nöthigen Werthe von $z_n$ sind in Klammer unter die direct (nach Ermittelung von $c$) berechneten in der Columne für $z_n$ gesetzt worden. Mit ihnen wurde die transcendente Gleichung 1

(vgl. p. 572) nach $c$ aufgelöst; für $c$ ergaben sich mittels der verschiedenen Knotensysteme die Einzelwerthe: 5,7; 5,6; 5,2; 5,1; 5,2. Das Mittel $c = 5{,}3$ wurde bei allen Beobachtungen, wo der Endcondensator mit dieser grossen Plattenentfernung verwendet wurde, zu Grunde gelegt. Die einfache electrostatische Formel würde $c = 2{,}5$ gegeben haben, also mehr als 50 Proc. weniger; die Abweichung hat denselben Sinn, wie die von Cohn und Heerwagen für andere Condensatoren von kleinen Capacitäten angegebene (vgl. die von ihnen in ihrer Abhandlung gegebene Tab. VI, l. c. p. 355 und die Discussion p. 367, welche durch unsere Berechnung dieses sehr extremen Falles vollständig bestätigt wird).

Mit dem so erhaltenen Werthe von $c$ sind die nicht eingeklammerten Werthe der Columnen für $z_n$ und $t$ berechnet; dass das Mittel der letzteren 1246 und nicht, wie gefordert, 1245 wird, rührt von Abrundungsfehlern her (alle Rechnungen sind mit vierstelligen Logarithmentafeln durchgeführt worden).

$\beta$) **Grosser Abstand.**

Tabelle XI.

Hauptcondensator wie bei X. $L = 1245$ cm, $a = 30$ „, $b = 0{,}1$ „, $s_2 = 10$ cm, $c = 5{,}3$ cm

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $k_n^4$ | $\lambda_n$ | $z_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 480 | | | | | | | |
| 1 | 105<br>868 | 973 | | | | 868 | 320 | 1293 |
| 2 | 39<br>534 | 573<br>532 | 1105 | | | 533 | 161 | 1266 |
| 3 | 85<br>360 | 445<br>356 | 801<br>362 | 1163 | | 359 | 87 | 1250 |
| 4 | 50<br>290 | 340<br>290 | 630<br>295 | 925<br>285 | 1210 | 290 | 60 | 1270 |

Die Abweichungen der $t$ sind auffallend gross. —

### b) Dicke Röhren.

#### α) Kleiner Abstand.

### Tabelle XII.

Hauptcondensator wie bei X.

$L$ = 1288 cm  
$b$ = 10 „  
$a$ = 1,045 „  
$q$ = 9,035

$r_2$ = 10 cm  
$\varepsilon_2$ = 0 „  
$c$ = ∞

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 697 | | | | | | |
| 2 | 442<br>488 | 875 | | | 488 | 0 | 1308 |

$\varepsilon_2$ = 2 cm; $c$ = 16,3.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 580 | | | | | | |
| 1 | 185<br>800 | 985 | | | 800 | 266 | 1251 |
| 2 | 65<br>528 | 593<br>531 | 1124 | | 529 | 143 | 1267 |

$\varepsilon_2$ = 10 cm, $c$ = 5,3.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 550 | | | | | | |
| 1 | 150<br>760 | 910 | | | 760 | 333 | 1243 |
| 2 | — | 533<br>508 | 1041 | | 508 | 207 | 1248 |
| 3 | — | 384<br>366 | 750<br>364 | 1114 | 365 | 137 | 1251 |

Die $t$-Werthe weichen sowohl untereinander wie von der wahren Länge stark ab; der Grund liegt nicht nothwendig in einer Unvollständigkeit der Theorie: An die Enden der 2,09 cm dicken, 12 m langen Röhren waren am Anfange 2 mm dicke, 12 cm lange Drähte, am Ende ebenso dicke und 25 cm lange Zuleitungsdrähte angelöthet. Bei Benutzung der Formeln wurde aber vorausgesetzt, dass die Leitungen durchgängig 2 cm dick wären. Die hieraus nothwendig sich ergebende Abweichung ist klein bei grosser Endcapacität, gross bei abnehmender Capacität. Sie erklärt sich aus der Deformation des Schliessungskreises.

β) Grosser Abstand.

Noch erheblicher sind die Abweichungen bei

### Tabelle XIII.

Alles wie wie in XII; $b$ = 30 cm, $\varepsilon_2$ = 2 cm, $c$ = 16,3 cm.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $\lambda_n$ | $\varkappa$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 560 | | | | | | |
| 1 | 155<br>856 | 1011 | | | 856 | 293 | 1304 |
| 2 | 20<br>570 | 590<br>558 | 1148 | | 564 | 159 | 1307 |
| 3 | — | 428<br>422 | 850<br>350 | 1200 | 386 | 86 | 1286 |

c) Dünne Drähte.

α) Kleiner Abstand.

### Tabelle XIV.

Haupcondensator wie bei I.

$L$ = 1252 cm. $b$ = 10 „ $a$ = 0,05 „ $q$ = 1,3262

$r_2$ = 10 cm $\varepsilon_1$ = 0 „ $c = \infty$ (Röhre lag bei 1045)

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | 0 | |
| 2 | 31<br>610 | 641 | | | 610 | 0 | 1251 |
| 3 | — | 420<br>416 | 836 | | 416 | 0 | 1252 |
| 4 | — | 315<br>316 | 631<br>310 | 941 | 313 | 0 | 1253 |
| | | | $\varepsilon_2$ = 2 cm, $c$ = 16,3 cm. | | | | |
| | 553 | | | | | | |
| 0 | 554 | | | | | | |
| 1 | 121<br>924 | 1045 } 1045 | | | 923 | 207 | 1252 |
| | 123<br>922 | 1045 | | | | | |
| 2 | 32<br>568 | 600<br>564 | 1164 } 1165 | | 567 | 87 | 1252 |
| | 32<br>578 | 610<br>557 | 1167 | | | | |
| 3 | — | 405<br>402 | 807<br>397 | 1204 | 397 | 44 | 1248 |
| | — | 415<br>404 | 819<br>385 | 1204 | | | |

$\varepsilon_2$ = 10 cm, $c$ = 5,3 cm (vgl. Tab. II, p. 575).
Die hierher gehörigen Zahlen sind in Tab. II, p. 575 enthalten.

Die untereinander stehenden Zahlen gehören zwei unter den gleichen Bedingungen erhaltenen Reihen.

β) Grosser Abstand.

Tabelle XV.

$\frac{b = 30 \text{ cm}}{q = 25,60}$ $\varepsilon_2 = 2$ cm, $c = 16,3$ cm, alles andere wie bei XIV.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $k_n^4$ | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 552 | | | | | | | |
| 1 | 114<br>953 | 1067 | | | | 953 | 191 | 1256 |
| 2 | — | 580<br>604 | 1184 | | | 604 | 83 | 1267 |
| 3 | — | 427<br>401 | 828<br>387 | 1215 | | 394 | 37 | 1252 |

Die Theorie bewährt sich vollkommen für die dünnen Drähte, so dass wir berechtigt waren, sie bei den folgenden mit diesen Drähten angestellten Versuchen zu Grunde zu legen.

Bei den Metallröhren (p. 557) zeigen sich grosse Abweichungen. Hier spielt wohl die sehr grosse Capacität der Leitung pro Längeneinheit eine hervorragende Rolle. Dass wir hier Hohlkörper haben, kommt nicht in Betracht, da die raschen electrischen Schwingungen im wesentlichen an der Oberfläche verlaufen. In der That zeigten massive dicke Stäbe dasselbe Verhalten. Bei Anwendung weiter Röhren im Schliessungskreise musste also durch besondere Discussionen im Einzelnen festgestellt werden, in wie weit man ein solches System als gewöhnliches Lecher'sches ansehen dürfe.

Wir theilen noch die Ergebnisse zweier parallel stehender Versuchsreihen mit, welche unter ganz gleichen Verhältnissen mit der speciellen Absicht angestellt wurden, eine Vergleichung zwischen dem Verhalten dicker Metallröhren und sehr dünner Drähte zu erhalten. Wir wählten die kleine Entfernung $b = 10$ cm, einmal weil dabei die Einstellungen schärfer sind, andererseits um das Verhältniss $b/a$, welches für $q$ maassgebend ist, in möglichst weiten Grenzen zu variiren.

Tabelle XVI.

(Dünne Drähte.)

$f_1 = 30 \times 30\ \text{cm}^2$ $L = 1260$ cm $r_2 = 10$ cm $a = 0{,}05$ cm
$\varepsilon_2 = 2$ cm $b = 10$ „ $\varepsilon_2 = 10$ „ $q = 21{,}19$
$l = 0$ „ $c = 5{,}3$ cm

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $k_n^4$ | $k_n^5$ | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 463 | | | | | | | | |
| 1 | 113<br>839 | 952 | | | | | 839 | 313 | 1265 |
| 2 | 47<br>525 | 572<br>525 | 1097 | | | | 525 | 164 | 1261 |
| 3 | — | 398<br>378 | 776<br>381 | 1157 | | | 379 | 100 | 1257 |
| 4 | — | 312<br>300 | 612<br>290 | 902<br>288 | 1190 | | 293 | 65 | 1255 |

(Röhren)

$a = 1{,}045$ cm

$q = 9{,}035$

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $k_n^4$ | $k_n^5$ | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 537 | | | | | | | | |
| 1 | 179<br>735 | 914 | | | | | 735 | 320 | 1234 |
| 2 | 87<br>478 | 565<br>474 | 1039 | | | | 476 | 192 | 1231 |
| 3 | 48<br>360 | 408<br>354 | 762<br>352 | 1114 | | | 355 | 132 | 1246 |
| 4 | — | 327<br>278 | 605<br>276 | 881<br>268 | 1149 | | 274 | 93 | 1242 |
| 5 | — | — | — | — | 969<br>211 | 1180 | 211 | 64 | 1244 |

### C) Endcondensator.

#### $\alpha$) Einfluss des Plattenabstandes.

Wie sich die Knotensysteme verschieben und ändern, wenn man die Capacität des Endcondensators verändert, zeigen diejenigen Beobachtungsreihen, bei denen alles andere unverändert blieb und nur der Plattenabstand $\varepsilon_2$ geändert wurde, wie es z. B. bei den Reihen Tabelle X geschehen ist. Diese Reihen oder noch besser nach ihnen entworfene Curventafeln (die wir hier wegen Raummangels nicht mittheilen), zeigen, wie sich die Knoten vom Endcondensator weg verschieben, wenn man die Platten desselben von einander entfernt; bei $\varepsilon_2 = 0$ ($c_2 = \infty$) haben alle Knotensysteme hier einen Knoten. In dem Maasse als $\varepsilon_2$ wächst ($c_2$ abnimmt), wächst die Phase am Ende, welche für alle Schwingungssysteme die gleiche ist. Man erkennt ferner, dass die Knotenabstände bei dem genannten Vorgange selbst nicht

constant bleiben, sondern sich zusammenschieben, dadurch nämlich, dass die dem primären Condensator näheren Knoten langsamer fortwandern. Auf besondere Mittheilungen von Tabellen hierüber verzichten wir; theils geben die obenstehenden Tabellen zahlreiche Beispiele für diese Verhältnisse, theils liegen von anderen Beobachtern solche in genügender Zahl vor.

### $\beta$) Einfluss der Plattengrösse.

Wir wollen zur Vergleichung hier noch eine Beobachtungsreihe mittheilen, welche nicht mit den kreisförmigen Platten von 10 cm Radius angestellt worden ist, sondern mit sehr kleinen quadratischen Platten von 3 cm Seitenlänge; dieselben waren auf die Enden einer 9,3 cm langen Glasröhre $G$ aufgekittet, dadurch entstand zwischen den Condensatorplatten ein mit Luft erfüllter vollständig abgeschlossener Raum $A$, der durch eine an die Glasröhre $G$ senkrecht angeschmolzene Röhre mit der Luftpumpe in Verbindung stand.

Die eingeklammerten Zahlen der Columne $k_n^0$ sind nicht beobachtet, sondern bei der Ausgleichung berechnet worden.

Tabelle XVII.

$f_1 = 20 \times 20$ cm², $\varepsilon_1 = 1,8$, $l = 30$ | $L = 1245$ cm, $b = 10$, $a = 0,1$, $q = 18,42$ | $f_2 = 3 \times 3$ cm², $\varepsilon_1 = 9,3$, $c =$ ca. 0,31 cm.

| $n$ | $k_n^0$ | $k_n^1$ | $k_n^2$ | $k_n^3$ | $k_n^4$ | $k_n^5$ | $k_n^6$ | $\lambda_n$ | $\varkappa_n$ | $t_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 528 | | | | | | | | | |
| 1 | 175 | 907 | | | | | | 732 | 360 | 1267 |
| | 732 | | | | | | | | | |
| 2 | — | 555 | 1035 | | | | | 480 | 234 | 1279 |
| | | 480 | | | | | | | | |
| 3 | — | 389 | 745 | 1100 | | | | 355,5 | 172 | 1272 |
| | | 356 | 355 | | | | | | | |
| | (33,7) | (389,2) | (744,7) | (1100,2) | | | | | | |
| 4 | — | 295 | 578 | 855 | 1130 | | | 278,2 | 133 | 1263 |
| | | 283 | 277 | 275 | | | | | | |
| | (19,0) | (297,2) | (575,4) | (853,6) | (1131,8) | | | | | |
| 5 | — | 230 | 465 | 695 | 925 | 1152 | | 230,4 | 109 | 1261 |
| | | 235 | 230 | 230 | 227 | | | | | |
| | (2,2) | (232,6) | (463,0) | (693,4) | (923,8) | (1154,2) | | | | |
| 6 | — | — | — | — | — | — | 1170 | | | |

Die Uebereinstimmung der beobachteten und der ausgeglichenen Werthe für die einzelnen Knotenlagen ist eine recht gute (grösste Abweichung 2,6 cm).

Auch die Cohn-Heerwagen'sche Theorie findet sich leidlich gut bestätigt (grösste Abweichung der $\bar{t}$ vom Mittel [1268] 11 cm).

Um so mehr muss auffallen, dass die Rechnung eine so grosse reducirte Gesammtlänge von 1268 cm ergibt im Vergleich zu der wahren Länge von 1245; ein Theil dieser constanten, einseitigen Abweichung der $t$-Werthe von $L$ rührt hier wahrscheinlich noch daher, dass das nach der einfachen electrostatischen Formel berechnete $c$ zu klein ist.

**$\gamma$) Einfluss eines leuchtenden Gases zwischen den Endcondensatorplatten.**

Um zu prüfen, ob die Gegenwart eines durch Oscillationen zum Leuchten erregten Gases zwischen den Endcondensatorplatten auf die Lage der Knoten von Einfluss ist oder nicht, wurde zunächst bei der vorigen Anordnung (Tab. XVII) der Druck der Luft in $A$ gleich dem Atmosphärendrucke gemacht, und die Lage der Knoten nach dem Aufleuchten des Gases einer angenäherten Hülfsröhre festgestellt; dann wurde der Raum $A$ evacuirt, bis die Luft in ihm anfing zu leuchten und wieder aus dem Leuchten nach Entfernung der Hülfsröhre die Lage der Knoten ermittelt. Sie war in beiden Fällen genau die gleiche. Die Gegenwart leuchtender Gase zwischen oder in der Nähe der Endcondensatorplatten ist demnach ohne Einfluss auf die Lage der Knoten.

*Das Gesammtergebniss der vorstehenden Versuche lässt sich folgendermaassen zusammenfassen; Trotz der ausnehmend weiten Abänderung der Versuchsbedingungen sind die Knotenabstände in demselben System zwar nicht constant, aber doch nur um höchstens 10 Proc. von einander verschieden; bei uns in dem Sinne, dass sie nach dem primären Condensator hin grösser werden.*

*Die nach der Cohn-Heerwagen'schen Formel berechnete reducirte Gesammtlänge der Drähte erhält, wenn man verschiedene Knotensysteme der Berechnung zu Grunde legt, in den meisten Fällen Werthe, die weder untereinander, noch von der gemessenen Gesammtlänge zu grosse Abweichungen zeigen.*

*Wir waren daher berechtigt bei unseren Versuchen mit dem Lecher'schen Drahtsystem die Cohn-Heerwagen'sche Theorie zu Grunde zu legen.*

Erlangen, Physik. Inst. d. Univ., Februar 1893.

## II. *Das Eindringen electrischer Wellen in die Metalle und die electromagnetische Lichttheorie;* *von V. Bjerknes.*

(Aus den Sitzungsber. d. Kgl. Akad. d. Wiss. zu Stockholm, mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

1. Aus den Hertz'schen Spiegelversuchen erhellt, dass hinlänglich dicke Metallplatten für electrische Wellen undurchdringlich sind. Auf Glas niedergeschlagene Silberschichten lassen dagegen die Wellen durch, wenn sie hinlänglich dünn, und jedenfalls dünner als $^1/_{100}$ mm sind.[1]) Die Wellen sind also fähig in das Metall einzudringen, beim weitern Fortpflanzen müssen sie aber schnell auslöschen. Ein genaueres Studium dieser Erscheinung bietet in mehrfacher Hinsicht Interesse, vielleicht besonders, weil entsprechende optische Erscheinungen, wie schon Maxwell bemerkt hat, mit der electromagnetischen Lichttheorie in Widerspruch zu stehen scheinen.[2])

Die hier erwähnten Hertz'schen Versuche entsprechen genau denjenigen optischen, wo man die durch eine dünne Metallschicht durchgelassene Lichtmenge misst. Ich werde im Folgenden eine Methode benutzen, welche kein genaues optisches Analogon hat, obwohl man eine Art Parallelismus mit gewissen Untersuchungen optischer Metalleigenschaften durch Studium des reflectirten Lichtes aufstelllen kann.

Die Oberflächenhäutchen, in welche die Wellen eindringen, sind die einzigen Theile der Metalle, die auf den Verlauf dieser schnellen electrodynamischen Erscheinungen einen Einfluss ausüben: das Innere könnte entfernt oder durch irgend welche andere Stoffe ersetzt werden. Nun wirken aber verschiedene Metalle individuell verschieden. Ueberzieht man daher einen Metallkörper mit einer dünnen Schicht eines an-

1) H. Hertz, Ausbreitung der electrischen Kraft, p. 178. Leipzig. J. A. Barth. 1892.

2) Maxwell, Electricity and Magnetism 2. p. 405.

deren Metalles, ohne sonst irgend eine Veränderung der geometrischen Verhältnisse oder der anderen Versuchsbedingungen vorzunehmen, so muss der electrodynamische Vorgang eine Veränderung erleiden, welche von dem physikalischen Unterschied der zwei Metalle abhängt.

Als Metallkörper kann man sich sehr bequem des secundären Hertz'schen Leiters bedienen. Je nachdem der Draht desselben (z. B. aus Kupfer oder Eisen besteht, verläuft das Mitschwingen mit dem Primärleiter sehr verschieden, wovon man sich leicht durch Beobachtungen nach der electrometrischen Methode überzeugen kann.[1]) Giebt man nun dem Eisendraht Kupferüberzüge oder dem Kupferdraht Eisenüberzüge, so verändern sich die Electrometerausschläge, und erreichen bei wachsender Dicke der Ueberzüge eine Grenze.

Das Princip der Untersuchungsmethode ist hierans ersichtlich. Die Metalleigenschaften, welche besonders die electrodynamischen Erscheinungen beeinflussen, sind Widerstand und Magnetismus. Es schien mir deshalb interessant zu untersuchen, ob das Eindringen der Wellen in die Metalle von diesen Eigenschaften abhängig ist. Die folgenden Untersuchungen sind deshalb auf Metallüberzüge von zwei unmagnetischen Metallen Kupfer und Zink, und drei magnetischen Metallen Nickel, Kobalt und Eisen ausgedehnt. Die Versuche sind im Herbstsemester 1892 im physikalischen Institute der Universität Christiania ausgeführt.

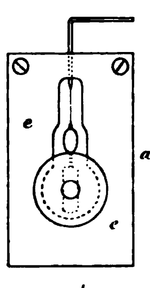
**Die Versuchsmethode.**

2. Zur Erzeugung der electromagnetischen Wellen diente ein Hertz'scher Primärleiter von 101 cm Länge, dessen Capacitäten circulare Messingscheiben von 30 cm Durchmesser waren. Mittels eines kleinen Inductoriums und eines Accumulators erregt, gab derselbe Wellen von 420 cm Länge aus. Man berechnet hieraus die ganze (doppelte) Schwingungsdauer zu $0{,}0_7 14$ Sec.

1) V. Bjerknes, Die Resonanzerscheinung und das Absorptionsvermögen der Metalle für die Energie electrischer Wellen. Wied. Ann. **47.** p. 69. 1892.

Die Wellen des Primärleiters fielen auf einen Secundärleiter, welcher genau auf Resonanz mit dem Primärleiter abgestimmt war. Diese Abstimmung auf Resonanz, sowie alle späteren Messungen, wurden mittels Electrometer vorgenommen. Die besondere Form des benutzten Electrometers spielt für die hier vorliegende Arbeit keine Rolle. Da sich aber das Instrument jetzt bei mehreren Arbeiten als sehr brauchbar erwiesen hat, wird eine Beschreibung desselben vielleicht etwas Interesse haben.

Fig. 1, *a* zeigt das Electrometer von der Seite, 1 *b* im Querschnitt von oben gesehen. Eine Ebonitplatte *e e* von 1 cm Dicke ist etwa birnenförmig durchbrochen. Der untere circuläre Theil der Oeffnung ist auf beiden Seiten mit kreisförmigen Messingscheiben von 3 cm Durchmesser, der obere Theil mit Glasplatten geschlossen. Die zwei Messingplatten bilden die Pole des Secundärleiters und tragen Klemmschrauben zur Befestigung des Leitungsdrahtes. Wenn die Platten infolge der Schwingungen entgegengesetzt electrisch sind, so bildet der Luftraum zwischen denselben ein angenähert homogenes electrisches Feld; die Kraftlinien sind Gerade, die auf beiden Platten senkrecht stehen. In diesem Felde hängt an einem dünnen Quarzfaden ein rechteckiges Aluminiumblättchen, welches die Kraftlinien unter 45⁰ schneidet. Ohne Rücksicht auf das wechselnde Vorzeichen des Feldes strebt dies Blättchen sich parallel den Kraftlinien einzustellen. Zur Ablesung der Ablenkung trägt das Blättchen ein leichtes Spiegelchen, welches durch das Glasfenster gesehen werden kann. Die Ebonitplatte ist mit zwei Holzschrauben an einem aus der Wand herausragenden Balken festgeschraubt.



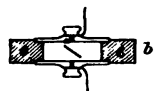




Fig. 1.

Der Hauptvorzug dieses Instrumentes vor dem Quadrantelectrometer, welches ich früher bei ähnlichen Arbeiten benutzt habe[1], ist die einfache geometrische Form, wodurch eine Schätzung der Capacität und des absoluten Werthes des

1) V. Bjerknes, Wied. Ann. **44.** p. 74 und p. 513.

Electrometerausschlages möglich wird, ein Vortheil der jedoch in der hier vorliegenden Arbeit keine Bedeutung hat.

3. Die Electrometerplatten durch einen circulär gebogenen Leitungsdraht von 125 cm Länge und 0,5 mm Durchmesser verbunden, bildeten einen secundären Leiter, der mit dem primären in Resonanz war. Eine Anzahl genau gleicher Leitungsdrähte von diesen Dimensionen, theils aus Eisen, theils aus Kupfer wurden electrolytisch mit den zu untersuchenden Metallen überzogen; nach der Galvanisirung wurde erst die mittlere Dicke des Ueberzuges durch Wägung bestimmt, und dann der Draht am Electrometer untersucht.

Die Galvanisirungen geschahen in einem gewöhnlichen Batterieglase. Der Draht wurde zu einer Spirale aufgerollt und während der Electrolyse beständig gedreht, um einen möglichst gleichmässig dicken Niederschlag zu erhalten.

Die Prüfung des Drahtes am Electrometer bestand immer in einem Vergleich mit einem bestimmten Kupferdrahte. Dieser Kupferdraht und der zu untersuchende Draht wurden wechselweise als Leitungsdrähte an das Electrometer geschaltet, und der Ausschlag abgelesen, der beim Spielen des Inductoriums entstand. Der Ausschlag, welcher dem Kupferdraht entsprach, ist immer gleich 100 gesetzt.

Die grösste Fehlerquelle bei diesen Versuchen ist ohne Zweifel die ungleichmässige Wirksamkeit der primären Funken. Die nächste mögen die Ungleichmässigkeiten der electrolytischen Niederschläge sein. Eine dritte Fehlerquelle ist die durch die fortgesetzte Galvanisirung verursachte allmähliche Zunahme des Drahtdurchmessers, was eine Abnahme der Schwingungsdauer des secundären Leiters zu Folge hat. Dies ist eine Quelle systematischer Fehler. Dieselben sind aber neben den beiden erst erwähnten ohne Bedeutung, solange die Dicke der Schicht nur wenige Procente von dem Durchmesser des Drahtes beträgt.

## Die Versuchsresultate.

4. Es sind im Folgenden die Resultate sämmtlicher Versuche gegeben in der Form von Tabellen über die Dicken der galvanischen Ueberzüge und die entsprechenden Electrometerausschläge, letztere stets auf den Ausschlag 100 des erwähn-

ten Kupferdrahtes bezogen. Sämmtliche Resultate sind ausserdem in der Fig. 2 graphisch dargestellt, wobei die Abscissen die Dicken der galvanischen Ueberzüge in Millimetern darstellen. Als Vergleichsgrösse für die Abscissen ist links unten die Wellenlänge $\lambda$ des rothen Lichtes aufgetragen.

5. *Kupfer*. Das Kupfer wurde auf Eisendrähte niedergeschlagen. Als Electrolyt diente, für den ersten Ueberzug, eine Lösung von Cyankupfer in Cyankalium; später wurde mit einer angesäuerten Kupfersulfatlösung fortgefahren.

| Dicke der Kupferschicht in Millimetern | Electrometer-ausschlag |
|---|---|
| 0 | 13,4 |
| 0,009 | 32 |
| 0,0021 | 55 |
| 0,0052 | 87 |
| 0,0076 | 101,5 |
| 0,0143 | 106 |
| 0,0206 | 105 |
| 0,0283 | 106 |

6. *Zink*. Das Zink wurde theils auf Eisen, theils auf Kupferdrähte niedergeschlagen. Der Electrolyt war eine ammoniakalische Zinksulfatlösung. Der Niederschlag hatte immer ein rauhes, oft deutlich feinkrystallinisches Aussehen. Die Drähte wurden deshalb vor der Wägung und Untersuchung am Electrometer mit feinem Schmirgel blankpolirt.

| Verzinkter Eisendraht | | Verzinkter Kupferdraht | |
|---|---|---|---|
| Dicke der Zinkschicht in Millimetern | Electrometer-ausschlag | Dicke der Zinkschicht in Millimetern | Electrometer-ausschlag |
| 0 | 13,4 | 0 | 100 |
| 0,0019 | 21,5 | 0,002 | 92,5 |
| 0,005 | 37 | 0,0044 | 87 |
| 0,0055 | 40 | 0,0056 | 85 |
| 0,0082 | 52 | 0,0114 | 81 |
| 0,0098 | 58 | 0,0162 | 80 |
| 0,0116 | 65 | 0,018 | 82 |
| 0,0143 | 68 | 0,0225 | 80 |
| 0,0162 | 71 | 0,026 | 78 |
| 0,0196 | 69 | 0,0285 | 78 |
| 0,021 | 73 | — | — |
| 0,023 | 76 | — | — |
| 0,0256 | 74 | — | — |
| 0,027 | 74 | — | — |
| 0,0315 | 77 | — | — |

7. *Nickel.* Das Nickel wurde auf Kupferdrähte nach den gewöhnlichen Vorschriften aus Nickelammoniumsulfat niedergeschlagen.

| Dicke der Nickelschicht in Millimetern | Electrometerausschlag | Dicke der Nickelschicht in Millimetern | Electrometerausschlag |
|---|---|---|---|
| 0 | 100 | 0,0103 | 39,7 |
| 0,00154 | 88 | 0,0124 | 40 |
| 0,00352 | 66,5 | 0,0152 | 39 |
| 0,00555 | 54,5 | 0,0163 | 40 |
| 0,0079 | 45,5 | 0,0203 | 38 |

8. *Kobalt.* Die Verkobaltung gelang leicht nach analogen Regeln wie für die Vernickelung. Es wurde ein Kobaltammoniumsulfat durch Zusammenkrystallisiren von Kobaltsulfat und Ammoniumsulfat dargestellt, und eine Lösung dieses Doppelsalzes schwach mit Citronensäure angesäuert als Electrolyt benutzt. Als Anode diente ein Platinblech, das Kobalt wurde auf Kupferdrähte abgeschieden.

| Dicke der Kobaltschicht in Millimetern | Electrometerausschlag | Dicke der Kobaltschicht in Millimetern | Electrometerausschlag |
|---|---|---|---|
| 0 | 100 | 0,0016 | 13,4 |
| 0,00006 | 95 | 0,00267 | 12,3 |
| 0,00067 | 53,7 | 0,0047 | 10,8 |
| 0,00114 | 27,3 | 0,0068 | 10,2 |
| 0,00134 | 16,6 | 0,011 | 9,8 |

9. *Eisen.* Das Eisen wurde auf Kupferdrähte niedergeschlagen. Als Electrolyt diente eine Lösung von Eisenvitriol mit Salmiak, die Flüssigkeit, welche bei der gewöhnlichen „Verstahlung“ von Kupferstichen verwendet wird.

| Dicke der Eisenschicht in Millimetern | Electrometerausschlag | Dicke der Eisenschicht in Milimetern | Electrometerausschlag |
|---|---|---|---|
| 0 | 100 | 0,00175 | 21 |
| 0,00032 | 80 | 0,003 | 11 |
| 0,00036 | 77 | 0,0043 | 9,7 |
| 0,00065 | 49,5 | 0,0057 | 9,3 |
| 0,00087 | 34 | 0,0124 | 7,8 |

10. Sämmtliche obigen Resultate sind, wie erwähnt, durch die Curven Fig. 2 graphisch veranschaulicht, wobei die Abscissen die Dicken der Oberflächenschichten, die Ordinaten die entsprechenden Electrometerausschläge darstellen.

Von kleinen Unregelmässigkeiten abgesehen, welche sich leicht aus den oben angedeuteten Fehlerquellen erklären, haben die Curven den erwarteten Verlauf: sie fangen mit einer deutlichen Neigung an, welche immer kleiner wird, und zuletzt verlaufen sie nahezu horizontal. Dass heisst, bei wachsender Dicke der Oberflächenschicht eliminirt sich allmählich der Einfluss des darunterliegenden Metalles. Wenn die Dicke einen gewissen Werth übersteigt, so hat es für den Verlauf

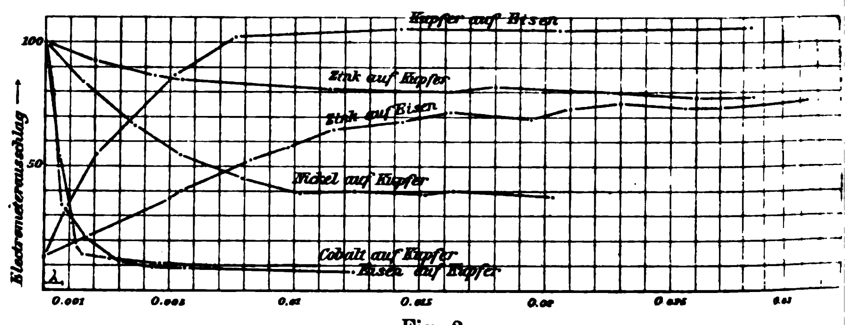



Fig. 2.

der electrodynamischen Erscheinung — so weit wie wir sie mittels des Electrometers verfolgen können — keine Bedeutung mehr, ob wir die Oberflächenschicht noch dicker machen. Der Einfluss des darunterliegenden Metalles ist dann ein für allemal vollständig eliminirt.

Ueber die Grenzwerthe, welche die Electrometerausschläge dabei erreichen, sei noch Folgendes bemerkt. Es ergab

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ein käuflicher Kupferdraht | 100 | Verkupferter Eisendraht | 106 |
| „ „ Nickeldrahht | 27,5 | Vernickelter Kupferdraht | 38 |
| „ „ Eisendraht | 13,4 | Eisenüberzogener Kupferdraht | 7.8 |

Aus Kobalt und Zink hatte ich keinen Draht zum Vergleich. Es mögen so grosse Unterschiede überraschen. Zu bemerken ist indessen, dass die electrolytischen Niederschläge einerseits völlig rein, andererseits völlig weich und unbearbeitet sind, was bekanntlich beides physikalische Eigenschaften der Metalle, wie Widerstand und Magnetismus, stark beeinflusst.

**Das Extinctionsvermögen der Metalle als Function von Widerstand und Magnetismus.**

11. Wenn man die Gleichung aufstellt, welche den Electrometerausschlag als Function der Dicke der Oberflächenschicht gibt, kann man direct aus den Curven die „Extinctionscoefficienten“ des Metalls für electrische Wellen bestimmen. In dieser Weise wäre eine quantitative Prüfung der Maxwell'schen Theorie möglich, und ich hoffe bei einer späteren Gelegenheit diese Aufgabe aufzunehmen. Vorläufig beschränken wir uns darauf, aus den Versuchen die qualitativen Gesetze für das Auslöschen der Wellen abzuleiten, und dieselben mit der Theorie zu vergleichen.

Die Neigung der Curven in Fig. 2 hängt einerseits ab vom Extinctionsvermögen des Metalles, das die Oberflächenschicht bildet, andererseits aber auch von dem zufällig

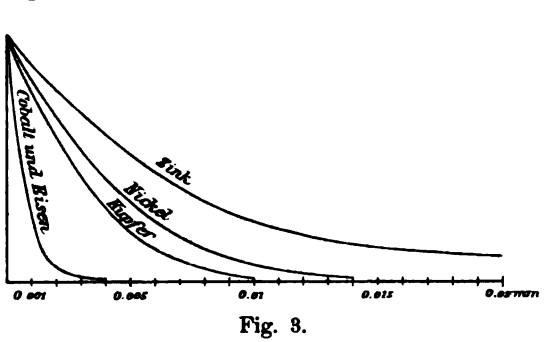



Fig. 3.

vorliegenden Unterschied zwischen diesem Metall und dem darunterliegenden. Durch eine einfache Umformung können wir diesen zufälligen Unterschied entfernen. Ziehen wir die Asymptoten sämmtlicher Curven, etwa die Geraden $y = 7,8$ für die Eisen-, $y = 9,8$ für die Cobalt-, $y = 38$ für die Nickelcurve, $y = 77$ für die zwei Zinkcurven und $y = 100$ für die Kupfercurve. Die Ordinatensegmente zwischen jeder Curve und ihrer Asymptote reduciren wir auf eine gemeinschaftliche Höhe für $x = 0$, und tragen sie als Ordinaten einer neuen Curve auf. Dadurch entsteht die Fig. 3, wo die Curven übrigens nicht durch Sehnen, sondern abgerundet gezeichnet sind. Die zwei Zinkcurven sind dabei durch eine einzige ersetzt, da die Abweichungen derselben nach der Transformation nicht wesentlich grösser sind als die Unregelmässigkeiten jeder einzelnen. Weiter

ist für Eisen und Cobalt nur eine Curve gezeichnet, da beide einander fast vollständig decken würden.

Die so transformirten Curven haben somit folgende Eigenschaft: je schneller die Ordinaten abnehmen, desto grösser ist das Extinctionsvermögen des Metalles der Oberflächenschicht.

12. Vergleichen wir erst die Curven für die zwei unmagnetischen Metalle, Kupfer und Zink, untereinander. Die Neigung der Kupfercurve ist bedeutend grösser als die Neigung der Zinkcurve. Die Wellen löschen also im gutleitenden Kupfer schneller als im schlechter leitenden Zink aus. Für diese zwei Metalle gilt der folgende Satz:

*Das Extinctionsvermögen der Metalle für electrische Wellen nimmt mit dem Leitungsvermögen zu.*

Natürlich wäre es sehr wünschenswerth die Untersuchung auf eine grössere Anzahl von Metallen auszudehnen. Jedenfalls stimmt aber das Resultat mit dem allgemeinen Ergebnisse der Maxwell'schen Theorie überein.

13. Die Curven der magnetischen Metalle zeichnen sich alle durch starke Neigungen aus. Diese Metalle besitzen also ein starkes Vermögen electrische Wellen auszulöschen. Da sie sämmtlich schlechter leiten als das Zink, kann man die Ursache nicht in der Leitungsfähigkeit suchen. Ebenso wenig lässt sich der grosse Unterschied der Nickelcurve von der Eisen- und Cobaltcurve auf Unterschiede der Leitungsfähigkeit zurückführen. Ordnen wir dagegen die Metalle nach steigendem Magnetismus, so ergibt sich sofort folgender Satz:

*Das Extinctionsvermögen der Metalle für electrische Wellen nimmt mit dem Magnetismus zu.*

Es stimmt dieses Resultat wiederum mit der Maxwell'schen Theorie überein.

**Das Eindringen electrischer Wellen als Function der Schwingungsdauer.**

14. Unsere Versuche beziehen sich nur auf Wellen von einer einzigen Schwingungsdauer. Ziehen wir aber die Resultate von zwei anderen Versuchsgebieten hinzu, so sind Schlüsse über das Eindringen der Wellen als Function der Schwingungsdauer möglich.

Erstens kennen wir ganz langsame electrische Schwingungen. Nicht zu schnelle Wechselströme folgen bekanntlich, ebenso wie die stationären Ströme, dem Ohm'schen Gesetze. Es muss hiernach der Strom über den ganzen Querschnitt des Drahtes gleichmässig vertheilt sein. In diesem Falle dringt also die electromagnetische Energie vom Dielectricum bis zur Axe des Drahtes ein.

Zweitens zeigen unsere Versuche das Verhalten der Hertz'schen Wellen, wo die Schwingungsdauern nach Hundertmilliontelsecunden zu rechnen sind. Unsere Curven zeigen, dass dabei das Zink bis zu Tiefen von einigen Hundertstel Millimeter, das Eisen und Cobalt bis zu Tiefen von einigen Tausendstel Millimeter an dem Vorgang Theil nehmen.

Endlich haben wir in den Lichtschwingungen electrische Wellen, die noch einige Millionenmal schneller verlaufen. Messungen von dem Eindringen und Auslöschen des Lichtes in Metallen verdanken wir Wernicke, Willy Wien und Rathenau.[1]) Nach diesen Untersuchungen ist die Intensität des Lichtes auf ein Paar Procente des Anfangswerthes reducirt, sobald es $^1/_{10000}$ mm in ein Metall eingedrungen ist, und in einer Tiefe von $^1/_{1000}$ mm kann man es als vollständig ausgelöscht ansehen.

Stellen wir somit unsere Erfahrungen von diesen drei weit voneinander entfernten Gebieten nebeneinander, so ersehen wir, dass:

*Je schneller die electrischen Wellen schwingen, desto weniger vermögen sie in die Metalle einzudringen.*

Es stimmt dieses Resultat wiederum mit der Maxwell'schen Theorie überein.

### Das optische Extinctionsvermögen und die electromagnetische Lichttheorie.

15. Das Eindringen der electrischen Wellen in die Metalle verläuft also in den grossen Zügen nach der Maxwell'schen Theorie, so weit wir die Untersuchungen bis jetzt ausgedehnt haben. Bei den Hertz'schen Wellen bestätigten sich die er-

1) Wernicke, Pogg. Ann. Ergänzbd. 8. p. 65. 1876; Willy Wien, Wied. Ann. 35. p. 48. 1888; Rathenau, Inauguraldissertation. Berlin 1889.

warteten qualitativen Gesetze, und selbst ein Vergleich der Hertz'schen Wellen mit den Lichtwellen ergab das erwartete Resultat.

Versucht man aber die somit verificirten Gesetze auf die Lichtschwingungen anzuwenden, so begegnet man Widerspruch auf Widerspruch.

Einen Widerspruch quantitativer Art hat schon Maxwell (l. c.) bemerkt. Er fand ein Goldblatt viel durchsichtiger, als es mit seiner Theorie vereinbar wäre, wenn wir nicht voraussetzen, fügt er hinzu, dass weniger Energie verloren geht, wenn die electromotorische Kraft während jeder Halbschwingung des Lichtes umgekehrt wird, als wenn sie für unmerkbare Zeiten fortwirkt, wie in unseren gewöhnlichen Experimenten.

Hr. Willy Wien (l. c.) fand ebenso die Metalle viel zu durchsichtig, und selbst in den qualitativen Gesetzen zeigten sich Widersprüche, denn eine Untersuchung des Eisens ergab nicht die erwartete Beziehung zwischen Durchsichtigkeit und Magnetismus.

16. Versuchen wir ganz allgemein die Gesetze, welche wir oben für electrische Wellen verificirt haben, auf die optischen Erscheinungen anzuwenden.

Die Wellen sollen umso weniger tief eindringen, je kürzer die Schwingungsdauer ist. Liessen die Metalle mehr vom rothen Lichte als von den höheren Spectralfarben durch, so müssten sie alle in der Durchsicht röthlich erscheinen. Es findet dies bekanntlich nicht statt. Hr. Rathenau (l. c.) gibt die folgenden Farben seiner Metallschichten an: Gold bläulich grün, Silber tief blau, Platina grau, Eisen braun und Nickel graubraun. Die experimentell bestimmten Extinctionscoefficienten dieser Metallschichten bezeugen eine stark zunehmende Durchsichtigkeit von Roth bis Blau bei Gold, eine schwache Zunahme in gleichem Sinne bei den übrigen Metallen, ausser bei Nickel, dessen Durchsichtigkeit sich mit der Wellenlänge nicht verändert.

Mit zunehmender Leitungsfähigkeit sollten die unmagnetischen Metalle immer undurchsichtiger erscheinen. Auch dieses Gesetz sucht man vergebens durch Vergleich der Extinctionscoefficienten zu verificiren. So findet Hr. Rathenau das gutleitende Silber für fast alle Spectralfarben durch-

sichtiger als das schlechter leitende Platina; das Gold zeigt sich für violette Strahlen mehr, für rothe weniger durchsichtig als das Silber.

Ebenso wenig bestätigt sich die erwartete Zunahme der Undurchsichtigkeit mit steigendem Magnetismus. Das Eisen ist für die meisten Spectralfarben mehr durchsichtig als das Platin, das schwach magnetische Nickel erscheint für alle Strahlen undurchsichtiger als das stark magnetische Eisen.

Die Gesetze, welche sich für die Hertz'schen Schwingungen bestätigten, haben also für die Lichtwellen keine Gültigkeit mehr. Die Metalle treten überhaupt in der Optik mit individuellen Eigenthümlichkeiten auf, die keine Beziehung zu sonst bekannten physikalischen Eigenschaften zu haben scheinen.

17. Zur Erklärung der grossen Durchsichtigkeit des Goldes deutet Maxwell wie erwähnt an, dass man eine der electrodynamischen Grundgleichungen verallgemeinern könnte. Man könnte z. B. in das Ohm'sche oder Joule'sche Gesetz die Zeit in solcher Weise einführen, dass kurz dauernde electromotorische Kräfte relativ kleineren Energieverlust veranlassen als die lang andauernde; eine Relation, die an sich vielleicht nicht unwahrscheinlich wäre, und die offenbar eine grössere allgemeine Durchsichtigkeit der Metalle ergeben würde. Sie würde aber nicht erklären können, warum das Gold durchsichtiger ist für violette Strahlen als für rothe, und noch weniger, warum die Metalle überhaupt in dieser Beziehung nicht einer gemeinschaftlichen Regel, sondern individuell verschiedenen Regeln folgen.

18. Die Widersprüche sind zu zahlreich und verschiedenartig, um ausschliesslich durch die Unvollkommenheiten unseres Systems von electrodynamischen Grundgleichungen erklärt zu werden. Hervorzuheben ist aber, dass diejenigen Sätze, die wir für Hertz'sche Wellen bestätigt und für Lichtwellen nicht bestätigt gefunden haben, *nur für homogene Körper abgeleitet sind.* Zur Wiederherstellung der Uebereinstimmung steht somit noch ein Weg offen: die moleculare Structur der Körper zu berücksichtigen. Diesen Weg hat Hr. Ebert[1]) in einer soeben erschienenen schönen Arbeit eingeschlagen.

1) H. Ebert, Wied. Ann. 48. p. 1. 1893.

Setzen wir diese Erklärung im Principe als richtig voraus, so lassen unsere Versuche schliessen, dass die Molecüle den Hertz'schen Wellen gegenüber noch in grossen Massen reagiren; der Verlauf der Erscheinung ist dann durch Eigenschaften wie Leitungsfähigkeit und Magnetismus bestimmt, Eigenschaften, die wir bis jetzt nur für Körper und nicht für einzelne Molecüle definiren können.

Die optischen Erscheinungen lassen dagegen schliessen, dass die Molecüle durch die Lichtwellen individuell bewegt werden. Bei der Reaction der Metalle gegenüber solchen Wellen greifen somit die uns unbekannten Moleculareigenschaften ein, und der Einfluss der Körpereigenschaften, wie Leitungsfähigkeit und Magnetismus, wird überdeckt oder besteht vielleicht nicht mehr.

Zwischen den Hertz'schen und den Lichtschwingungen muss ein Uebergang stattfinden, wo die Molecüle aufhören in Massen zu wirken und anfangen sich individuell geltend zu machen. Die Verfolgung der Hertz'schen Erscheinungen für steigende und der optischen für abnehmende Schwingungszahlen muss deshalb von grösster Wichtigkeit für das Studium der molecularen Verhältnisse sein.

### Das Mitfolgen des Magnetismus bei schnellen Schwingungen.

20. Besonderes Interesse für moleculare Fragen sowie für die Theorie des Magnetismus hat das jetzt nachgewiesene Mitfolgen des Magnetismus bei schnellen electrischen Schwingungen.[1] Nach der Hypothese von den präexistirenden drehbaren Molecularmagneten muss die Ummagnetisirung von einer Bewegung träger Massen begleitet sein. Irgend eine solche Bewegung träger Massen wird wahrscheinlich jede mechanische Erklärung dieses Vorganges voraussetzen müssen.

Der Magnetismus wird dann bei unbegrenzt schnellen Schwingungen nicht mitfolgen können. Denn dies würde un-

1) Vgl. die Versuche von J. J. Thomson, Phil. Mag. **32.** p. 456. 1891; J. Trowbridge, Phil. Mag. **32.** p. 504. 1891; J. Klemenčič, Wien. Ber. 24. März 1892; K. Birkeland, Skandinaviske Naturforskeres Forhandlingen i Kjobenhavn, Juli 1892. p. 374; V. Bjerknes, ibid. p. 373. Wied. Ann. **47.** p. 69. 1892; v. Geitler, Inaug.-Diss. p. 8. 1893. A. Perot, Compt. rend. **115.** p. 1284. 1892.

endlich grosse Accelerationen und folglich unendlich kleine Trägheit der kleinsten Magnete voraussetzen. Der Nachweis einer Abnahme und allmähliches Aufhören des Mitfolgens bei steigenden Schwingungszahlen, muss deshalb einen Schluss über die Trägheitsverhältnisse der Molecüle gestatten.

Die optischen Erscheinungen scheinen vom Magnetismus unabhängig zu sein. Die Grenze für das Mitfolgen liegt dann wahrscheinlich zwischen den Hertz'schen Schwingungen und den Lichtschwingungen.

## III. *Ueber die Vorgänge an der Uebergangsstelle eines electrischen Stromes zwischen verschieden concentrirten Lösungen; von Georg H. Zahn.*

(Aus der Strassburger Dissertation.)

---

### Einleitung.

Ueber die Mitwirkung des Wassers bei der Electrolyse liegen bis jetzt nur kurze Bemerkungen vor, die auf zwei verschiedene Wege zur Untersuchung dieser Frage hinweisen. Der eine beruht auf Berechnungen von Arrhenius[1]), die jedoch zu experimentell kaum ausführbaren Bestimmungen führen; der andere auf der von Faraday[2]) an Magnesiumsulfat, von Gmelin[3]) später an Calciumnitrat beobachteten Erscheinung, dass ein electrischer Strom, der von einer Lösung in „Wasser" übergeht, in der Grenzfläche eine Ausscheidung des Kations als Hydrat bewirkt.

Solange man früher annahm, dass Wasser Leitfähigkeit besitzt und durch einen Strom direct zersetzt wird, war die Erklärung dieser Erscheinung in der einfachsten Weise gegeben, indem nämlich das zur Kathode wandernde Metall der Lösung sich mit dem entgegenkommenden Sauerstoff unter Mitwirkung von Wasser zu dem Hydroxyde vereinigte. Diese Erklärung wurde hinfällig, als man erkannte, dass die Wasserzersetzung ein secundärer Process ist.[4])

Hr. F. Kohlrausch[5]) kam in einer seiner Arbeiten auf jene Versuche zurück. Versuche mit Lösungen von Magnesium- und Kupfersulfat in sehr reinem Wasser, aus denen der Strom anstatt in „Wasser" in eine verdünnte Lösung desselben Salzes ging, lieferten die Bestätigung der früheren Beobachtungen. Diese führen dann zu der Ansicht, dass die Ausscheidung

---

1) Arrhenius, Zeitschr. f. phys. Chem. **5.** p. 20. 1890.

2) Faraday, Exp. Res. **5.** § 494. 1833.

3) Gmelin, Pogg. Ann. **44.** p. 21. 1838.

4) Hittorf, Pogg. Ann. **89.** p. 208. 1853.

5) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **26.** p. 208 u. f. 1885.

durch die Mitwirkung des Wassers bei der Electrolyse zu erklären sei.

Da später nichts Näheres über das Verhalten zweier übereinandergeschichteter Lösungen beim Durchgang eines Stromes veröffentlicht ist, stellte ich auf Veranlassung von Hrn. Prof. Kohlrausch die vorliegende Untersuchung über den betreffenden Gegenstand an.[1])

**Versuchsanordnung.**

Von einer kleinen Chromsäure-Tauchbatterie, welche 1 — 40 Elemente einzuschalten gestattete, ging der Strom zwischen Platinelectroden durch die in einer U-förmig gebogenen Glasröhre von 12 mm innerem Durchmesser übereinandergeschichteten Lösungen von verschiedener Concentration. Ein in den Stromkreis eingeschaltetes Federgalvanometer zeigte die jeweilige Stromstärke in Milliampère — MA — an.

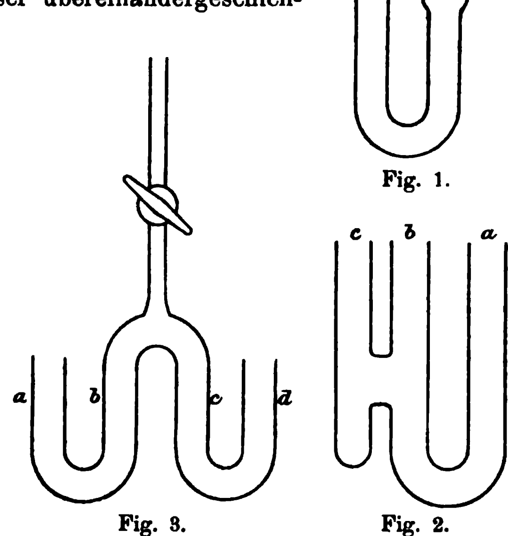


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

Schon bei den ersten Versuchen mit Magnesium- und Kupfersulfat stellte sich heraus, dass das an der Kathode gebildete Hydroxyd infolge seines grösseren Gewichtes auf die Grenze herabfiel und so die Ausscheidung an derselben stören oder auch in Zweifel stellen konnte. Um dies zu vermeiden, wurden verschiedene Formen von Röhren in Anwendung gebracht, die in Fig. 1, 2 und 3 in $^1/_3$ natürlicher Grösse abgebildet sind.

1) *Nachträgl. Anm.* Die Arbeit von Hrn. Kümmell (Wied. Ann. **46**. p. 105) erschien nach dem Abschlusse meiner Untersuchung.

Am zweckmässigsten und einfachsten war zur Feststellung einer sichtbaren Ausscheidung über der Grenze Röhre 1 wegen ihrer leichten Füllung und wegen des geringen Widerstandes der verdünnten Lösung. Nachdem die Röhre zum Theil mit concentrirter Lösung gefüllt war, wurde vermittels zweier Pipetten, deren Ausfluss regulirt werden konnte, die verdünnte Lösung vorsichtig aufgeschichtet und dann unter Vermeidung jeder Erschütterung der Grenze eine Anzahl vorher mehrmals ausgekochter runder Scheiben von Filtrirpapier in den breiteren Kathodenschenkel eingeführt und auf dem Vorsprung festgedrückt. Auf diese Weise war ein Herabsinken fester Hydrattheilchen von der Kathode auf die Grenze verhindert.

Bei Röhre 2 befand sich in dem Schenkel *a* die concentrirte Lösung, in *b* unter dem Verbindungsstück zwischen *b* und *c* die Grenze und in *c* die Kathode. Bei dieser Anordnung sank das Hydrat der Kathode in den Ansatz von *c*.

Bei späteren Versuchen gelangte hauptsächlich Röhre 3 zur Verwendung; die Grenze befand sich entweder bei *b* oder bei *c*. Von *a* bis *b* wurde concentrirte, von *c* bis *d* verdünnte Lösung eingefüllt, dann die Oeffnung bei *a* und *d* verschlossen und vermittels einer Capillare verdünnte Lösung bis über den Hahn aufgeschichtet. Nach Verschluss desselben wurden die Korke bei *a* und *d* entfernt und die Electroden eingesenkt.

## Versuche.

A. Zunächst war das Auftreten einer sichtbaren Ausscheidung in der Grenze noch für eine grössere Anzahl von Salzen festzustellen, und zwar wurden zu diesem Zwecke untersucht Lösungen von: $CaN_2O_6$, $BaN_2O_6$, $ZnN_2O_6$, $CuN_2O_6$, $SrN_2O_6$, $MgSO_4$, $MnSO_4$, $FeSO_4$, $ZnSO_4$, $CuSO_4$, $AlK(SO_4)_2$, $MgCl_2$, $SrCl_2$, $AgNO_3$.

Die zu den Lösungen erforderlichen Salze wurden vorher umkrystallisirt, nöthigenfalls neutralisirt und wieder krystallisirt, und in reinem Wasser, dessen Leitfähigkeit bei den verdünnten Lösungen etwa 1 bis $2 \cdot 10^{-10}$ betrug, gelöst. Die eine Lösung war eine bei gewöhnlicher Temperatur concentrirte.

Alle Versuche wurden — unter Anwendung von 20 Chromsäureelementen, also nahe 40 Volt — mehrere Male wiederholt und lieferten immer dasselbe Resultat.

Dieselbe Base und Säure in der concentrirten und verdünnten Lösung.

$CaN_2O_6$ conc. und 0,001 conc.

Stromschluss: $i = 9,8$ MA; nach 12 Min.: $i = 9,4$ MA; nach 15 Min.: $i = 9,5$ MA, 1 mm über der Grenzfläche feste weisse Ausscheidung; nach 20 Min.: $i = 10,9$ MA, Ausscheidung 1.5—2.0 mm hoch.

$BaN_2O_6$ conc. und 0,001 conc.

Stromschluss: $i = 3,3$ MA; nach 2 Min.: $i = 3,1$ MA; nach 5 Min.: $i = 3,5$ MA, sehr feine Ausscheidung 1,5 mm über der Grenze; nach 12 Min.: $i = 5,5$ MA; Höhe der Ausscheidung 3 mm.

$ZnN_2O_6$ conc. und 0,001 conc.

Stromschluss: $i = 12,0$ MA; nach 10 Min.: $i = 7,0$ MA, bei schwachem Anstossen der Röhre schieden sich wenige weisse Flocken über der Grenze aus; nach 12 Min.: $i = 5,0$ MA.

$CuN_2O_6$ conc. und 0,001 conc.

Stromschluss: $i = 12,0$ MA; nach 11 Min.: $i = 2,0$ MA, die an der Kathode gebildeten Dendriten wuchsen durch die Papierscheibe; bei vorsichtigem Anstossen der Röhre fiel ein Ast herab, und es trat sofort über der Grenze eine flockige Ausscheidung von blaugrüner Farbe ein.

$MgSO_4$ conc. und 0,0003 conc.

Stromschluss: $i = 3,0$ MA; nach 8 Min.: $i = 2,2$ MA, weisse Ausscheidung 1 mm über der Grenze; nach 16 Min.: $i = 1,8$ MA,

$MnSO_4$ conc. und 0,002 conc.

Stromschluss: $i = 9,0$ MA; nach 9 Min.: $i = 4,0$ MA, braune flockige Ausscheidung über der Grenze.

$ZnSO_4$ conc. und 0,001 conc.

Stromschluss: $i = 5,7$ MA; nach 8 Min.: $i = 1,5$ MA, flockige Ausscheidung wie bei $ZnN_2O_6$; nach 44 Min.: $i = 0,3$ MA.

$CuSO_4$ conc. und 0,001 conc.

Stromschluss: $i = 3,3$ MA; nach 15 Min.: $i = 2,2$ MA, flockige Ausscheidung über der Grenze; nach 120 Min.; $i = 0,1$ MA, eine Ausscheidung 1 mm über der Grenze; eine zweite 5 mm

höher, zusammenhängend und 2 mm hoch; darüber war bis zu den Papierscheiben die Lösung vollständig klar.

$FeSO_4$ conc. und 0,002 conc.

Stromschluss: $i = 6{,}0$ MA: nach 9 Min.: $i = 3{,}0$ MA, feine Ausscheidung, die sich beim Anstossen der Röhre zu braunen Flecken vereinigte; nach 15 Min.: $i = 1{,}0$ MA.

Kali-Alaun conc. und 0,002 conc.

Stromschluss: $i = 5{,}5$ MA; nach 10 Min.: $i = 7{,}0$ MA. Während an der Kathode sich eine gallertartige Masse abschied, bildete sich 1,5 mm über der Grenze eine pergamentpapierähnliche zusammenhängende Ausscheidung von weisser Farbe. Bei grösserer Dicke (1 mm) wurde die Farbe schmutzig weiss. Als auf der einen Seite der Röhre die Ausscheidung durch die Grenze sank, bildete sich sogleich 2 mm über derselben eine neue.

$MgCl_2$ conc. und 0,001 conc.

Stromschluss: $i = 12{,}5$ MA; nach 7 Min.: $i = 10{,}5$ MA. Ausscheidung; nach 15 Min.: $i = 5{,}6$ MA. Ausscheidung jetzt 4 mm hoch; 1 mm über der Grenze; Form und Aussehen wie bei $MgSO_4$.

$AgNO_3$ conc. und 0,002 conc. Ohne Papierscheibe.

Stromschluss: $i = 9{,}0$ MA; nach 15 Min.: $i = 3{,}0$ MA.

Kurze Zeit nach Stromschluss starke Bildung von Dendriten, die von der Kathode herabfielen, ohne eine Aenderung über der Grenze zu bewirken. Strom steigend von 9 bis 15 MA. dann fallend.

### Base oder Säure der verdünnten Lösung verschieden von derjenigen der concentrirten.

Schichtet man über die concentrirte Lösung eines Salzes die verdünnte eines anderen, so muss sich das Kation der concentrirten Lösung beim Durchgange eines Stromes über der Grenze ausscheiden, was bei charakteristischer Form oder Farbe des Niederschlages leicht zu erkennen ist. Zugleich zeigt sich hierbei, dass die Ausscheidung über der Grenzfläche nicht von der Electrode herrühren kann.

$CaN_2O_6$ conc. und $CuN_2O_6$ 0,001 conc.

Stromschluss: $i = 15{,}0$ MA; nach 6 Min.: $i = 12{,}5$ MA, 1,5 mm über der Grenze Ausscheidung von weisser Farbe und Form wie früher bei $CaN_2O_6$ beobachtet; nach 22 Min.: $i = 17{,}0$ MA.

$CuN_2O_6$ conc. und $BaN_2O_6$ 0,001 conc.

Stromschluss: $i = 4{,}5$ MA; nach 12 Min.: $i = 1{,}5$ MA, über der Grenze blaue flockige Ausscheidung; nach 20 Min.: $i = 2{,}0$ MA.

$BaN_2O_6$ conc. und $ZnN_2O_6$ 0,001 conc.

Stromschluss: $i = 4{,}0$ MA; nach 4 Min.: $i = 6{,}0$ MA, 1 mm über der Grenze weisse Ausscheidung wie früher bei $BaN_2O_6$.

$MnSO_4$ conc. und $CaN_2O_6$ 0,001 conc.

Stromschluss: $i = 10{,}0$ MA; nach 3 Min.: $i = 9{,}0$ MA, braune flockige Ausscheidung über der Grenze; nach 13 Min.: $i = 1{,}5$ MA.

$FeSO_4$ conc. und $CaN_2O_6$ 0,001 conc.

Stromschluss: $i = 9{,}0$ MA; nach 3 Min.: $i = 8{,}0$ MA, 1 mm über der Grenze Ausscheidung von grauer Farbe, die sich zu Flocken vereinigte, sich schmutziggrün und dann braun färbte; diese Farbenänderung entspricht der von $Fe(HO)_2$ bei Fällung aus dem Oxydulsalz mit Kali- oder Natriumlauge; nach 15 Min.: $i = 2{,}0$ MA.

$MgCl_2$ conc. und $BaN_2O_6$ 0,001 conc.

Stromschluss: $i = 6{,}0$ MA; nach 3 Min.: $i = 7{,}8$ MA, weisse Ausscheidung 1 mm über der Grenze; Aussehen wie bei $MgSO_4$; nach 10 Min.: $i = 6{,}5$ MA.

Mit Lackmus oder Dimethylorange gefärbte Lösungen.

Die Metalle: Ca, Ba, Sr, Mg, Al, Fe, Mn, Zn und Cu ergaben in Verbindung mit verschiedenen Säuren eine sichtbare Ausscheidung über der Grenze der übereinandergeschichteten Lösungen, sobald ein electrischer Strom einige Zeit hindurchgegangen war; dagegen liess sich für Ag (und Hg) diese Erscheinung nicht feststellen.

Da auch einwerthige Metalle K, Na, bei welchen keine feste Ausscheidung zu erwarten war, untersucht werden sollten,

so war zum Nachweis einer alkalischen Reaction ein Reagens anzuwenden, das eine etwa eintretende Aenderung der Lösung möglichst rasch und scharf anzeigte.

Ein mit salpetersaurem Kalium angestellter Versuch, wobei die verdünnte Lösung mit Lackmus roth gefärbt war, ergab folgendes Resultat:

Zwei Minuten nach Stromschluss ($i = 10,0$ MA) zeigte sich 2 mm über der Grenze eine concentrirte rothe Lackmusschicht von 1,5 mm Höhe. Dann färbte sich von der Kathode her die Lösung allmählich durch die Schicht bis zur Grenze blau. Wiederholte Versuche ergaben dasselbe.

Die Richtung der Farbenänderung entsprach den von Gmelin und Davy gemachten Beobachtungen.

Merkwürdig war die Farbenconcentration über der Grenzfläche beider Lösungen. Möglicherweise hätte sie von festen Lackmustheilchen herrühren können, die sich über der Grenze abgesetzt hatten, vielleicht im Zusammenhang mit den Verunreinigungen des Lackmus.

Es wurde deshalb auch das Verhalten von Dimethylorange als Reagens untersucht und zwar zuerst in Lösungen, für welche eine feste Ausscheidung über der Grenze durch die früheren Versuche bereits festgestellt war. Zum Nachweis einer basischen Reaction war es nöthig, das in erster Linie zur Erkennung von Säuren dienende Dimethylorange umzufärben; dies geschah mit der Säure, welche in der betreffenden Lösung vorhanden war. Seiner Anwendung als Reagens stellte sie insofern kein Bedenken entgegen, als es den Widerstand der verdünnten Lösung kaum beeinflusste, indem die zugesetzte geringe Menge die Leitfähigkeit des reinen Wassers etwa verdoppelte, was gegen das Leitungsvermögen der verdünnten Lösung nicht in Betracht kam.

$MgSO_4$ conc. und 0,001 conc.

Die verdünnte Lösung war roth gefärbt. Stromschluss: $i = 9,0$ MA.

Sofort nach Stromschluss trat 1 mm über der Grenze Gelbfärbung ein; nach 2 Min. war die Farbenänderung 20 mm in die Höhe gegangen, während sich zugleich 1 mm über der Grenze eine 2 bis 3 mm hohe intensiv gelbe Farbschicht bil-

dete, in der später eine feste Ausscheidung erfolgte. Nach 27 Min.: $i = 3,5$ MA.

$BaN_2O_6$ conc. und 0,001 conc.

Concentrirte Lösung gelb, verdünnte roth gefärbt. Stromschluss: $i = 6,0$ MA.

Nachdem wenige Secunden nach Stromschluss Gelbfärbung über der Grenze eingetreten war, bildete sich nach 2 Min. 1 mm über der Grenzfläche beider Lösungen eine intensiv gelbe Schicht von 2 mm Höhe, in der auch später die feste Ausscheidung erfolgte. Nach 20 Min. ($i = 7,5$ MA) war die Lösung über dem Niederschlage 15 mm hoch entfärbt.

$AgNO_3$ conc. und 0,002 conc.

Stromschluss: $i = 13,0$ MA. $^1/_2$ Min. nach Stromschluss trat über der Grenze sehr schwache Gelbfärbung ein, die in 80 Min. 2 mm in die Höhe ging. Zugleich bildete sich 1 mm über der Grenzfläche eine 1 mm hohe schwach verdichtete gelbe Farbschicht, unter der die frühere rothe Farbe noch blieb. Nach 25 Min. ($i = 18;0$ MA) war diese rothe Farbe nur noch schwach, während die darüber befindliche Schicht braungelb geworden war.

Es trat also auch hier wie bei dem früher angegebenen Versuche keine sichtbare Ausscheidung ein, dagegen zeigte sich eine langsame Gelbfärbung der Lösung über der Grenze, ein Beweis, dass sich an der Grenze Silberoxyd bildet, das bekanntlich ein wenig löslich ist und alkalisch reagirt.

Weitere Versuche, welche mit Lösungen von $MgCl_2$, $CaN_2O_6$, $SrN_2O_6$, $ZnN_2O_6$ angestellt wurden, ergaben alle dasselbe Resultat, nämlich ein rasches Basischwerden über der Grenze, das sich allmählich in der verdünnten Lösung nach der Kathode hin verbreitete, von welcher gleichzeitig eine alkalische Reaction langsam nach unten ging. Was die über der Grenze in der gelben Farbschicht später auftretenden festen Ausscheidungen betrifft, so zeigte sich auch bei diesen Versuchen, dass unter denselben Bedingungen die ausgeschiedene Menge bei den Magnesium- und Calciumsalzen bedeutend grösser war, wie die von Baryum und Strontium erhaltene.

Die in jedem Falle auftretende intensiver gefärbte Farbschicht dicht über der Grenze würde sich durch die Annahme erklären lassen, dass auch der Farbstoff eine von der Concentration abhängige Verschiebung durch den Strom erfährt. An der Kathode zeigt sich übrigens eine ähnliche Verdichtung der Farbe.

### Mit Dimethylorange gefärbte Salzlösungen von Kalium und Natrium.

Die rasche Farbenänderung liess das Dimethylorange zum Nachweis einer etwa eintretenden Reaction bei K und Na geeignet erscheinen. Zur Untersuchung dieser Salze war jedoch die früher gebrauchte Röhre 1 nicht verwendbar. War nämlich zwischen Kathode und Grenze keine Papierscheibe eingeschoben, so sank das an der Electrode gebildete Hydrat herab und breitete sich über der concentrirten Lösung aus. Dies zeigte sich, wenn ein wenig Zink- oder Kupfersulfat über die Grenze gebracht wurde, in einer dichten Ausscheidung von Zink- oder Kupferhydroxyd. Falls eine Papierscheibe vorhanden war, breitete sich das Hydroxyd der Kathode über dieser oder konnte auch spurenweise durch das Papier zur Grenze dringen. Es fand dann eine starke Hydratbildung von eingeführtem Zink- oder Kupferhydroxyd über der Scheibe statt, während die über der Grenze abgeschiedene Menge sehr gering war.

Das Herabsinken des an der Kathode auftretenden Hydrates auf die Grenze wurde durch Anwendung von Röhre 2 oder 3 vermieden.

#### $Na_2SO_4$ conc. und 0,002 conc.

$^1/_2$ Minute nach Stromschluss ($i = 5,5$ MA) trat 1,5 mm über der Grenze Gelbfärbung ein, die sich in 2 Min. 6 mm in die Höhe verbreitete. Nach 4 Min. bildete sich dicht über der Grenze eine intensiv gelbe Schicht, auf die eine 6 mm hohe schwächere gelbe Färbung folgte, während darüber noch die frühere rothe Farbe war. Nach 6 Min. wurde die Schicht dunkelgelb und blieb so bis zum Ende nach 15 Min. ($i = 3,0$ MA).

$(NH_4)_2SO_4$ conc und 0,002 conc.

Während sich die Lösung an der Kathode sofort nach Stromschluss gelb färbte ($i = 11{,}0$ MA) trat erst 2 Min. später eine scharfe Farbenänderung über der Grenze ein, und zwar befand sich zwischen Grenze und Umfärbung noch in der Höhe von 2 mm die frühere rothe Farbe, welche jedoch allmählich verschwand. Nach 12 Min. bildete sich eine intensiver gelbe Schicht, die nach oben in eine schwachgelbe Farbe verlief ($i = 5{,}0$ MA).

K Cl conc. und 0,009 conc.

$^1/_2$ Minute nach Stromschluss ($i = 6{,}0$ MA) trat über der Grenze eine 2 mm hohe Gelbfärbung ein, während die Farbe darunter bis zur concentrirten Lösung (1,5 mm) noch schwach roth war. Nach 3 Min. gelbe Farbe 5 mm hoch ($i = 6{,}0$ MA). Nach 6 Min. zeigte sich über der Grenze eine intensiver gelbe Schicht, die in 15 Min. 2 mm hoch wurde, und auf welche eine 25 mm hohe schwächere gelbe Farbe folgte. Nach 30 Min. — $i = 6{,}2$ MA — war die gelbe Schicht 3 mm hoch. Die Stromstärke stieg in 60 Min. bis auf 8,0 MA.

$NaNO_3$ conc. und 0,002 conc.

2 Min. nach Stromschluss ($i = 4{,}7$ MA) färbte sich die Lösung 1,5 mm über der Grenze über einer noch rothen Färbung in gelb um, das in 8 Minuten 7 mm hoch war. Nach 20 Min. war die schwach rothe Farbe bis 1,5 mm über der Grenze noch vorhanden, darüber hatte sich aber eine 3 mm hohe dunkelgelbe Farbschicht gebildet, die nach oben zuerst in gelb dann in roth überging. Nach 40 Min. war die röthliche Farbe dicht über der concentrirten Lösung ebenfalls gelb geworden; darüber befand sich eine gelbbraune Farbschicht, welche nach oben in helleres Gelb verlief.

$KNO_3$ conc. und 0,0002 conc.; 30 Elemente.

Wenige Secunden nach Stromschluss ($i = 5{,}6$ MA) färbte sich 1 mm über der Grenze die rothe Lösung gelb, welche Färbung nach 2 Minuten 8 mm in die Höhe gegangen war. Zugleich bildete sich über der noch dicht über der concentrirten Lösung befindlichen rothen Farbe eine verdichtete gelbe Schicht. Nach vier Minuten trat an der Kathode erst deut-

liche Gelbfärbung ein, während sich die alkalische Reaction über der Grenze rasch verbreitete. Nach 10 Min. war die gelbe Schicht 2 mm hoch und dunkelgelb geworden, unter allmählichem Verschwinden der noch darunter befindlichen schwach rothen Färbung.

### Einfluss der Concentrationsunterschiede der übereinandergeschichteten Lösungen auf die alkalische Reaction über der Grenze und die Gesammtwiderstandsänderung.

Nachdem festgestellt war, dass auch in Salzlösungen von Kalium und Natrium bei grossen Concentrationsunterschieden durch Dimethylorange ein Basischwerden über der Grenze nachgewiesen werden konnte, waren zunächst folgende Fragen zu beantworten: in welchen Grenzen der concentrirten und verdünnten Lösungen tritt eine alkalische Reaction oder eine sichtbare Ausscheidung über der Grenze ein, und in wie weit sind die Stromstärkeänderungen, die bei den verschiedenen untersuchten Salzen so erheblich waren, von den Vorgängen über der Grenze abhängig.

Die Gesammtänderungen des Widerstandes, auf die unter Annahme constanter electromotorischer Kraft der Batterie aus den Stromstärken geschlossen werden konnte, ergaben sich aus den Versuchen über die alkalische Reaction bei verschiedenen Concentrationen ohne weiteres.

Zum Nachweis einer Reaction über der Grenze war bei den folgenden Versuchen die verdünnte Lösung mit Dimethylorange roth gefärbt. Auf die Aenderungen der Stromstärke hatte dasselbe selbst bei den grössten Verdünnungen der einen Lösung keinen bemerkbaren Einfluss, denn bei sonst gleich gefärbten und ungefärbten Lösungen waren die Schwankungen der Stromstärke merklich dieselben.

$BaN_2O_6$ conc. und 0,5 conc. gab bei einer Stromstärke von 10,6 MA 2 Min. nach Stromschluss über der Grenze eine deutliche Gelbfärbung, die in 15 Min. 12 mm in 30 Min. 25 mm hoch war; eine intensiver gelbe Farbschicht trat jedoch über der Grenze nicht auf.

Lösungen desselben Salzes, conc. und 0,25 conc. zeigten schon nach 45 Sec. ($i = 20$ MA) einen scharfen Uebergang der roten Farbe in gelbe. Nach 5 Min. hatte sich die Umfärbung

15 mm nach oben verbreitet, und es bildete sich eine schwach verdichtete gelbe Schicht über der Grenze.

Die Stromstärke war, abgesehen von der schwachen Abnahme gleich nach Stromschluss, im weiteren Verlauf constant.

Grössere Concentrationsunterschiede ergaben ein immer rascheres Alkalischwerden über der Grenze und zugleich erhebliche Aenderungen der Stromstärke.

Während bei conc. und 0,1 conc. $CaN_2O_6$ bei Anwendung von 10 Elementen die Stromstärke innerhalb 45 Min. von 11,4 MA bis auf 10,0 MA sank, um dann constant zu bleiben, fiel sie bei den Concentrationsunterschieden conc. und 0,01 conc. in 10 Min. von 7,4 MA auf 7,0 und stieg nach Verlauf von 60 Min. bis 8,25 MA; auch trat bei diesem Versuch schon eine feste Ausscheidung über der Grenze ein.

Lösungen desselben Salzes conc. und 0,001 conc. mit 30 Elementen zeigten folgendes. Die Stromstärke, welche bei Stromschluss 3,1 MA betrug, ging in 1 Min. auf 2,9 MA zurück und stieg dann allmählich wieder. Nach 40 Min. trat über der Grenze eine keilförmige Ausscheidung ein ($i$ = 5,0 MA), die nach 85 Min. etwa 2 mm hoch war ($i$ = 6,7 MA). Nach 90 Min. wurde der Strom commutirt ($i$ = 7,0 MA), worauf die Stromstärke langsam zurückging: nach 10 Min. $i$ = 5,8 MA, nach 25 Min. $i$ = 5,2 MA. Gleichzeitig wurde die Ausscheidung breiter und weniger zusammenhängend; nach 40 Min. ($i$ = 4,25 MA) war sie 10 mm hoch vertheilt. Nach 50 Min. erreichte die Stromstärke den kleinsten Werth (4,1 MA) und stieg dann wieder unter gleichzeitiger rascher Auflösung der Ausscheidung über der Grenze, die nach 110 Min. vollständig verschwunden war ($i$ = 10,0 MA).

Uebereinstimmend mit dem Verhalten von salpetersaurem Baryum bei geringen Concentrationsunterschieden zeigten sich auch Lösungen anderer Salze.

Conc. und 0,5 conc. $CdJ_2$ ergab bei 20 Elementen ($i$ = 18,0 MA) eine rasche Umfärbung der rothen Lösung über der Grenze; nach 15 Min. bildete sich eine schwachgelbe Schicht dicht über der concentrirten Lösung, nach 30 Min. war die Schicht 2 mm, die gelbe Farbe überhaupt 15 mm hoch.

War eine 0,5 conc. Lösung von KCl über eine concentrirte geschichtet, so trat bei einer Stromstärke von 80,0 MA

nach 4 Min. eine deutliche Gelbfärbung über der Grenze ein, und nach 20 Min. zeigte sich 2 mm über der concentrirten Lösung eine etwas intensivere gelbe Farbschicht.

Concentrirte und 0,125 concentrirte Lösungen desselben Salzes ergaben ein ähnliches Resultat.

Bei conc. und 0,06 conc. KCl trat bei Anwendung von 20 Elementen 1 Min. nach Stromschluss ($i = 32,0$ MA) eine scharfe Farbenänderung über der Grenze ein, darunter blieb die Lösung bis zur concentrirten (1 mm) noch roth. Nach 3 Min. ($i = 30,5$ MA) war die gelbe Farbe 5 mm hoch, und nach 6 Min. ($i = 31,0$ MA) bildete sich eine verdichtete gelbe Schicht über der Grenze. Nach 15 Min. ($i = 33,5$ MA) hatte die Umfärbung eine Höhe von 20 mm, die Farbschicht von 2 mm erreicht.

Grössere Concentrationsunterschiede beider Lösungen von Chlorkalium lieferten bei der Electrolyse immer dasselbe Ergebniss, nämlich eine alkalische Reaction über der Grenze; von einer Angabe weiterer Versuche kann deshalb abgesehen werden.

### Die Widerstandsänderungen.

Die früher angegebenen Aenderungen der Stromstärke können hervorgerufen sein durch die Veränderungen der verdünnten Lösung, besonders an der Kathode, vielleicht durch die Vorgänge über der Grenze, und in geringem Maasse, wo es sich um Zunahmen der Stromstärke handelt, durch die Diffusion.

Diese gesammten Aenderungen sind für salpetersaures Calcium für conc. und 0,001 conc. Lösungen schon angegeben; dasselbe Verhalten zeigen die Nitrate des Baryums und Strontiums; dagegen schliessen sich salpetersaures Zink und Kupfer den schwefelsauren Salzen an.

Die Electrolyse von conc. und 0,002 conc. Lösungen von $MgSO_4$ ergab bei 20 Elementen eine beständige Abnahme der Stromstärke von 3,3 bis 2,2 MA. Nach Commutiren stieg die Stromstärke in 60 Min. allmählich wieder bis 3,25 MA.

Für conc. und 0,002 conc. Lösungen von $SrCl_2$ ergab sich bei 40 Elementen nach Stromschluss ($i = 3,25$ MA) ein rasches Steigen der Stromstärke. Nach 25 Min. ($i = 5,5$ MA)

trat über der Grenze eine feine Ausscheidung ein, und nach 70 Min. betrug die Stromstärke 9,0 MA.

*Diffusion.* Auf die Zunahme der Stromstärke hatte bei der kurzen Versuchsdauer die Diffusion keinen bemerkenswerthen Einfluss, was aus der Constanz der von Zeit zu Zeit bei momentanem Schluss der Batterie abgelesenen Stromstärken hervorging.

*Widerstand über der Grenze.* Zur Bestimmung der während der Electrolyse eintretenden Widerstandsänderungen über der Grenze diente eine U-förmig gebogene Röhre, die ähnlich wie Röhre 2 mit 6 cm abstehenden seitlichen Ansätzen zur Aufnahme der beiden Electroden der Batterie versehen war, während die mittleren Schenkel mit der Grenze beider Lösungen den einen Zweig einer Wheatstone'schen Brücke bildeten. Vor und öfter nach Stromschluss wurde mit Wechselströmen und Telephon unter Ausschaltung der Chromsäurebatterie der Widerstand der in den mittleren Schenkeln befindlichen Lösung bestimmt und zugleich vor und nach der Widerstandsmessung die Stromstärke abgelesen. Die erhaltenen Resultate sind theilweise in folgendem zusammengefasst.

Conc. und 0,005 conc. $MgSO_4$ ergab bei der Electrolyse mit 20 Elementen in 65 Min. eine Widerstandsabnahme von 16 Proc. und dann in weiteren 75 Min. eine langsame Vermehrung des Widerstandes um 6 Proc.; die Stromstärke ging in 120 Min. um 60 Proc. zurück, um von da an constant zu bleiben.

Conc. und 0.002 conc. $MgSO_4$ zeigte in 110 Min. eine Widerstandsabnahme von 6 Proc. und darauf eine Zunahme von 7 Proc. Die Stromstärke ging in 110 Min. um 35 Proc. zurück und blieb dann die übrige Zeit (40 Min.) constant.

Conc. $MgSO_4$ und Wasser mit wenig Schwefelsäure gab eine Zunahme des Widerstandes von 53 Proc. in 75 Min., die Abnahme der Stromstärke in der gleichen Zeit betrug 33 Proc.

Eine Ausscheidung über der Grenze trat im letzten Falle nicht ein, während in den beiden ersten eine schwache Hydratbildung zeitlich ungefähr mit der Zunahme des Grenzwiderstandes zusammenfiel.

Bei 0,5 conc. und 0,001 conc. Lösungen von $SrN_2O_6$ nahm der Widerstand in den beiden mittleren Schenkeln beständig ab und zwar in 82 Min. um 32 Proc.; die Stromstärke zeigte in den ersten 7 Min. eine Abnahme von 6 Proc. und dann eine Zunahme von 32 Proc.

Conc. $SrN_2O_6$ und Wasser mit sehr wenig Salpetersäure ergab eine Widerstandszunahme von 52 Proc. und eine gleichzeitige Stromstärkeabnahme von 60 Proc.

In den letztgenannten Beispielen zeigt sich freilich eine ungefähre Uebereinstimmung der Stromstärkeschwankungen mit den Widerstandsschwankungen der Schicht, welche die Grenze enthält; im allgemeinen aber findet ein regelmässiger Zusammenhang zwischen den beiden Grössen nicht statt.

### Säurebildung über der Grenze.

Nach den früher mitgetheilten Versuchen tritt über der Grenze zweier übereinandergeschichteter Lösungen von verschiedener Concentration eine alkalische Reaction ein, wenn ein electrischer Strom von der concentrirten zur verdünnten fliesst. Es fragt sich nun, ob auch die umgekehrte Stromrichtung eine Veränderung der Lösung an der Grenzfläche bewirkt. Die folgenden Versuche scheinen dies zu bestätigen.

Die äusseren Schenkel der Röhre 3 wurden mit einer concentrirten Lösung von $CaN_2O_6$ gefüllt und dann über *b* rothgefärbte, über *c* gelbgefärbte verdünnte Lösung geschichtet. Ging nun ein Strom von *a* nach *d*, so änderten sich wenige Secunden nach Stromschluss die Farben, indem die rothe in gelb und die gelbe in roth überging; darunter blieben bis zur Grenze die früheren Farben noch etwa 4 Min. lang bestehen. Ueber beiden Grenzen bildeten sich langsam verdichtete Farbschichten von 2 mm Höhe, worauf sich die Lösung über der rothen Schicht 10—12 mm hoch vollständig entfärbte; der übrige Theil bis zur gelben Schicht war gelb.

Befand sich eine gelbgefärbte verdünnte Lösung zwischen zwei concentrirten von $CaN_2O_6$, so trat nach einem Stromdurchgang von 15 Min. eine schwache Röthung des Dimetylorange und eine 10 mm hohe Entfärbung der Lösung über der Anodengrenze ein. Die von der Anode ausgehende Säure-

reaction war erst wenig von der Electrode aus vorgeschritten und noch 30 mm von der Grenze entfernt.

Eine concentrirte und verdünnte Lösung von $CaN_2O_6$ hintereinandergeschichtet ergab in Bezug der Farbenänderung durch eine schwache Säurereaction über die Grenze und darauf folgende 12 mm hohe Entfärbung der Lösung dasselbe Resultat.

Durch conc. und 0,1 conc. KJ — die verdünnte Lösung war mit Dimethylorange roth gefärbt — ging zuerst ein Strom ($i$ = 50,0 MA) in der Richtung von der concentrirten zur verdünnten Lösung. In 15 Min. war die ganze Flüssigkeit gelb gefärbt, und es hatte sich zugleich über der Grenze eine intensiv gelbe Farbschicht gebildet. Als darauf der Strom commutirt wurde, trat nach 5 Min. eine 10 mm hohe Rothfärbung über der gelben Schicht ein; nach weiteren 5 Min. war die Schicht ebenfalls roth geworden, während die darüber befindliche Lösung vollständig entfärbt war. 25 Min. nach dem Commutiren war jede Färbung über der Grenze verschwunden.

Weitere Versuche mit KJ und $CdJ_2$ ergaben bei den Concentrationsunterschieden 1 : 20, 1 : 50 und gelbgefärbter verdünnter Lösung nach etwa 10 Min. eine vollständige Entfärbung 1—2 mm über der Grenze und dann eine schwache Röthung des dicht über der concentrirten Lösung noch befindlichen Dimethylorange.

Hiernach dürfte bei einer Stromrichtung von der verdünnten Lösung zur concentrirten eine, wenn auch sehr geringe, Säurebildung über der Grenze nicht zweifelhaft sein, auf welche die schwache Röthung und die darüber befindliche Entfärbung schliessen lassen.

### Krystallisation über der Grenze.

Es wurden in zwei Röhren (3 und gewöhnliche U-Röhre) gleiche Lösungen von $SrN_2O_6$ (concentrirt) und $ZnSO_4$ (0,001 conc.) übereinandergeschichtet. Hierbei trat an der Berührungsfläche eine äusserst feine Abscheidung von unlöslichem schwefelsaurem Strontium ein. Während die gewöhnliche Röhre stehen blieb, wurden die Lösungen der Röhre 3 electrolysirt. Bei einer Stromstärke von 6,3 MA trat 5 mm über der Grenze eine rasche krystallinische Abscheidung ein und zwar in meh-

reren getrennten Flächen von 2 mm Durchmesser. Nach 10 Min. waren die Zwischenräume mit einer gallertartigen Ausscheidung ausgefüllt; unter dem Mikroskop zeigten sich äusserst feine lange Krystalle und an durchsichtigen Stellen ein gallertartiger Niederschlag. Die Grenzfläche der in der anderen Röhre befindlichen Lösungen änderte sich nach längerer Zeit nicht merklich.

### Besprechung der Versuche.

Die mitgetheilten Versuche ergeben Folgendes. Ausser der bereits früher bekannten Hydroxydbildung von Magnesium, Calcium und Kupfer über der Grenze zweier übereinandergeschichteter Salzlösungen von verschiedener Concentration, welche ein electrischer Strom in der Richtung von der concentrirten zur verdünnten durchfliesst, lässt sich bei grösseren Concentrationsunterschieden eine feste Ausscheidung feststellen für Baryum, Strontium, Aluminium, Eisen, Mangan und Zink in Verbindung mit mehreren Säuren. Silber zeigte dagegen ein solches Verhalten nicht. In jedem Fall, auch bei dem Silber und bei den Salzen von Kalium und Natrium, welche leicht lösliche Hydrate bilden, zeigt selbst bei geringen Concentrationsunterschieden (1 : 2) in der verdünnten Lösung enthaltenes Dimethylorange eine alkalische Reaction über der Grenze an, was sich bei Anwendung weniger empfindlicher Reagentien nicht ergibt. Gmelin[1]) fand bei der Electrolyse von Wasser und $Na_2SO_4$ und von $CaN_2O_6$ und Wasser mit Malventinktur, welche Anode resp. Kathode umgaben, dass zuerst unmittelbar an der Electrode die Abscheidung der Säure oder des Alkalis auftritt, welche dann langsam zur Grenze fortschreiten. Dasselbe fand Davy[2]) mit $K_2SO_4$, Wasser und Lackmustinktur.

Die mit dem empfindlicheren Dimethylorange als Reagens gemachten Beobachtungen bestätigen jedoch diese Angabe nicht, sondern es zeigt sich immer ein rasches Alkalischwerden etwa ein Millimeter über der Grenze, und zwar tritt bei grossen Concentrationsunterschieden die Reaction über

1) Gmelin, Wiedemann, Electricität, 2. p. 599 u. 604.

2) Davy, Wiedemann, Electr. 2. p. 598.

der Grenzfläche ebenso schnell auf, wie die an der Electrode. Von einem Einfluss der Kathode auf die Grenze — innerhalb weniger Secunden — kann bei der angewendeten Röhre 3 schon wegen der Länge der verdünnten Lösung nicht die Rede sein.

Was die Entstehungsursache der zuerst von Faraday bei Magnesiumsulfat beobachteten Grenzausscheidung betrifft, so führt G. Wiedemann[1]) dieselbe auf verschiedene Ueberführungsgeschwindigkeiten in den Lösungen zurück. Gegen diese Ansicht hat schon F. Kohlrausch[2]) eingewendet, dass eine Verschiedenheit in den Wanderungszahlen beider Lösungen nur eine Concentrationsänderung an der Grenze, jedoch keinen Ueberschuss des einen Ions zur Folge haben kann.

Nun ergibt sich aus den Hittorf'schen Wanderungszahlen noch Folgendes.

Der Einfluss der Verdünnung zeigt sich je nach der Natur des Electrolytes für die Ueberführungsgeschwindigkeit verschieden. In den meisten Fällen nimmt die Ueberführung des Anions mit steigender Verdünnung ab, die des Kations in demselben Maasse zu. Jedoch sind auch Ausnahmen vorhanden. Bei Chlorkalium sind die Wanderungszahlen von der Concentration unabhängig; bei den Nitraten von Silber, Kalium und Natrium nimmt die Ueberführungszahl des Anions mit der Verdünnung zu, die des Kations also ab.

Wenn nun die Vorgänge über der Grenze in der Verschiedenheit der Wanderungszahlen ihre Ursache hätten, so könnte allerdings bei den meisten Körpern eine Hydratbildung eintreten, Chlorkalium dürfte jedoch keine oder nur äusserst geringe von Concentrationsunterschieden unabhängige Veränderungen über der Grenze zeigen, während bei salpetersaurem Silber, Natrium und Kalium sogar eine Säurebildung zu erwarten wäre. Hiermit stehen jedoch die mit Dimethylorange als Reagens angestellten Versuche im Widerspruch, welche bei gleicher Stromrichtung sowohl für Chlorkalium als auch die letztgenannten Salze dasselbe Verhalten über der Grenze ergeben wie für die übrigen untersuchten Lösungen.

1) G. Wiedemann, Electr. **2.** p. 602.

2) F. Kohlrausch, Wied. Ann. **26.** p. 210. 1885.

Hiermit bleibt bis jetzt in der That nur die zweite Erklärung von F. Kohlrausch übrig, welche in der Mitwirkung des Wassers bei der Electrolyse die Ursache der beschriebenen Vorgänge an der Grenze erblickt, und nach welcher diese Erscheinungen sich allerdings mit Nothwendigkeit ergeben. Wünschenswerth ist, dass die Versuche einmal in ausreichenden Dimensionen angestellt werden, um die Ausscheidungsproducte quantitativ und nach ihrer chemischen Zusammensetzung feststellen zu können.

Strassburg, Physik. Institut d. Univ., Mai 1892.

## IV. *Ueber die Vergleichung von Lichtstärken auf photoelectrischem Wege;*
### *von J. Elster und H. Geitel.*

Dass es möglich ist, die Intensität ultravioletten Lichtes durch die photoelectrische Zerstreuung an Kathodenflächen von amalgamirtem Zink in der freien Luft mit einiger Annäherung zu messen, glauben wir vor kurzem nachgewiesen zu haben.[1])

Die Methode war eine electrostatische und die Vergleichung der Lichtintensitäten geschah durch die Differenz der Logarithmen des vor und nach einer constanten Expositionszeit gemessenen negativen Potentials einer lichtempfindlichen Zinkkugel.

Die zu Grunde gelegte und durch den Versuch bestätigte Annahme lässt sich dahin zusammenfassen, dass die nur durch das Licht bewirkte Zerstreuung der negativen Electricität bei constanter electrischer Dichtigkeit auf der Zinkfläche der Lichtintensität proportional sei. Die geringe Empfindlichkeit des Zinks gegen Strahlen grösserer Wellenlänge macht es nun unmöglich, auf diese Art Lichtstärken zu vergleichen, die der Hauptsache nach aus physiologisch wirksamen Bestandtheilen zusammengesetzt sind.

Man muss, um dies zu erreichen, zu reinen Oberflächen der Alkalimetalle greifen. Da man genöthigt ist, diese Substanzen vor dem Sauerstoff der Luft geschützt in Glasrecipienten einzuschliessen, so verliert man die Möglichkeit einer freien Exposition, und auch die Anwendung der electrostatischen Methode wird durch die Anwesenheit des Recipienten beeinträchtigt. Dagegen gewinnt man, wie wir schon früher angegeben, den Vortheil, durch passende Wahl des Gasdrucks im Recipienten die Empfindlichkeit auf das höchste erreichbare Maass steigern zu können.

Verbindet man nun die Alkalimetallfläche mit dem negativen, die gegenüberstehende Platin- oder Aluminiumelectrode

---

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **48.** p. 338. 1893.

mit dem positiven Pole einer constanten Kette, so wird bei Belichtung der Kathode ein electrischer Strom die Vacuumzelle durchlaufen, der galvanometrisch messbar ist.[1]) Wählt man die electromotorische Kraft der Kette so klein, dass ohne Belichtung der Kathode eine freiwillige leuchtende Entladung durch die Zelle nicht erfolgt, ist ferner der Widerstand der Kette hinreichend klein gegen den der Gasstrecke, so dass auch bei den stärksten Lichtintensitäten die Potentialdifferenz an ihren Polen nicht merklich sinkt, so muss nach der oben erwähnten Annahme die am Galvanometer abgelesene Stromstärke der Lichtintensität proportional sein.

Die im folgenden beschriebenen Versuche sollen zeigen, dass diese Erwartung, soweit die Genauigkeit unserer Hilfsmittel reichte, sich als zutreffend erwies, dass mithin eine lichtelectrische Zelle in Verbindung mit einer constanten Kette und einem Galvanometer zu photometrischen Messungen dienen kann.

### Apparat und Methode.

Der vollständige Apparat besteht demnach aus den drei Haupttheilen: der lichtelectrischen Zelle, der galvanischen Batterie und dem Galvanometer. Die Anordnung derselben ist aus der nebenstehenden Figur ersichtlich, *A* bezeichnet die Zelle, *B* die Batterie, *C* das Galvanometer, *D* ist ein Commutator zur Erzielung von Doppelausschlägen, Punkt *E* ist ständig zur Erde abgeleitet.

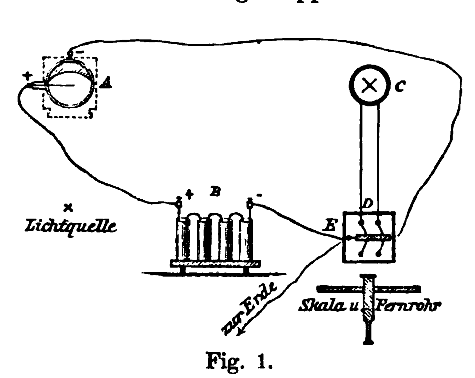



Fig. 1.

Die zu den zu beschreibenden Versuchen verwandte Zelle hat im wesentlichen die Einrichtung der l. c. p. 288 dargestellten, doch wurde der Recipient bedeutend grösser, 10 cm im Durchmesser, gewählt, die lichtempfindliche Fläche bestand

1) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **46.** p. 287. 1892.

aus Kalium. Die Batterie ist die ebenfalls schon früher erwähnte aus 98 Trockenelementen (sog. Thorelementen, Zink-Kohle in einer mit Salmiaklösung getränkten Paste) bestehende, zu dieser konnten noch weitere 18 Zink-Kohle-Salmiaklösungelemente und 200 kleine Zink-Platin-Salmiaklösungselemente hinzucombinirt werden. Alle standen auf gut isolirender Unterlage, mit Harz überzogenen Brettern, die auf Siegellackfüssen ruhten. Die electromotorische Kraft der ersten Gruppe betrug 127 Volt, die der zweiten 25, die der dritten 204. Der Widerstand der ersten beiden ist gegen den der Gasstrecke in der Zelle zu vernachlässigen.

In der bei weitem grössten Zahl der Versuche beschränkten wir uns auf die 98 zuerst genannten Elemente, andernfalls ist im folgenden das Gegentheil besonders bemerkt. Bei Verwendung der gesammten Batterie ging der Strom auch ohne Belichtung intermittirend durch die Zelle.

Auch das Galvanometer ist schon von uns erwähnt, durch Anwendung von Quarzsuspension und Vermehrung der Drahtwindungen gaben wir ihm eine Empfindlichkeit von 1 Scalentheil = $10^{-10}$ Ampère bei einem Widerstande von etwa 3800 Ohm.

### Die Messungen.

Die Frage, ob die Angaben einer photometrischen Vorrichtung proportional der Lichtintensität sind, lässt sich am einfachsten dadurch entscheiden, dass man die Stärken $J_1$ und $J_2$ zweier beliebiger Lichtquellen zunächst einzeln misst und darnach prüft, ob bei dem Zusammenwirken beider $J_1 + J_2$ als Maass ihrer Gesammtintensität beobachtet wird. Innerhalb des Bereiches, in dem die Messungen liegen, ist alsdann die Proportionalität vorhanden. Wir stellten zunächst in einer gewissen Entfernung (etwa 30 cm, die Kenntniss derselben ist unwesentlich) vor der Kaliumzelle *A* zwei Kerzen auf, und maassen die Galvanometerausschläge für die drei Fälle, dass allein das Licht der ersten, oder das der zweiten, oder das beider zugleich die Kaliumfläche traf. Die Summe der beiden zuerst beobachteten Ausschläge ergab dann ziemlich nahe den zuletzt abgelesenen. Der Grad der Annäherung war bei verschiedenen Versuchsreihen nicht der gleiche, und leicht liess sich erkennen, dass die Abweichungen allein den Schwankungen in den Lichtstärken

der Kerzen zuzuschreiben waren. Veränderungen in der Länge des verkohlten Dochtes, geringe Luftbewegung, ein Flackern der Flammen verriethen sich sofort durch die Einstellung des Galvanometers. Versuche mit Gasflammen ergaben ebenfalls kein völlig befriedigendes Resultat, auch hier bewirkten kleine Intensitätsschwankungen eine Unsicherheit der Ablesung. Weit besser bewährten sich Petroleumlampen mittlerer Grösse mit Glascylinder (Rundbrenner von 1,3 cm Durchmesser). Nach 20 Minuten Brenndauer ist die Lichtstärke einer solchen Flamme für 1—2 Stunden fast unveränderlich. Wir brachten zwei brennende Lampen dieser Art vor die Zelle, maassen zunächst die Intensität der einen, indem wir die andere durch einen geschwärzten Schirm abblendeten, verfuhren entsprechend bei der zweiten und bestimmten zum Schlusse die Summe der Intensitäten. Nach Vergrösserung oder Verkleinerung des Abstandes der Lampen von der Zelle konnte dann derselbe Versuch für kleinere und grössere Lichtstärken wiederholt werden. Auch zwei Gasglühlampen (Auerbrenner) wurden zur Erzielung hoher Intensitäten verwandt, doch ist auch hier, wie bei Gasflammen, die Einstellung des Galvanometers nicht völlig constant. Tab. I gibt einige der hierher gehörigen Messungsreihen wieder.

Tabelle I.

a) Versuche mit 2 Petroleumlampen. 30. October 1892.

| $J_1$ | $J_2$ | $J_1 + J_2$ ber. | $J_1 + J_2$ beob. |
|---|---|---|---|
| 57,1 | 58,6 | 115,7 | 116,9 |
| 57,5 | 59,5 | 117,0 | 118,4 |
| 57,3 | 57,7 | 115,0 | 116,5 |
| 57,9 | 58,4 | 116,3 | 115,8 |
| | Mittel: | 116,0 | 116,9 |

b) Desgleichen am 26. December 1892.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 82,0 | 46,8 | 128,4 | 128,8 |

c) Desgleichen am 27. December 1892.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 89,0 | 41,5 | 130,0 | 130,5 |
| Lampen näher an die Zelle gerückt | | | |
| 137,5 | 56,0 | 190,5 | 193,5 |
| Lampen ferner gerückt | | | |
| 25,0 | 14,5 | 40,0 | 39,5 |

d) Versuche mit 2 Auerbrennern. 26. December 1892.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 74,0 | 60,0 | 136,5 | 134,0 |

Aus diesen Versuchen scheint uns die Möglichkeit der Vergleichung von Lichtquellen auf photoelectrischem Wege hervorzugehen, man hat dieselben nur nach einander in genau gleiche Entfernung von der Kaliumzelle zu bringen und die Galvanometeraussschläge in jedem Falle zu bestimmen. Da es nicht darauf ankommt, jene Entfernungen selbst zu kennen, sondern sie nur für die zu vergleichenden Lichtquellen gleich gross zu machen, so halfen wir uns auf folgendem Wege. Die Kaliumzelle erhielt einen fest bestimmten Platz angewiesen, in der gewählten Entfernung von derselben hing von der Decke des Zimmers ein Pendel herab, dessen Körper (aus Glas) unten zugespitzt war. Bei der Einstellung eines Petroleum- oder Gasrundbrenners wurde dafür gesorgt, dass der Pendelkörper genau in der Mitte der Brennerröhre einspielte, bei einer Kerzenflamme musste er die Spitze derselben berühren. Es versteht sich von selbst, dass während der Messung das Pendel entfernt wurde. Bei der Vergleichung grosser Lichtintensitäten mit kleinen kann es leicht geschehen, dass die ersteren in derselben Entfernung, wie die letzteren so stark wirken, dass sie die Scala aus dem Gesichtsfelde des Fernrohrs werfen. Man hat alsdann eine dritte mittlere als Vergleichsobject einzuschalten. Als Beispiel ist in Tab. II die Vergleichung eines Auerbrenners mit einer Amylacetatlampe nach Hefner-Alteneck mitgetheilt.

Tabelle II. 26. Dec. 1892.

**Petroleumlampe 118,0 Scalentheile; in gleicher Entfernung eine Hefnerkerze 13,5; daher eine Petroleumlampe = 8,74 Hefnerkerzen.**
**Dieselbe Petroleumlampe in weiterer Entfernung 17,5 Scalentheile, Auerbrenner (Gasglühlicht) in der gleichen Entfernung 100,0, daher ein Auerbrenner = 49,8 Hefnerkerzen.**

Noch auf einem anderen Wege, als durch Addition von Lichtstärken, suchten wir uns von der Brauchbarkeit des lichtelectrischen Photometers zu überzeugen.

Wir gingen von der Beziehung:

$$J = J_0\, a^z$$

aus, worin $J$ die Intensität eines monochromatischen Lichtstrahls bezeichnet, der ein absorbirendes Medium von der

Dicke $z$ und dem Transparenzcoefficienten $a$ durchlaufen hat, und dessen Intensität vor seinem Eintritt in das Medium gleich $J_0$ war. Beobachtet man $J$ für eine grosse Reihe verschiedener Werthe von $z$, so müssen sich die gefundenen Zahlen in eine Gleichung dieser Form einordnen lassen. Zur Erzeugung nahe monochromatischen Lichtes benutzten wir eine Petroleumlampe, deren Strahlen ein parallelwandiges mit einer tiefblauen Lösung von Kupferoxydammoniak gefülltes Glasgefäss passirten. Als absorbirendes Mittel wandten wir eine Lösung von Kaliumbichromat in Wasser an, die in einem ähnlichen Gefässe zwischen der Kupferoxydammoniaklösung und der Kaliumzelle eingeschaltet war. Bei genügender Concentration absorbirt sie die blauen Strahlen vollständig.

Statt die wirksame Schichtdicke $z$ direct zu verändern, zogen wir es vor, Lösungen verschiedener Concentration von bekanntem Verhältnisse zu verwenden. Wir erreichten dies dadurch, dass wir zunächst reines Wasser in das Absorptionsgefäss brachten und zu diesem tropfenweis (mittelst eines Tropfglases) gesättigte Bichromatlösung zusetzten. Hierbei konnte die Volumenvermehrung der Flüssigkeitsmasse (sie betrug etwa $^1/_{750}$ für den Tropfen, während wir nie mehr als 8 Tropfen im ganzen hinzufügten) als verschwindend klein, der Gehalt an dem absorbirenden Salze, mithin auch $z$, der zugesetzten Tropfenmenge angenähert proportional angenommen werden. Wir setzten geradezu $z$ dieser Tropfenzahl gleich, indem wir hierdurch nur die physikalische Bedeutung der Constanten $a$ in unmittelbar verständlicher Weise abänderten. Vorausgesetzt ist, dass die Tropfengrösse constant war und die Absorption des Lichtes nur von der Menge der in seinen Weg eingeschalten Molecüle des Salzes abhängt.

Die folgenden Tabellen geben einige der Beobachtungsreihen wieder. Die unter Columne $J$ (ber.) aufgeführten Zahlen sind dadurch erhalten, dass wir die Constanten der Formel $\log J = \log J_0 + z \log a$, nämlich $\log J_0$ und $\log a$ aus den für die verschiedenen Werthe der Tropfenzahl $z$ beoabachteten Intensitäten $J$ nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmten und aus der so erhaltenen Formel durch Einsetzung der $z$ die $J$ wieder berechneten. Bei dieser Con-

stantenbestimmung wurde die Beobachtung für $z = 0$, also bei Vorschaltung reinen Wassers, ausgeschlossen.

Tabelle III. 17. Januar 1893.

1.

Lichtquelle: Petroleumlampe von 10 Hefnerkerzen Lichtstärke, in den Weg der Strahlen ist ein mit Kupferoxydammoniaklösung gefüllter Glastrog eingeschaltet. Absorbirende Flüssigkeit: Kaliumbichromat, tropfenweise zu reinem Wasser zugesetzt. Reihe A und B unmittelbar nach einander erhalten. Je zwei Ablesungen gemacht ($J_1$ und $J_2$).

| Reihe A. Tropfenzahl | | | Reihe B. | | | Mittel | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Z$ | $J_1$ | $J_2$ | $Z$ | $J_1$ | $J_2$ | $J$ | $J$ (ber.) | Diff. |
| 0 | 80,8 | 80,8 | 0 | 79,2 | 80,0 | 80,2 | 67,8 | 12,4 |
| 1 | 55,3 | 55,6 | 1 | 55,0 | 55,4 | 55,3 | 53,6 | 1,7 |
| 2 | 42,2 | 42,5 | 2 | 42,2 | 41,6 | 42,2 | 42,2 | 0,0 |
| 4 | 25,5 | 25,6 | 4 | 24,9 | 25,3 | 25,3 | 26,5 | −1,2 |
| 6 | 16,8 | 16,9 | 6 | 15,9 | 16,2 | 16,5 | 16,6 | −0,1 |
| 8 | 11,2 | 11,1 | 8 | 10,0 | 10,0 | 10,6 | 10,4 | 0,2 |
| 0 | 79,2 | 80,0 | 0 | 79,9 | 79,5 | 79,7 | — | — |

Formel: $\log J = 1{,}83140 - 0{,}102019\, Z$.

2.

Wie bei 1., nur die Entfernung der Lampe von der Zelle geändert.

| $Z$ | $J$ (beob.) | $J$ (ber.) | Diff. | $Z$ | $J$ (beob.) | $J$ (ber.) | Diff. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 62,4 | 50,6 | 11,8 | 5 | 19,9 | 21,0 | −1,1 |
| 1 | 44,1 | 42,5 | 1,6 | 6 | 18,7 | 17,6 | 1,1 |
| 2 | 35,1 | 35,6 | −0.5 | 7 | 14,2 | 14,7 | −0,5 |
| 3 | 29,6 | 29,8 | −0,2 | 8 | 12,7 | 12,3 | 0,4 |
| 4 | 24,3 | 25,0 | −0,7 | | | | |

Formel: $\log J = 1{,}7045 - 0{,}076667\, Z$.

Intensität der Lampe vor Beginn der Beobachtungsreihe 65,1, nach Schluss derselben 65,3 Scalentheile (ohne Zwischenschaltung eines Glastroges).

Während die berechneten Werthe in dem Intervalle von $z = 1$ bis $z = 8$ mit den beobachteten recht gut übereinstimmen, ordnet sich der Betrag für $z = 0$ überall bedeutend aus, indem er durchweg den berechneten Werth übertrifft. Es könnte diese Erscheinung ihren Grund darin haben, dass nach dem Zusetzen des ersten Tropfens etwa durch moleculare Veränderungen in Folge der starken Verdünnung das Bichromat sich chemisch umlagert, und seine absorbirende Kraft thatsächlich gesteigert wird, es kann aber auch das angewandte Licht noch zu weit von einer monochromatischen Beschaffen-

heit entfernt gewesen sein. Der erste Tropfen der das kurzwellige Licht stark absorbirenden Lösung löscht alsdann besonders die Strahlen kürzester Wellenlänge aus und nimmt so unverhältnissmässig mehr wirksames Licht fort, als die nachfolgenden. Für die letztere Ansicht, die wir für die wahrscheinlichere halten, spricht, dass diese Anomalie um so deutlicher hervortritt, je weniger concentrirt die Kupferoxydammoniaklösung gewählt wird.

Auch aus den Resultaten dieser Absorptionsversuche dürfte wohl die Brauchbarkeit des Photometers hervorgehen.

### Empfindlichkeit.

Eine weitere Vergrösserung der Kaliumfläche in der Zelle zum Zwecke der Steigerung der Empfindlichkeit erscheint uns vor der Hand nicht empfehlenswerth und zwar sowohl wegen der technischen Schwierigkeiten ihrer Herstellung wie auch deswegen, weil eine grosse Fläche, um voll zur Geltung zu kommen, ein Lichtstrahlbündel von gleichem Querschnitt voraussetzt, eine Forderung, die zumal bei feineren Messungen öfter unerfüllbar sein wird. Dagegen ist das Galvanometer von möglichst hoher Empfindlichkeit zu wählen.

Aber auch wenn wir Galvanometer und Zelle als unveränderlich betrachten, ist in der Vermehrung der Elementenzahl der Batterie ein wirksames Mittel für die Verfeinerung der Methode gegeben. Um gleiche Ausschläge des Galvanometers zu erzielen, kann man die Lichtintensitäten um so kleiner wählen, je grösser die electromotorische Kraft der Batterie ist, oder was dasselbe für ein bestimmtes Beispiel aussagt, während für photometrische Messungen im Tages- oder Sonnenlichte eine electromotorische Kraft von 1 Volt und weniger ausreicht, bedarf man bei Lampenlicht etwa den 100 fachen, bei Mondlicht den 300 fachen Betrag. Da nun aber bei einer gewissen Potentialdifferenz der Strom der Batterie schon freiwillig ohne Beihilfe des Lichtes durch die Zelle hindurchgeht, so ist die electromotorische Kraft stets unter dieser (kritischen) Grenze zu halten.

Stellt man die Potentialdifferenzen als Abscissen, die Galvanometerausschläge für eine constante Lichtintensität als Ordinaten einer Curve dar, so muss diese eine Asymptote

parallel der Ordinatenaxe haben, indem für eine endliche Potentialdifferenz der Strom der Batterie unabhängig vom Lichte (mit einer vergleichsweise unendlich grossen Intensität) die Zelle durchfliesst. Die nachfolgende Versuchsreihe zeigt diese Erwartung bestätigt.

Tabelle IV. 15. November 1892.

| Anzahl der Elemente: | 0 | 25 | 50 | 75 | 100 | 125 | 150 | 175 | 200 | 324 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ablenkung in Scalentheilen: . . . . | 0 | 16,3 | 24,8 | 36,2 | 49,8 | 66,5 | 95,9 | 128,2 | 178,0 | + ∞ |

Electromotorische Kraft eines Elementes = 1,02 Volt.
Lichtquelle: Petroleumlampe von ca. 8 Kerzen Stärke in etwa $^1/_2$ Meter Entfernung.

Fig. 2 gibt die Resultate obiger Tabelle in graphischer Darstellung.

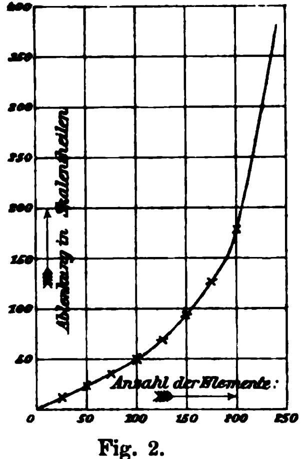


Fig. 2.

Liegt die electromotorische Kraft der Batterie nahe an dem kritischen Werthe, so genügt die geringste Lichtmenge, die Galvanometernadel in Bewegung zu setzen. Eine Vergleichung schwacher Lichtintensitäten nach dieser Methode, wie etwa von Fixsternhelligkeiten, scheint uns hiernach nicht aussichtslos.

Mängel und Fehlerquellen.

Wie bei jedem Photometer, so sind auch die Angaben des beschriebenen streng genommen nur für Licht von einer und derselben Farbe vergleichbar. Unter Lichtquellen, die ein Gemisch verschiedener Wellenlängen aussenden, ist im allgemeinen die am wirksamsten, welche am meisten blaue Strahlen enthält. Für praktische Zwecke wird sich der Mangel, der darin liegt, dass das Empfindlichkeitsmaximum der Kaliumfläche nicht mit dem des Auges zusammenfällt, durch Einschaltung schwach gelblich gefärbter Glasplatten voraussichtlich corrigiren lassen, bei wissenschaftlichen Messungen wird man sich von vornherein auf homogenes Licht beschränken. Bei Herstellung desselben hat man in-

dessen besondere Sorgfalt anzuwenden, um sich vor Täuschungen zu bewahren. In einer früheren Abhandlung gaben wir an, dass das Licht einer durch Natriumsalz gefärbten Bunsenflamme ziemlich stark auf die Kaliumfläche wirkt. Die Thatsache ist an sich richtig, man darf aber nicht den Schluss daraus ziehen. dass die Wirkung vorzugsweise von dem gelben Lichte herrührt. Es ist vielmehr der nicht geringe Gehalt der Natriumflamme an Blau und Violett, der hier den Ausschlag gibt; die Einschaltung eines blauen Kobaltglases lässt dieselbe nämlich bestehen, die einer Lösung von Kaliummonochromat hebt sie zum grossen Theile auf.

Natürlich ist der Apparat nur für solche Lichtstrahlen empfindlich, welche das Glas der Zelle durchdringen, ein Theil des Ultraviolett wird bekanntlich dadurch ausgeschlossen. Versuche an Zellen mit Quarzfenstern haben bis jetzt zu keinem befriedigenden Ergebnisse geführt. Die Schwierigkeit liegt darin, dass das zum Kitten der Quarzplatte dienende Material im Vacuum Dämpfe abgibt, welche, ohne dass äusserlich eine Veränderung erkennbar ist, die Lichtempfindlichkeit der Kaliumfläche stark beeinträchtigen.

Ferner ist noch hervorzuheben, dass die Empfindlichkeit der Zelle mit steigender Temperatur zunimmt. Man darf daher die zu messenden Lichtquellen nicht so nahe an diese heranbringen, dass eine Erwärmung um einige Temperaturgrade eintritt. In welchen Grenzen die durch Vernachlässigung dieser Vorsicht entstehenden Fehler liegen, geht aus der nachfolgenden Beobachtungsreihe hervor.

Tabelle V. 2. Februar 1893.

(Kleine Zelle von 4 cm Durchmesser.)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temperatur: | 20,3 | 22,9 | 26,3 | 35,0 | 41,9 | 45,4 | 50,3 | ° R. |
| Galvanometerablenkung: | 27,9 | 28,0 | 30,0 | 32,3 | 37,5 | 39,3 | 44,2 | Scalentheile. |

Intensität der Lampe *vor* dem Versuch: 58,0 } gemessen durch die grosse
Intensität der Lampe *nach* dem Versuch: 57,5 } Zelle in 50 cm Entfernung.

Die Zelle war bei diesem Versuche in einen Metallkasten eingeschlossen, der durch eine kleine Gasflamme auf die angegebenen Temperaturen erwärmt wurde.

— — — —

Wenn auch die hier beschriebene Methode der Vergleichung von Lichtintensitäten nicht frei von Schwierigkeiten ist, indem sie neben einer constanten Temperatur auch die Fernhaltung magnetischer Einwirkungen von dem Galvanometer, wie eine gute Isolation der Batterie und der mit ihr in Verbindung stehenden Leitungen voraussetzt, so glauben wir doch, sie zur Prüfung empfehlen zu dürfen. Ihr wesentlicher Vortheil, den sie mit der bolometrischen Methode theilt, liegt darin, dass sie auf einer Messung ohne Schätzung beruht, und da ihre Anwendbarkeit besonders da möglich ist, wo das Bolometer sich unzureichend erweist, nämlich bei den Strahlen grösserer Brechbarkeit, so wird vielleicht das lichtelectrische Photometer als Ergänzung jenes Instrumentes nicht unwillkommen sein.

Wolfenbüttel, im Februar 1893.

## V. *Beobachtungen über die Zerreissungsfestigkeit von Steinsalz; von A. Sella und W. Voigt.*

(Mitgetheilt von W. Voigt. Aus den Gött. Nachr. 1892, Nr. 14, p. 494.)

Ueber das in der Ueberschrift genannte Problem liegt eine überaus mühsame Untersuchung von Hrn. L. Sohncke[1]) vor, die schon deshalb ein besonderes Interesse verdient, weil sie eine der ersten gewesen ist, welche überhaupt die Einwirkung mechanischer Kräfte auf krystallinische Körper studirt haben. Eine vollständige Aufklärung der dabei vorliegenden Verhältnisse erbracht zu haben, beansprucht der Verfasser selbst nicht, und so dürfte schon um der auch ihm noch zweifelhaft gebliebenen Fragen willen eine Wiederaufnahme seiner Experimente wünschenswerth erscheinen. Was mich aber besonders zu dieser Untersuchung antrieb, war meine, auch durch die im hiesigen Institut ausgeführten Beobachtungen des Hrn. Kowalski[2]) genährte, Ueberzeugung, dass die eigentlichen *Bedingungen* für die gewaltsame Trennung des Zusammenhanges uns nicht einmal bei *isotropen* Körpern bekannt sind. Ich hegte die leise Hoffnung, dass, wie bezüglich der Elasticität erst das Studium der Krystalle uns die Mittel zum vollen Verständniss der Erscheinungen geliefert hat, welche die isotropen Körper zeigen, auch betreffs der Festigkeit ähnliches stattfinden möchte. Wenn nicht alles trügt, haben die im Folgenden mitgetheilten Beobachtungen am Steinsalz bereits in dieser Hinsicht einen Beitrag geliefert.

Hr. Sohncke hat rechteckige Prismen von Steinsalz, welche mit ihren Enden in geeignete Fassungen eingekittet waren, durch Zugkräfte zerrissen, die parallel der Prismenaxe ausgeübt wurden. Damit die Trennung nicht innerhalb der Fassungen eintrat, waren die Stäbchen in ihrem mittleren Theile dünner gefeilt. Die Zerreissung fand hierbei so gut wie immer nach Würfelflächen statt; nur wenn die verdünnte

1) L. Sohncke, Pogg. Ann. **137.** p. 177. 1869.

2) Kowalski, Wied. Ann. **36.** p. 307. 1889.

Stelle die Form einer kurzen und dünnen Platte zwischen zwei dicken Klötzen hatte, wurden einige Male andere Rissflächen bemerkt; wir wollen diese Fälle aber zunächst ausser Betracht lassen.

Die numerischen Resultate, welche Hr. Sohncke erhielt, sind die folgenden:

| | Stabaxe | Querschnitt $q$ | Tragfähigkeit $p$ pro 1 qmm |
|---|---|---|---|
| 1) | Würfelnormale | $7{,}6 < q < 14{,}6$ qmm | 35,0 Loth |
| 2) | Pyramidenwürfelnormale | $3{,}2 < q < 6{,}46$ „ | 66,6 „ |
| 3) | Granatoedernormale | $5{,}2 < q < 10{,}4$ „ | 69,7 „ |
| 4) | Octaedernormale | $2{,}2 < q < 5{,}15$ „ | 75,2 „ |

Dabei ist zu bemerken, dass die zweite Reihe nicht bei Stäben von quadratischem Querschnitt erhalten ist, sondern bei solchen, wo der dünnere Theil die Form einer kurzen Platte von 4—6 mm Breite und 0,75—1,70 mm Dicke besass. Die Beobachtungen, aus welchen die vorstehenden Zahlen die Mittel sind, weichen bedeutend, bei den letzten drei Reihen bis nahe um 50 Proc., von einander ab.

Hr. Sohncke vermuthet, dass nur die Grösse der Componente der Zugkraft normal zur Spaltungsfläche für die Trennung des Zusammenhanges massgebend ist, und schliesst daraus, dass dann die Tragfähigkeit $p$ in *beliebiger* Richtung durch die Tragfähigkeit $p_0$ parallel der Würfelnormale gegeben sein müsste nach der Formal

$$p = \frac{p_0}{\cos^2(a, w)},$$

worin $(a, w)$ den Winkel zwischen der Stabaxe und der Würfelnormalen senkrecht zur Bruchfläche bezeichnet.

Berechnet man nach dieser Formel aus der ersten Beobachtung, welche für $p_0$ den Werth 35,0 Loth ergibt, die drei letzten Beobachtungen, so erhält man resp. 43,8, 70,0 und 105 Loth — Zahlen, welche den Autor gegen die gemachte Voraussetzung misstrauisch machen, und welche deutlich hervortreten lassen, dass die vorliegenden Verhältnisse noch weitaus nicht aufgeklärt sind.

Für die Wiederaufnahme der Beobachtungen war zu überlegen, ob und wie von den bei den früheren Beobachtungen wirkenden Fehlerquellen die wichtigsten sich vermeiden liessen.

Von ihnen halte ich für die bedenklichste die von Hrn. Sohncke selbst hervorgehobene Gefahr, dass bei dem Zerreissen durch die ausgeübte Zugkraft nicht nur eine gleichförmige Längsdehnung, sondern daneben noch eine Biegung des untersuchten Stabes bewirkt wird. Der Einfluss, welchen eine nicht ganz centrisch wirkende Kraft besitzt, lässt sich leicht theoretisch auswerthen.

Es liege die $Z$-Axe in der Stabaxe, $z = c_1$ und $z = c_2$ entspreche zwei Querschnitten diesseits und jenseits der Rissfläche. Dann kann man jederzeit für die in dem Prisma $c_1 < z < c_2$ wirkenden Moleculardrucke den Ansatz machen

$$X_x = Y_y = 0, \quad Z_z = -(f_1 x + f_2 y + f_3), \quad Y_z = Z_x = X_y = 0,$$

welcher zugleich den Hauptgleichungen und den Grenzbedingungen der Elasticität genügt. Wegen der allgemeinen Gleichungen

$$-x_x = s_{11} X_x + s_{12} Y_y + s_{13} Z_z + s_{14} Y_z + s_{15} Z_x + s_{16} X_y,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

in denen die $s_{kh}$ die Elasticitätsmoduln der Substanz in Bezug auf das im Prisma feste System $X, Y, Z$ bezeichnen, gibt dies:

$$\begin{aligned} x_x &= s_{13}(f_1 x + f_2 y + f_3), & y_z &= s_{43}(f_1 x + f_2 y + f_3), \\ y_y &= s_{23}(f_1 x + f_2 y + f_3), & z_x &= s_{53}(f_1 x + f_2 y + f_3), \\ z_z &= s_{33}(f_1 x + f_2 y + f_3), & x_y &= s_{63}(f_1 x + f_2 y + f_3). \end{aligned}$$

Der hieraus folgende Werth der linearen Dilatation $\lambda$ in der durch die Cosinus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ gegebenen Richtung lautet:

$$\lambda = (f_1 x + f_2 y + f_3)(\alpha^2 s_{13} + \beta^2 s_{23} + \gamma^2 s_{33} + \beta\gamma\, s_{43} + \gamma\alpha\, s_{53} + \alpha\beta\, s_{63}).$$

Die Grösse der gesammten auf einen Querschnitt $q$ ausgeübten Zugkraft $Z$ ist gegeben durch

$$Z = -\int Z_z \, dq,$$

die Coordinaten $\xi$, $\eta$ ihres Angriffpunktes durch

$$\xi Z = -\int Z_z x \, dq, \quad \eta Z = -\int Z_z y \, dq.$$

Ist der Querschnitt $q$ ein Rechteck von den Seiten $2a$ und $2b$ parallel $X$ und $Y$, so wird $q = 4ab$ und

$$Z = f_3 q,$$

$$\xi Z = f_1 q \frac{a^2}{3}, \quad \eta Z = f_2 q \frac{b^2}{3}$$

oder

$$f_1 = \frac{3\xi f_3}{a^2}, \quad f_2 = \frac{3\eta f_3}{b^2}.$$

Betrachtet man nun die Grösse der inneren Spannung $Z_z$ oder eine ihrer Componenten als maassgebend für das Zerreissen, so gibt die Formel

$$-Z_z = \frac{Z}{q}\left(1 + \frac{3\xi x}{a^2} + \frac{3\eta y}{b^2}\right)$$

den Einfluss der excentrischen Lage des Angriffspunktes an. Bei centrischer Lage ist $\xi$ und $\eta$ gleich 0, also die Spannung auf dem Querschnitt constant $= Z/q$, bei excentrischer ist sie in den Ecken $x = \pm a, y = \pm b$ um den Bruchtheil

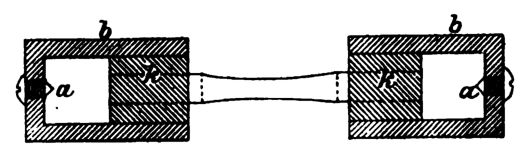
$$3\left(\pm \frac{\xi}{a} \pm \frac{\eta}{b}\right)$$

grösser. Um den gleichen Bruchtheil ist also die Tragfähigkeit verringert.

Man erkennt ohne weiteres, dass hier eine Quelle enormer Fehler vorliegt; sind die Seitenlängen $2a$ und $2b$ je gleich 2 mm, so gibt eine Excentricität $\xi = \eta = 0,1$ mm einen Fehler von 3/5 des Gesammtbetrages. Ein solcher Fehler war aber bei Hrn. Sohncke's Einrichtung gar nicht zu vermeiden.

Die Rechnung führt auf das analoge Resultat, wenn man statt der Spannung die lineare Dilatation in irgend einer Richtung als maassgebend für das Zerreissen betrachtet.

Hiernach musste es meine erste Sorge sein, eine Einrichtung zu treffen, die eine centrische Belastung einigermaassen sicherte. Dies suchte ich auf folgende Weise zu erreichen (vgl. d. Fig.).




In der Dicke der zu untersuchenden Prismen wurde ein stählerner Dorn hergestellt und mit diesem in zwei vierkantige Messingklötze $k$, $k$ je ein nahezu quadratisches Loch eingeschlagen. Hierauf wurden an die Klötze kräftige Messingbügel $b$, $b$ gelöthet und die so hergerichteten Klötze auf den

auf der Drehbank genau laufend eingespannten Dorn aufgesetzt. Jetzt liess sich durch den Bügel bei *a* ein Loch bohren, dessen Axe genau in die Axe des Dornes fiel, und eine gehärtete Schraube einfügen, deren stumpfwinkelige Spitze nun auch in die Axe der vierkantigen Oeffnung der Fassung lag. Die Stäbchen wurden in zwei gleiche genau anschliessende Fassungen mit Wachs-Kolophonium-Kitt befestigt und dann mit der Schraube der oberen Fassung auf einen horizontal zwischen zwei Stelltischen liegenden Stahlstab aufgehängt; auf die Spitze der unteren Schraube wurde ein geeignet gestalteter Bügel gelegt, welcher die Wagschale trug, die zum Aufnehmen des belastenden Gewichtes bestimmt war. Auf diese Weise war wohl so vollkommen, als überhaupt technisch möglich, die centrische Belastung und damit die gleichförmige Spannung des Stäbchens über den Querschnitt erreicht. Wie gross die übrigbleibenden Fehler noch waren, liess sich nicht bestimmen; jedenfalls erschienen die stark gespannten Stäbe bei der Betrachtung im polarisirten Lichte vor einem Glimmerblättchen vollständig homogen gefärbt.

Die Genauigkeit hätte sich nach der obigen Formel durch eine Vergrösserung des Querschnittes steigern lassen. Indessen war hier eine ziemlich tief liegende Grenze durch den Umstand gegeben, dass mit dem Querschnitt die Grenzbelastung wächst und der Kitt auch bei Zusatz von viel Kolophonium nicht mehr hielt, wenn ein Gewicht von ca. 20 kg am Stäbchen wirkte. Harter Kitt verlangte überdies grössere Hitze bei der Verwendung und steigerte so die Gefahr des Zerspringens der Krystallpräparate. Wir haben uns demgemäss meist auf Querschnitte zwischen 4 und 9 qm und Belastungen unterhalb 12 kg beschränkt. —

Eine weitere Fehlerquelle scheint mir bei den Sohncke'schen Beobachtungen die Form der Stäbchen zu bieten.

Dieselbe zeigte, wie oben gesagt, ein dünnes mittleres Prisma zwischen zwei dickeren Endprismen, welche in die Fassungen gekittet wurden. Aber es ist bei dieser Gestalt, und zwar um so mehr, je kürzer das mittlere Stück gegen seine Dicke ist, durchaus unwahrscheinlich, dass an der Bruchstelle die Spannung sich gleichmässig über den Querschnitt vertheilt, wie dies doch die Voraussetzung der ganzen Be-

rechnung ist. Ferner waren die Stäbchen nur mit der Feile bearbeitet, also höchst wahrscheinlich an der Oberfläche, und zwar je nach der Orientirung in verschiedener Weise, mit feinen Sprüngen und Rissen bedeckt, und diese können sehr leicht ein vorzeitiges Brechen veranlassen, selbst wenn sie nur wenig tief gehen.

Beide Uebelstände suchte ich auf folgende Weise zu umgehen.

Nachdem die Stäbe in regelmässiger prismatischer Form mattgeschliffen hergestellt waren, wurden auf ihren vier Seitenflächen mittels eines Cylinders von ca. 20 cm Durchmesser flache Höhlungen eingeschliffen, sodass jeder Stab nach der Mitte hin sich sehr allmählich verjüngte (vgl. d. Fig.). Dass die Höhlungen auf allen vier Seiten gleich tief waren und gleichmässig lagen, war dann gewährleistet, wenn ihre oberen und unteren Begrenzungen sich rings um das Stäbchen her genau an einander anschlosssen. Diese Höhlungen wurden fein polirt, um alle oberflächlichen Störungen zu vermeiden.

Bei den zuerst angefertigten Stäbchen (I Nr. 1—6, IV, V, VI, VII, VIII, IX) waren die Höhlungen etwa 20 mm lang und 0,5 mm tief; da bei ihnen aber das Zerreissen meist nahe bei der dünnsten Stelle eintrat, so wurden der leichteren Herstellung wegen bei den späteren (I Nr. 7—12, II, III, X, XI, XII, XIII) die Höhlungen nur etwa 12 mm lang und 0,15 mm tief eingeschliffen. Diese geringe Verdünnung der Stäbchen nach der Mitte zu hat sich aber in einigen Fällen als nicht ganz ausreichend erwiesen; wenigstens geschah hier das Zerreissen häufig gerade an einer Grenze der Höhlung.

Die Firma Dr. W. Steeg und Reuter hat nach der gegebenen Anweisung die Präparate in ausgezeichneter Weise hergestellt, und ich glaube, dass hierdurch auch in Hinsicht auf das Beobachtungsmaterial das überhaupt Mögliche erreicht ist.

Die Belastung geschah durch langsam zufliessendes Quecksilber, das aus einem am Ende *horizontal* umgebogenen engen Rohr in das auf der Wagschale stehende Gefäss floss, ohne so durch seine Geschwindigkeit einen verticalen Stoss auszuüben. Im Moment des Zerreissens wurde der Zufluss durch Drehen eines Hahnes unterbrochen. Um einen etwaigen Ein-

fluss länger andauernder Belastung zu vermeiden, wurde von Anfang an ein solches Gewicht auf die Wagschale gelegt, dass der ganze Versuch in einigen Minuten zu Ende ging; ein Einfluss der innerhalb dieser Grenzen noch variirenden Dauer konnte nicht bemerkt werden.

Durch alle diese Vorsichtsmaassregeln ist zwar die Uebereinstimmung unserer Beobachtungen unter sich erheblich besser geworden, sie erreicht aber doch noch längst nicht das sonst bei physikalischen Messungen, z. B. Elasticitätsuntersuchungen, erreichbare Maass. Der Grund ist leicht einzusehen. Bei den Elasticitätsbeobachtungen ist die gemessene Grösse (z. B. der Pfeil der Biegung eines Stabes) das Product des gesetzmässigen Zusammenwirkens *aller* Theile des deformirten Körpers; infolge dessen kommen locale Störungen, Inhomogenitäten, Sprünge u. dgl. in kaum merklicher Weise zur Wirkung. Bei den Festigkeitsbestimmungen sind dagegen eben jene localen Störungen das eigentlich Ausschlaggebende; an einer fehlerhaften und geschwächten Stelle beginnt der Sprung, der sich unaufhaltsam ausbreitet, wie das schon daraus hervorgeht, dass in den meisten Fällen der Riss nicht genau durch die am meisten gespannte dünnste Stelle des Präparates hindurchgeht, sondern mitunter erheblich seitwärts verläuft. Ob solche fehlerhafte Stellen im Material selbst liegen oder durch die Bearbeitung entstanden sind, ist selten zu entscheiden; bemerkenswerth ist, dass die am schlechtesten übereinstimmenden Reihen an Stäbchen erhalten sind, die keine vollständig ebenen Spaltungsflächen zeigten, und dass mehrfach Stäbchen, welche schon vor der Beobachtung wegen kleiner Vertiefungen in der polirten Oberfläche, die wohl von Hohlräumen im Steinsalz herrührten, als verdächtig notirt waren, schliesslich in der That eine besonders geringe Tragfähigkeit erwiesen.

Von den Beobachtungen ist der grössere Theil von Hrn. Sella ausgeführt, der kleinere von mir.

Die Untersuchung complicirte sich ausserordentlich durch einen Umstand, dessen Entdeckung wir als das wichtigste Resultat unserer Arbeit betrachten.

*Die Beobachtungen haben nämlich mit voller Sicherheit erwiesen, dass die Tragfähigkeit eines rechteckigen Prismas von krystallinischer Substanz nicht allein von der Orientirung der*

*Prismenaxe, parallel welcher der Zug wirkt, abhängt, sondern in sehr starkem Maasse auch von der Orientirung der das Prisma begrenzenden Seitenflächen.*

Diese ganz überraschende Thatsache widerlegt mit einem Schlage die oben citirte Vermuthung Hrn. Sohncke's, dass der Werth der Componente des auf das Prisma ausgeübten Zuges senkrecht zur Spaltungsfläche, längs deren der Bruch geschieht, für die Trennung des Zusammenhanges maassgebend sei, — denn offenbar ist diese Componente von der Orientirung der Seitenflächen ganz unabhängig, — sie gibt auch dem gestellten Problem eine viel grössere principielle Bedeutung.

Die durch sie bedingte Complication der Verhältnisse verlangte, um nur einigermaassen die stattfindenden Gesetzmässigkeiten hervortreten zu lassen, eine sehr grosse Anzahl verschiedener Messungen, aber selbst die benutzten 13 verschiedenen Orientirungen geben noch keinen vollständigen Ueberblick. Wahrscheinlich ist ein solcher nur durch die Verbindung theoretischer Betrachtungen mit den Beobachtungen zu gewinnen, und als Material zur Prüfung einer zu erwartenden Theorie sind die im Folgenden mitgetheilten Zahlen in erster Linie zu betrachten.

Die folgenden Tafeln enthalten zunächst eine kurze Charakteristik der einzelnen Gattungen von Stäbchen und eine geometrische Darstellung ihrer Orientirung. Für letztere sind auf Kugelflächen, welche in bekannter Weise durch die Hauptaxenebenen (Würfelebenen) der Krystallform getheilt sind, die Richtungen der Längsaxen der untersuchten Stäbe, parallel welchen der Zug ausgeübt wurde, durch von kleinen Kreisen umschlossene Punkte, die Richtungen ihrer Querdimensionen, durch Kreuze bezeichnet. So gibt ein Blick auf die Figur das vollständige Bild der Orientirung der betreffenden Präparate.

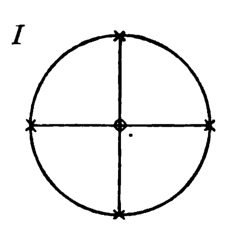
Ferner sind die Stäbchen jeder Gattung in der Reihenfolge ihrer Beobachtung aufgeführt, für jedes einzelne die Querdimensionen der dünnsten Stelle und der daraus berechnete Querschnitt $q$, das Gewicht $P$, bei welchem das Zerreissen eintrat, und die hieraus folgende Grenzspannung oder Tragfähigkeit pro Flächeneinheit $p = P/q$ mitgetheilt. Als Längen-

einheit ist das Millimeter, als Gewichtseinheit das Gramm gewählt.

Dass zur Berechnung von $p$ nicht der Querschnitt an der Bruchstelle, sondern der *kleinste* Querschnitt des Stäbchens benutzt ist, rechtfertigt sich dadurch, dass das Zerreissen an einer andern, als der schwächsten Stelle nur durch einen Fehler des Materiales bewirkt werden kann, und dass jedenfalls an der dünnsten Stelle eine Spannung $p = \bar{P}/q$ gewirkt hat, *ohne* das Zerreissen dort zu bewirken.

Da die Uebereinstimmung der erhaltenen Werthe $\bar{p}$ im allgemeinen nicht bedeutend ist, so sind alle mitgetheilten Zahlen auf drei Decimalstellen abgekürzt.

I

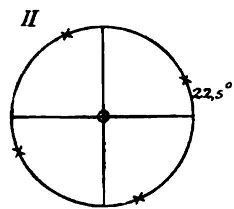


*Zugrichtung parallel einer Hauptaxe, Querdimensionen parallel den anderen, Orientirung gut. Bruch nach einer ebenen, glänzenden Spaltungsfläche.*

| Nr. | $q$ | $\bar{P}$ | $p$ | Bruchstelle |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,25 × 2,40 = 5,39 | 328o | 608 | ca. 0,5 mm von der Mitte |
| 2) | 2,27 × 2,39 = 5,43 | 305o | 562 | 1 „ „ |
| 3) | 2,24 × 2,40 = 5,36 | 307o | 572 | 0,5 „ „ |
| 4) | 2,21 × 2,38 = 5,27 | 308o | 584 | 0,6 „ „ |
| 6) | 2,25 × 2,39 = 5,38 | 306o | 568 | 0,7 „ „ |
| 7) | 2,93 × 3,06 = 8,95 | 512o | 566 | 2,5 „ „ |
| 9) | 2,94 × 3,06 = 9,08 | 530o | 588 | fast centrisch |
| 10) | 2,95 × 3,06 = 9,03 | 484o | 537 | „ |
| 11) | 2,93 × 3,06 = 8,98 | 499o | 556 | 1 mm von der Mitte |

Mittelwerth $\bar{p} = 571$.

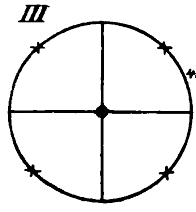
Ausgeschlossen ist Nr. 5, welches bei $q = 5,39$, $\bar{p} = 529$ ergab, da es in zu weiten Fassungen eingekittet und demgemäss schlecht centrirt war, Nr. 8 mit $q = 9,05$, $p = 423$ wegen einer ziemlich grossen Grube auf der Mitte der einen Fläche, Nr. 12 mit $q = 8,98$, $\bar{p} = 500$ wegen unregelmässiger Bruchfläche, die auf Störung der Krystallsubstanz an der Bruchstelle deutete. Ueberhaupt zeigten die dickeren Stäbchen, welche aus einem anderen Stück gefertigt waren, als die dünneren, meist kleine Schäden, einzelne feine Poren auf den Flächen und kleine Scharten in den Kanten.




*Zugrichtung parallel einer Hauptaxe, Querdimensionen um $22^1/_2{}^0$ gegen die anderen geneigt; Orientirung gut. Bruch nach einer ebenen, glänzenden Spaltungsfläche.*

| Nr. | $q$ | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ | Bruchstelle |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,16 × 2,19 = 4,73 | $312_0$ | 660 | ca. 0,5 mm von der Mitte |
| 2) | 2,17 × 2,18 = 4,73 | $336_0$ | 710 | „ 1,4 „ „ |
| 3) | 2,16 × 2,17 = 4,68 | $317_0$ | 678 | „ 0,2 „ „ |
| 4) | 2,16 × 2,17 = 4,68 | $340_0$ | 726 | „ 1,4 „ „ |
| 5) | 2,16 × 2,18 = 4,71 | $355_0$ | 758 | „ in der Mitte |
| 6) | 2,15 × 2,16 = 4,64 | $335_0$ | 721 | „ 1,2 „ von der Mitte |
| 7) | 2,17 × 2,18 = 4,73 | $354_0$ | 748 | „ 0,8 „ „ |

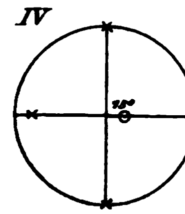
Mittelwerth $\bar{p}$ = **714.**




*Zugrichtung parallel einer Hauptaxe, Querdimensionen um 45° gegen die anderen geneigt; Orientirung gut. Bruch nach einer ebenen, glänzenden Spaltungsfläche.*

| Nr. | $q$ | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ | Bruchstelle |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,19 × 2,21 = 4,84 | $457_0$ | 945 | ca. 1,6 mm von der Mitte |
| 2) | 2,18 × 2,18 = 4,76 | $434_0$ | 913 | „ 0,2 „ „ |
| 3) | 2,19 × 2,19 = 4,80 | $433_0$ | 903 | „ 0,8 „ „ |
| 4) | 2,22 × 2,22 = 4,92 | $422_0$ | 858 | „ 0,6 „ „ |
| 5) | 2,19 × 2,20 = 4,82 | $454_0$ | 941 | „ 0,8 „ „ |
| 6) | 2,20 × 2,21 = 4,86 | $433_0$ | 890 | „ in der Mitte |
| 7) | 2,19 × 2,21 = 4,84 | $468_0$ | 967 | „ 1,8 „ von der Mitte |

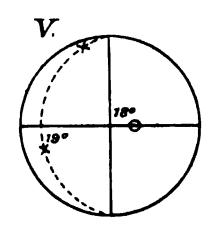
Mittelwerth $\bar{p}$ = **917.**




*Zugrichtung in einer Würfelebene um 15° gegen eine Hauptaxe geneigt, eine Querdimension in derselben Würfelebene; Orientirung gut. Bruch nach einer ebenen, glänzenden Spaltungsfläche.*

| Nr. | $q$ | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ | Bruchstelle |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,34 × 2,37 = 5,54 | $307_0$ | 554 | ca. 0,6 mm von der Mitte |
| 2) | 2,35 × 2,39 = 5,62 | $305_0$ | 543 | „ 0,4 „ „ |
| 3) | 2,36 × 2.40 = 5,64 | $282_0$ | 500 | in der Mitte |
| 4) | 2,35 × 2,41 = 5,66 | $329_0$ | 582 | „ 0,3 „ von der Mitte |
| 5) | 2,34 × 2,41 = 5,63 | $331_0$ | 588 | „ 0,4 „ „ |

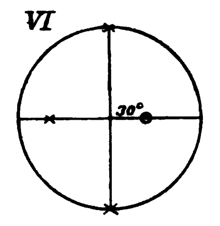
Mittelwerth $\bar{p}$ = **553.**




*Zugrichtung in einer Würfelebene um 18° gegen eine Axe geneigt, eine Querdimension im Winkel 19° gegen dieselbe Würfelebene; Orientirung befriedigend. Bruch nach einer glänzenden, ebenen Spaltungsfläche.*

| Nr. | $q$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ | Bruchstelle |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,71 × 2,83 = 7,67 | 345₀ | 450 | ca. 1 mm von der Mitte |
| 2) | 2,65 × 2,74 = 7,26 | 357₀ | 492 | „ 0,5 „ „ |
| 3) | 2,66 × 2,78 = 7,40 | 315₀ | 425 | „ 0,5 „ „ |
| 4) | 2,67 × 2,77 = 7,39 | 365₀ | 494 | „ 2 „ „ |
| 5) | 2,69 × 2,72 = 7,31 | 354₀ | 489 | „ 0,7 „ „ |
| 6) | 2,68 × 2,75 = 7,37 | 346₀ | 469 | „ 0,5 „ „ |

Mittelwerth $\overline{p} = 470$.

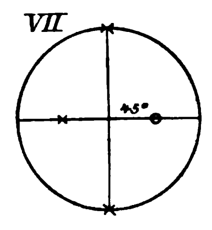



*Zugrichtung in einer Würfelebene im Winkel 30° gegen eine Hauptaxe, eine Querdimension in derselben Würfelebene; Orientirung gut. Bruch nach einer meist ebenen Spaltungsfläche.*

| Nr. | $q$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ | Bruchstelle |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,40 × 2,40 = 5,75 | 425₀ | 739 | ca. 2 mm von der Mitte |
| 2) | 2,40 × 2,45 = 5,89 | 419₀ | 712 | „ 0,8 „ „ |
| 3) | 2,41 × 2,45 = 5,90 | 441₀ | 747 | „ 0,2 „ „ |
| 5) | 2,41 × 2,45 = 5,90 | 456₀ | 773 | „ 0,4 „ „ |
| 6) | 2,39 × 2,43 = 5,81 | 414₀ | 713 | „ 1,2 „ „ |

Mittelwerth $\overline{p} = 737$.

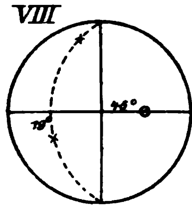
Ausgeschlossen ist Nr. 4 mit $q = 5{,}86$ und $\overline{p} = 678$ wegen stark unebener Bruchfläche.




*Zugrichtung in einer Würfelebene unter 45 gegen eine Hauptaxe, eine Querdimension in derselben Würfelebene; Orientiruny gut. Bruch nach ein, zwei oder vier meist ebenen und glänzenden Spaltungsflächen, die häufig das Stäbchen durchsetzen, sodass es in mehr als zwei Stücke zerfiel.*

| Nr. | $q$ | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ | Bruchstelle | Bruchfläche |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,00 × 2,05 = 4,10 | 4280 | 1040 | ca. 0,5 mm von der Mitte | 1 |
| 2) | 2,01 × 2,04 = 4,11 | 4790 | 1170 | „ 2 „ „ | 1 |
| 3) | 2,00 × 2,00 = 3,99 | 4830 | 1210 | „ 3,5 „ „ | 1 |
| 4) | 2,00 × 2,02 = 4,04 | 4330 | 1070 | nahe der Mitte | 1 |
| 5) | 1,96 × 2,04 = 4,00 | 4710 | 1180 | „ 2 „ von der Mitte | 2 |
| 6) | 1,99 × 2,01 = 4,01 | 4210 | 1050 | „ 1,5 „ „ | 1 |
| 7) | 2,04 × 2,04 = 4,16 | 5520 | 1320 | „ 0,5 „ „ | 4 |

**Mittelwerth $\bar{p}$ = 1150.**

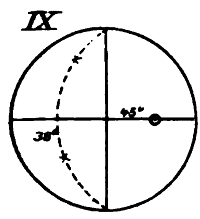



*Zugrichtung in einer Würfelebene, um 45° gegen eine Hauptaxe, eine Querdimension um 19° gegen dieselbe Würfelebene geneigt; Orientirung gut. Bruch meist nach zwei verzerrten Spaltungsflächen.* [1])

| Nr. | $q$ | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ | Bruchstelle |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,75 × 2,77 = 7,62 | 11930 | 1570 | ca. 2 mm von der Mitte |
| 2) | 2,69 × 2,77 = 7,47 | 12030 | 1610 | nahe der Mitte |
| 4) | 2,67 × 2,72 = 7,28 | 11250 | 1550 | „ 1 „ von der Mitte |
| 5) | 2,67 × 2,72 = 7,27 | 12690 | 1750 | „ 2 „ „ |

**Mittelwerth $\bar{p}$ = 1620.**

Ausgeschlossen ist Nr. 3 mit $q = 7{,}63$, $\bar{p} = 1180$ wegen der auffälligen Kleinheit des letzteren Werthes; ein Schaden war im Voraus am Stäbchen nicht wahrzunehmen.



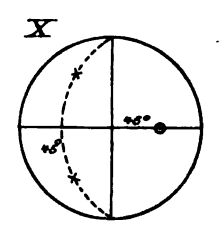

*Zugrichtung in einer Würfelebene, um 45° gegen eine Hauptaxe, eine Querdimension um 38° gegen dieselbe Würfelebene geneigt; Orientirung befriedigend. Bruch gewöhnlich nach zwei unebenen Spaltungsflächen.*

| Nr. | $q$ | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ | Bruchstelle |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,51 × 2,65 = 6,66 | 11510 | 1730 | nahe der Mitte |
| 2) | 2,51 × 2,62 = 6,57 | 10770 | 1640 | ca. 3 mm davon |
| 3) | 2,53 × 2,66 = 6,72 | 11210 | 1670 | nahe der Mitte |
| 4) | 2,55 × 2,63 = 6,69 | 11150 | 1670 | „ |
| 5) | 2,54 × 2,65 = 6,74 | 13200 | 1960 | ca. 2 mm davon. |

**Mittelwerth $\bar{p}$ = 1730.**

1) Bei den Stäbchen der Gattungen VIII, IX und X durchsetzten die beiden Spaltungsflächen häufig das Stäbchen nicht ganz, sondern trafen sich in der Mitte. Die hier entstehende Kante erschien öfter durch eine schmale Fläche von unregelmässiger Form — ungefähr einer Granatoederfläche parallel verlaufend — abgestumpft.

X



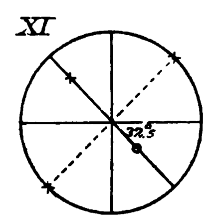
*Zugrichtung in einer Würfelebene unter 45° gegen eine Hauptaxe, die Querdimensionen um 45° gegen dieselbe Würfelebene geneigt; Orientirung befriedigend. Bruch meist nach zwei unebenen Spaltungsflächen, die sich mitunter kreuzen.*

| Nr. | $q$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ | Bruchstelle |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,18 × 2,25 = 4,90 | $874_0$ | $178_0$ | ca. 4 mm von der Mitte |
| 2) | 2,18 × 2,21 = 4,81 | $896_0$ | $186_0$ | „ 4 „ „ |
| 3) | 2,18 × 2,22 = 4,85 | $881_0$ (?) | $182_0$ | „ 4 „ „ |
| 4) | 2,19 × 2,21 = 4,83 | $862_0$ | $179_0$ | „ 4 „ „ |
| 5)* | 2,20 × 2.21 = 4,85 | $920_0$ | $190_0$ | nahe der Mitte |
| 6) | 2,18 × 2,23 = 4,86 | $889_0$ | $183_0$ | „ 5 „ von der Mitte |
| 7) | 2,20 × 2,22 = 4,88 | $907_0$ | $186_0$ | „ 3 „ „ |

Mittelwerth $\overline{p} = 184_0$.

Stäbchen Nr. 1 und 4 sind als etwas schadhaft nur mit halbem Gewicht bei der Bestimmung des Mittelwerthes berücksichtigt. Nr. 3 zerbrach infolge eines Stosses wohl etwas vorzeitig.

XI

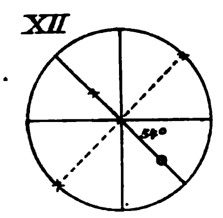


*Zugrichtung in einer Granatoederfläche, um ca. 32,5° gegen eine Hauptaxe geneigt, eine Querdimension in derselben Granatoederfläche; Orientirung sehr abweichend. Bruch nach einer mässig glatten Spaltungsfläche.*

| Nr. | $q$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ | Orientirung | Bruchstelle |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,22 × 2,23 = 4,97 | $1114_0$ | $224_0$ | 35° | ca. 3 mm v. d. Mitte |
| 2) | 2,22 × 2,23 = 4,94 | $934_0$ | $189_0$ | 32° | „ 3 „ „ |
| 3) | 2,18 × 2,20 = 4,78 | $827_0$ | $173_0$ | 31° | „ 3 „ „ |
| 4) | 2,21 × 2,21 = 4,88 | $802_0$ | $164_0$ | 29° | „ 2 „ „ |
| 6) | 2,19 × 2,19 = 4,80 | $820_0$ | $171_0$ | 31° | „ 0,5 „ „ |
| 7) | 2,21 × 2,23 = 4,92 | $991_0$ | $201_0$ | 34° | „ 3 „ „ |

Mittelwerth $\overline{p} = 187_0$, 32,4°.

Die hier besonders grosse Verschiedenheit der einzelnen $\overline{p}$ erklärt sich zum Theil aus der verschiedenen Orientirung. Ausgeschlossen ist Nr. 5 mit $q = 4,90$ wegen des sehr kleinen Werthes $\overline{p} = 140_0$.

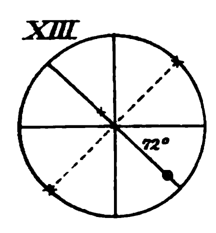



*Zugrichtung in einer Granatoederfläche unter $54^1/_3{}^0$ gegen eine Hauptaxe geneigt, eine Querdimension in derselben Granatoederfläche; Orientirung ziemlich gut. Bruch nach ein oder zwei meist unebenen Spaltungsflächen.*

| Nr. | $q$ | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ | Bruchstelle | Flächenzahl |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,15 × 2,20 = 4,74 | 1008o | 213o | nahe d. Mitte | 1 |
| 3) | 2,16 × 2,19 = 4,74 | 1052o | 222o | " | 1 |
| 4) | 2,13 × 2,18 = 4,63 | 1168o | 252o | " | 2 |
| 5) | 2,16 × 2,20 = 4,74 | 1066o | 225o | " | 2 |
| 6) | 2,17 × 2,19 = 4,75 | 908o | 191o | ca. 3 mm v. d. Mitte | 1 |
| 7) | 2,15 × 2,18 = 4,68 | 886o | 189o | " 3 " " | 1 |

**Mittelwerth $\bar{p}$ = 215o.**

Ausgeschlossen ist Nr. 2 mit $q = 4{,}78$ und $\bar{p} = 185$o als verdächtig.




*Zugrichtung in einer Granatoederfläche unter $72^0$ gegen eine Hauptaxe geneigt, eine Querdimension in derselben Granatoederfläche; Orientirung gut. Bruch nach zwei unebenen Spaltungsflächen.*

| Nr. | $q$ | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ | Bruchstelle |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,12 × 2,18 = 4,64 | 1057o | 228o | ca. 3 mm von der Mitte |
| 2) | 2,15 × 2,19 = 4,70 | 959o | 204o | " 3 " " |
| 3) | 2,12 × 2,18 = 4,62 | 1080o | 234o | " 3 " " |
| 4) | 2,13 × 2,19 = 4,67 | 1103o | 236o | " 2 " " |
| 5) | 2,14 × 2,20 = 4,71 | 1059o | 225o | " 3 " " |
| 6) | 2,14 × 2,21 = 4,72 | 1023o | 217o | " 1 " " |

**Mittelwerth $\bar{p}$ = 224o.**

Dass der Werth $\bar{p}$ für die Gattung XIII grösser, als der für XII ausgefallen ist, liegt offenbar nur daran, dass bei XII einige Stächen besonders abweichend kleine Werthe ergeben haben; nach Symmetrie muss offenbar XII den grössten Werth $\bar{p}$ liefern.

Von den vorstehend aufgeführten 13 Gattungen von Stäbchen hat Hr. Sohncke I, VII und XII benutzt; reducirt man die von ihm mitgetheilten Zahlen auf Gramme, indem

man benutzt, dass ein preussisches Loth = 15,59 g ist, so erhält man

| I | VII | XII |
|---|---|---|
| 545 | 1085 | 1170; |

wir fanden resp.

| | | |
|---|---|---|
| 571 | 1150 | 2150. |

Namentlich die letzte Zahl lässt die Wirkung der verbesserten Beobachtungsmethode hervortreten.

Was nun das vollständige System der von uns erhaltenen Werthe angeht, so überrascht zunächst ihre grosse Verschiedenheit; die Gattung V liefert für $\bar{p}$ die untere Grenze mit 470 g, die Gattung XIII die obere mit 2240 g, welche nahezu das fünffache von jener ist.

Zur bequemeren Uebersicht wollen wir die Resultate in einige Reihen gruppiren.

*1) Stäbe mit der Längs- und einer Querrichtung in einer Würfelebene.*

Bezeichnet $\varphi$ den Winkel der Längsaxe mit einer Hauptaxe, so entspricht sich:

| $\varphi$ = | 0° | 15° | 30° | 45° |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{p}$ = | 571 | 553[1] | 737 | 1150. |

*2) Stäbe mit der Längs- und einer Querrichtung in einer Granatoederfläche.*

Bezeichnet $\psi$ den Winkel der Längsaxe gegen eine Hauptaxe, so entspricht sich:

| $\psi$ = | 0° | 32° | $54\frac{1}{2}$° | 72° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{p}$ = | 917 | $187_0$ | $215_0$ | $224_0$ | $184_0$. |

*3) Stäbe mit der Längsrichtung in einer Hauptaxe.*

Bezeichnet $\chi$ den Winkel der Querdimensionen gegen die beiden anderen Axen, so entspricht sich:

| $\chi$ = | 0° | $22\frac{1}{2}$° | 45° |
|---|---|---|---|
| $\bar{p}$ = | 571 | 714 | 917. |

*4) Stäbe mit der Längsrichtung in der Halbirungslinie des Winkels zweier Hauptaxen.*

---

1) Dieser Werth dürfte wohl nur durch einen Zufall etwas kleiner sein, als der vorhergehende.

Bezeichnet $\omega$ den Winkel der einen Querdimension gegen die Ebene derselben zwei Axen, so entspricht sich:

| $\omega =$ | $0^0$ | $19^0$ | $38^0$ | $45^0$ |
|---|---|---|---|---|
| $p =$ | 115o | 162o | 173o | 184o. |

Von diesen Reihen erwecken die letzten beiden das grösste Interesse, denn sie sprechen die bereits oben angekündigte merkwürdige Thatsache aus, dass die Tragfähigkeit eines rechteckigen Prismas sehr bedeutend von der Orientirung seiner Seitenflächen abhängt. Für beide Axenrichtungen ist $\bar{p}$ am kleinsten, wenn eine der Seitenflächen in eine Würfelfläche fällt, am grössten, wenn sie um $45^0$ dagegen geneigt ist; das Verhältniss des Maximal- und Minimalwerthes ist beide Male fast genau gleich, nämlich = 1,6, was gewiss nicht zufällig ist.

Um die sonderbare Erscheinung weiter zu verfolgen, haben wir einige Sorten Stäbchen in rein prismatischer Form herstellen lassen und ihre Tragfähigkeit bestimmt, während sie an ihren Enden auf festen Lagern ruhten und in der Mitte belastet wurden.

Man betrachtet in der Regel die mittleren Querschnitte eines so gebogenen Stabes als unter der Wirkung longitudinaler Zugkräfte stehend, welche, wenn man die $Z$-Axe in die Gerade durch die Schwerpunkte der Querschnitte, die $X$-Axe in die Biegungsrichtung des Stabes legt, die Form haben:

$$Z_z = -f_1 x.$$

Das Moment $M$ dieser Kräfte über den ganzen Querschnitt summirt, muss dem von aussen wirkenden gleich sein, nämlich, wenn $P$ die Belastung, $L$ die Länge des Stabes, $\varkappa_y$ der Trägheitsradius seines Querschnittes um die $Y$-Axe ist,

$$M = -\int x Z_z dq = f_1 q \varkappa_y^2 = \tfrac{1}{4} P L.$$

Ist der Querschnitt rechteckig von der Breite $B$ und der Dicke $D$, so ist $\varkappa_y^2 = D^2/12$, also

$$f_1 = \frac{3PL}{BD^3} \text{ und } Z_z = -\frac{3PLx}{BD^3}.$$

Die grösste Spannung ist an der Oberfläche vorhanden, wo $x = D/2$ ist; es folgt sonach deren Maximalwerth $\bar{p}$ durch die Maximalbelastung $\bar{P}$ ausgedrückt:

$$\bar{p} = \frac{3\bar{P}L}{2BD^2}.$$

Nach dieser Formel sind die folgenden Beobachtungen berechnet.

Sie betreffen zunächst zwei Gattungen *W* I und *W* II von Prismen, deren Längsaxen in einer Hauptaxe liegen, und deren Seitenflächen resp. entweder mit Würfelflächen oder Granatoederflächen zusammenfallen, also der Orientirung nach mit I und III in der obigen Tafel übereinstimmen. Die Länge war bei allen gleich 20 mm.

*W* I (Seitenflächen parallel Würfelflächen).

| Nr. | $D$ | $B$ | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ | Bruchstelle |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | 1,97 | 1,95 | 309 | $122_0$ | 0,5 mm von der Mitte |
| 2) | $1,96_5$ | 1,99 | 270 | $106_0$ | 0,5 „ „ |
| 4) | 1,96 | $1,94_5$ | 314 | $126_0$ | 0,3 „ „ |
| 5) | $1,96_5$ | 1,93 | 290 | $116_0$ | 0,3 „ „ |
| 6) | 1,98 | 1,96 | 307 | $120_0$ | 0,5 „ „ |
| 7) | 1,97 | 1,94 | 310 | $123_0$ | 0,3 „ „ |

**Mittelwerth $\bar{p} = 119_0$.**

Ausgeschlossen ist Nr. 3 mit $\bar{p} = 968$ als verdächtig.

*W* II (Seitenflächen parallel Granatoederflächen).

| Nr. | $D$ | $B$ | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ | Bruchstelle |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | 1,98 | $1,96_5$ | 468 | $182_0$ | 0,5 mm von der Mitte |
| 2) | 1,96 | 1,97 | 504 | $199_0$ | 0,5 „ „ |
| 3) | 1,96 | $1,98_5$ | 484 | $191_0$ | central |
| 4) | 1,98 | 1,96 | 485 | $190_0$ | „ |
| 5) | 1,98 | 1,96 | 487 | $190_0$ | 0,3 „ „ |
| 6) | 1,97 | 1,96 | 472 | $186_0$ | 0,5 „ „ |

**Mittelwerth $\bar{p} = 190_0$.**

Das Verhältniss dieser beiden Werthe ist wiederum genau gleich 1,6, wie oben; die grosse Uebereinstimmung lässt schliessen, dass die Erscheinung keine secundäre, durch Störungen verursachte ist.

Ferner wurde eine Anzahl Stäbchen, deren Längsaxe die Winkel zweier Hauptaxen halbirte, und deren eine Fläche in eine Würfelebene, deren andere in eine Granatoederebene fiel (Gattung VII der obigen Zusammenstellung), durch Biegen zerbrochen, und zwar so, dass die Biegung einmal nach der Richtung senkrecht zur Würfefläche, das andere Mal senkrecht zur Granatoederfläche stattfand; das Brechen geschah nahe central.

*G* I (Biegung normal zur Würfelfläche).

| Nr. | *L* | *B* | *D* | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | 26,0 | $1,94_5$ | $1,94_5$ | 511 | $271_0$ |
| 2) | 26,0 | 1,94 | 1,95 | 528 | $279_0$ |
| 3) | 15,5 | 1,97 | 1,96 | 1119 | $343_0$ |
| 4) | 26,0 | 1,95 | 1,97 | 600 | $320_0$ |
| 5) | 26,0 | 1,93 | 1,95 | 652 | $348_0$ |
| 6) | 26,0 | 1,94 | 1,95 | 671 | $354_0$ |

Mittelwerth $\bar{p} = 318_0$.

*G* II (Biegung normal zur Granatoederfläche).

| Nr. | *L* | *B* | *D* | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | 19,6 | 1,97 | $1,94_5$ | 827 | $327_0$ |
| 2) | 26,0 | 1,96 | 1,94 | 612 | $324_0$ |
| 3) | 17,0 | 1,96 | 1,95 | 930 | $316_0$ |
| 4) | 26,0 | 1,97 | 1,95 | 633 | $330_0$ |
| 5) | 26,0 | 1,96 | 1,94 | 486 | $258_0$ |
| 6) | 26,0 | 1,94 | 1,92 | 533 | $289_0$ |

Mittelwerth $\bar{p} = 307_0$.

Diese Werthe stimmen überein, *es findet sich also keine Verschiedenheit der Tragfähigkeit, wenn man dasselbe Stäbchen nach seinen zwei verschiedenwerthigen Querdimensionen biegt.*

Vergleicht man die absoluten Werthe der Grenzspannungen $p$, welche die Biegungsbeobachtungen ergeben haben, mit den beim Zerreissen erhaltenen, so finden sich die ersteren viel grösser als die letzteren. Dies Resultat ist gleichfalls vollständig unerwartet und im Widerspruch mit dem von Hrn. Kowalski am Glase gefundenen. Die Untersuchung dieser Frage verschiebe ich indessen und kehre zu der eigentlichen Veranlassung der Biegungsbeobachtungen zurück.

Wenn durch Vorstehendes als unzweifelhaft festgestellt betrachtet werden darf, dass bei Dehnung und Biegung die Grenzspannung eines rechteckigen Prismas aus krystallinischer Substanz bei gleicher Richtung seiner Axe von der Orientirung seiner Seitenflächen abhängt, so bietet sich nun die Aufgabe, diese sonderbare Thatsache zu erklären. Die Heranziehung von Sprüngen, die in den verschieden orientirten Oberflächenschichten durch die Bearbeitung verschieden tiefgehend entstehen könnten, wird durch die beobachteten Thatsachen meines Erachtens vollkommen unmöglich gemacht. Es spricht dagegen die enorme Grösse der erhaltenen Unterschiede, die tadellose Politur der Oberflächen und das durchaus regelmässige optische

Verhalten der gespannten Prismen im belasteten Zustande bei Betrachtung mit polarisirtem Lichte. Es spricht dagegen die Gleichheit des bei Biegung und Dehnung erhaltenen Verhältnisses Max : Min = 1,6, denn die Biegungsbeobachtungen waren mit *eben* geschliffenen Stäben eingestellt, die Dehnungsbeobachtungen mit *hohl* geschliffenen, die eine wesentlich verschiedene Bearbeitung erfahren hatten. Es spricht dagegen die vollkommene Uebereinstimmung des *elastischen* Verhaltens der Gattungen *W* I und *W* II, welche durch besondere Messungen constatirt ist. Und entscheidend widerlegt sie, wie mir scheint, die Thatsache, *dass bei derselben Orientirung die Grenzspannung* $\bar{p} = \bar{P}/q$ *von der Grösse des Querschnittes unabhängig ist;* denn wenn die Querschnitte der Stäbe durch oberflächliche Sprünge geschwächt würden, müsste dies offenbar bei grösseren Querschnitten in verhältnissmässig geringerem Maasse stattfinden, als bei kleineren. Die mit der Gattung I angestellten Beobachtungen beweisen aber, dass, wenn überhaupt eine Verschiedenheit von $\bar{p}$ für dickere oder dünnere Stäbe vorhanden ist, diese gerade im entgegengesetzten Sinne stattfindet.

Nach mancherlei Ueberlegungen scheint uns gegenwärtig folgende Erklärung die einzig haltbare zu sein.

Dass die Oberflächenschicht eines festen Körpers infolge der Molecularkräfte eine andere Constitution besitzt, als die inneren Theile, ist nicht zu bezweifeln, und man muss, nachdem die Elasticitätsbeobachtungen eine Abhängigkeit der inneren Drucke von der Richtung ergeben haben, annehmen, dass auch diese Oberflächenschicht mit der Orientirung der Grenzflächen wechselt. Ihre Dicke muss gegen die Dimensionen der gewöhnlich benutzten Beobachtungsobjecte unmerklich sein, denn sonst könnten die Elasticitätsmessungen einerseits nicht den theoretisch geforderten Zusammenhang zwischen Deformation und Dimension ergeben, andererseits müsste die Biegung eines Stabes von der Orientirung seiner Seitenflächen abhängen, was, wie oben erwähnt, nach mit den Gattungen *W* I und *W* II angestellten Messungen in Wirklichkeit nicht stattfindet.

Aber diese unmerklich dünne, in ihrem Verhalten nach Innen zu stetig in den normalen Zustand der Materie übergehende Schicht kann trotzdem die Tragfähigkeit stark beeinflussen, *wenn sie die Eigenschaft hat, bei einer geringeren*

*Dehnung zu zerreissen, als ein Faden im Inneren.* Denn ein bei einer gewissen Dehnung entstehender Riss in der Oberflächenschicht bedeutet eine Schwächung des bezüglichen Querschnittes und breitet sich nothwendig, da die inneren Spannungen mit abnehmendem Querschnitt wachsen, über den ganzen Querschnitt aus.

*Die Eigenschaft, welche die Tragfähigkeit bestimmt, würde hiernach, beim Steinsalz wenigstens, nicht eine Volumen-, sondern eine Flächenfestigkeit sein,* und da eine solche sowohl von der Orientirung der bezüglichen Fläche, als auch von der Lage der Zugrichtung in derselben abhängen muss, so ist begreiflich, dass die experimentelle Untersuchung der Zugfestigkeit sehr mannigfaltige und schwer zu übersehende Resultate liefern wird. Die Verhältnisse compliciren sich noch dadurch, dass man bei Prismen, die von krystallographisch verschiedenwerthigen Flächen begrenzt sind, von vorn herein nicht wissen kann, welches der beiden Flächenpaare dasjenige geringerer Oberflächenfestigkeit ist, auf welchem also das Brechen eigentlich begonnen hat. Von den von uns benutzten Stäben haben nur diejenigen der Gattungen I, II, III und X gleichwerthige Flächenpaare, geben also nur diese eindeutige Werthe.

Die Annahme dieser Oberflächenfestigkeit erklärt unseres Erachtens auch besonders ungezwungen die trotz des besten Materiales und trotz der grössten aufgewandten Vorsicht noch immer nur mässige Uebereinstimmung der erhaltenen Resultate, denn sie lässt die Einwirkung der mechanischen Behandlung, eventuell Beschädigung der Oberfläche auf die Tragfähigkeit als nahezu selbstverständlich erscheinen.

Gegen die vorgeschlagene Erklärung würde geltend gemacht werden können, dass die *Kanten* der Prismen in Wahrheit scharf gekrümmte Cylinderflächen sind, dass also z. B. unsere Präparate I, II und III dieselben Flächen nur in verschiedener Grösse besitzen, und dass sie hiernach gleiche Werthe $\bar{p}$ ergeben müssten. Indessen könnte man dagegen wohl mit Recht bemerken, dass einerseits bei so starker Krümmung die Oberflächenschicht geändert sein dürfte, andererseits ein Sprung in einer *Kante* eine Schwächung des Querschnittes bewirkt, die nur unendlich klein ist gegen die durch einen Sprung in einer *Fläche* erzielte, und deshalb viel-

leicht keine Wirkung äussert. Ueberdies sind bei der von uns benutzten Gestalt der Präparate diejenigen Elementarfäden, welche in den Kanten liegen, offenbar etwas weniger gespannt, als die übrigen. Eben diese Ueberlegungen veranlassen uns überhaupt, den Beginn des Zerreissens in eine *Fläche* zu legen und nicht in eine *Kante*, wozu man sonst wohl neigen könnte; auch würde die letztere Annahme bei Cylindern von stetig gekrümmtem Quersohnitt Schwierigkeiten bereiten.

Noch scheint gegen unsere Erklärung die oben mitgetheilte Beobachtung zu sprechen, dass ein von zwei verschiedenwerthigen Flächenpaaren begrenztes rechteckiges Prisma nach der einen oder anderen Querdimension gebogen, merklich dieselbe Grenzspannung $\bar{p}$ aushält. Aber es ist wohl zu bedenken, dass, wenn die Biegung normal zu den Flächen grösserer Festigkeit geschieht, die ihr benachbarten Theile der Flächen geringerer Festigkeit nahe dieselbe Spannung erfahren, wie die eine der ersteren, und demgemäss sehr wohl ihre Grenzspannung *eher* erreichen können, als die absolut am stärksten gespannte Fläche grösserer Festigkeit.

Selbstverständlich halten wir aber die als Hypothese eingeführte Oberflächenfestigkeit noch fernerer Untersuchung bedürftig; darauf zielende Beobachtungsreihen sind bereits im Gange.

## VI. *Einige Beobachtungen über die Drillungsfestigkeit von Steinsalzprismen; von W. Voigt.*

Jede Deformation eines elastischen Körpers stellt sich bekanntlich dar als eine gleichförmige Dilatation der einzelnen Volumenelemente nach drei zu einander senkrechten Richtungen. Man würde demgemäss die Gesetze der Cohäsion im ganzen Umfange und auf die einfachste Weise ableiten können, wenn man die Mittel hätte, prismatische Präparate nach den drei Kantenrichtungen gleichförmig, aber um verschiedene und beliebige Beträge zu dilatiren und zu comprimiren. Leider scheint dies nicht möglich zu sein, und man muss sich daher bei der Beobachtung auf specielle Fälle beschränken, aus denen die allgemeinen Gesetze bisher noch nicht haben abgeleitet werden können.

Der eine dieser Fälle hat der von Hr. Sella und mir unlängst mitgetheilten [1]) Beobachtungsreihe über die Zerreissungsfestigkeit des Steinsalzes zu Grunde gelegen, nämlich derjenige, bei welchem die parallel zwei Kantenrichtungen wirkenden Spannungen verschwinden. Eine Verallgemeinerung würde erhalten werden, wenn es gelänge, jene zwei Spannungen von Null verschieden, aber einander gleich, und die dritte davon verschieden zu machen; dieses scheint in der That möglich zu sein, und ich bin mit den bezüglichen Versuchen beschäftigt.

Einen zweiten, ebenso speciellen Fall, wie den früher benutzten, liefert die Drillung gewisser Cylinder aus homogener isotroper oder krystallinischer Substanz.

Bei der Drillung sind jederzeit die Oberflächenelemente mehr gespannt, als die inneren; es ist daher hier von vornherein klar, dass das Zerreissen an der Oberfläche beginnen und ins Innere fortschreiten wird.

Legen wir in ein Oberflächenelement ein Axensystem

1) Vgl. die vorstehende Arbeit.

$NPS$, dessen $N$-Axe parallel der Normalen, dessen $P$-Axe parallel der Cylinderaxe und dessen $S$-Axe daher in die Tangente der Querschnittscurve fällt, so ist wegen der Grenzbedingungen für die freie Oberfläche *stets*

$$N_n = 0, \; P_n = N_p = 0, \; S_n = N_s = 0,$$

also nur $S_s$, $P_p$ und $P_s = S_s$ von Null verschieden.

In gewissen wichtigen Specialfällen — nämlich stets 1) wenn der Cylinder isotrop ist, 2) wenn er zwar aus einem Krystall hergestellt ist, aber elliptischen Querschnitt besitzt, 3) wenn er rechteckigen Querschnitt hat und seine Axe normal zu einer krystallographischen Symmetrieebene steht — ist aber auch noch

$$P_p = S_s = 0,$$

also einzig $P_s = S_p$ von Null verschieden.

In diesen Fällen bilden die Spannungen ein besonders einfaches System. Die Hauptdruckaxen liegen parallel $N$ und den beiden Halbirungslinien $H$ und $K$ der Winkel zwischen den Axen $P$ und $S$, und zwar ist von den Hauptdrucken $N_n = 0$, $H_h = - K_k$.

*Die oben angeführten Fälle der Drillung gestatten also, die Festigkeit eines prismatischen Volumenelementes zu untersuchen, welches auf zweien seiner Flächenpaare entgegengesetzt gleiche, auf dem dritten aber verschwindende Normaldrucke erfährt.*

Es schien mir von Interesse, bei Steinsalz in der angedeuteten Richtung einige Beobachtungen auszuführen, um so mehr, als die Fragmente der bei den Biegungsbeobachtungen benutzten Stäbchen[1]) geeignetes Material darboten.

Die Stäbchen der beiden Gattungen $W$ I und $W$ II lagen mit ihren Längsrichtungen in Würfelnormalen, ihre Seitenflächen waren resp. mit Würfel- und Granatoëderflächen parallel; die Orientirung entsprach also der unter 3) gegebenen Bedingung.

Für die Beobachtung wurden die Stäbchen mit ihren Enden in rechtwinklige, schwach conische Klötze gekittet und der eine dieser Klötze in eine geeignete Oeffnung in einer horizontal befestigten Messing-Platte gesteckt, sodass das Stäbchen vertical stand; auf den andern Klotz wurde dann

1) l. c.

eine leichte Messingrolle vom Radius $R = 40$ mm, welche in der Axe ebenfalls eine passende Oeffnung trug, aufgelegt und gegen ihre Peripherie mittelst einer an zwei Fäden aufgehangenen Waagschaale ein veränderlicher, tangentialer Zug ausgeübt. Die Belastung geschah, wie bei früheren Versuchen, durch langsam zufliessendes Quecksilber.

Obgleich die benutzten Präparate meist eine Gesammtlänge von nur 10 mm, also eine freie Länge zwischen den Fassungen von nur 5—6 mm besassen, so verliefen die Beobachtungen doch ganz regelmässig; das Brechen fand niemals innerhalb der Fassungen, sondern stets auf dem freien Theil der Länge statt.

Bei den Stäbchen der Gattung $W$ I fand nach dem oben Gesagten die grösste Spannung in der Richtung einer Granatoëdernormalen, bei denen der Gattung $W$ II wenig abweichend von einer Octaedernormalen statt; wenn daher nur die Grösse und Richtung dieser Kraft für den Vorgang maassgebend wäre, so müsste das Zerreissen in ähnlicher Weise stattfinden, wie bei der Anwendung einseitigen Zuges auf Prismen, deren Längsaxen in den betreffenden Richtungen liegen.

Die Beobachtung ergibt nun aber ein durchaus anderes Verhalten.

Während bei einseitigem Zug die Steinsalzprismen durchaus nach Spaltungsflächen rissen, liegen bei der Drillung die Bruchflächen senkrecht zur Richtung des grössten Zuges; sie schneiden die Seitenflächen der Prismen in Geraden, welche um 45° gegen die Längsrichtung geneigt sind und sich nicht selten spiralartig über drei Seitenflächen hinweg fortsetzen, während auf der vierten meist ein verzerrter Längsspalt die Curve schliesst.

Dies Resultat ist sehr merkwürdig und eröffnet die Aussicht auf interessante Aufklärungen über das Wesen der Spaltbarkeit; vielleicht kann die im Eingang erwähnte Versuchsanordnung dazu beitragen, sie zu gewinnen.

Was nun die Berechnung der numerischen Resultate angeht, so ist dafür folgende Ueberlegung anzustellen.

Bei den benutzten Orientirungen der Steinsalzstäbchen reduciren sich die Gleichungen für die Torsion eines rechteckigen Prismas auf die für unkrystallinische Medien gelten-

den; man kann also, weil die Querdimensionen sehr nahe gleich sind, ohne weiteres die von Saint-Venant[1]) für quadratische isotrope Prismen erhaltenen Resultate auf unsere Präparate zur Anwendung bringen.

Bezeichnet $M$ das ausgeübte Moment, $L$ die Länge, $D$ die Dicke des Prismas (d. h. die Seite des Querschnittsquadrates), $\tau$ den Drillungswinkel und $s_{44}$ den Drillungscoëfficienten, so gilt die Beziehung[2])

$$M = \frac{0{,}1405 \, . \, D^4 \tau}{L \, s_{44}}.$$

Ferner ist der Maximalwerth von $P_s$, welcher in der Mitte der Seiten des Querschnittsquadrates stattfindet[3])

$$\overline{P}_s = \frac{0{,}675 \, D \overline{\tau}}{L \, s_{44}}.$$

Hieraus folgt

$$\overline{P}_s = \frac{4{,}8 \, \overline{M}}{D^3};$$

da aber $P_s$ die einzige von den sechs auf das System $NPS$ bezogenen Druckcomponenten ist, die nicht verschwindet, so werden die beiden in den Halbirungslinien der Winkel zwischen $P$ und $S$ wirkenden Hauptdrucke

$$\overline{p} = \pm \overline{P}_s,$$

und, da das wirkende Moment $M = PR$ ist, falls $P$ die angebrachte Belastung und $R$ den Hebelarm bezeichnet, so folgt schliesslich

$$\overline{p} = \pm \frac{4{,}8 \, PR}{D^3}.$$

Nach dieser Formel sind die folgenden Beobachtungen berechnet; für $D$ ist das Mittel aus den beiden sehr nahe gleichen Querdimensionen $D_1$ und $D_2$ gesetzt. Alle Zahlen sind, der geringen Genauigkeit wegen, auf drei Stellen abgekürzt.

---

1) Saint Venant, Sav. étrang. 14. p. 233. 1856.
2) l. c. p. 382.
3) l. c. p. 396.

*W* I (Seitenflächen parallel Würfelflächen).

| Nr. | $D_1$ | $D_2$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 1,95 | 1,975 | 114 | 2900 |
| 2) | 1,94 | 1,955 | 103 | 2680 |
| 3) | 1,92 | 1,955 | 103 | 2720 |
| 4) | 1,94 | 1,95 | 106,5 | 2780 |
| 5) | 1,94 | 1,96 | 105 | 2720 |
| 6) | 1,92 | 1,95 | 103 | 2730 |
| 7) | 1,92 | 1,95 | 100 | 2650 |

Im Mittel $\overline{p} = 2740$

Die Uebereinstimmung der Resultate für $\overline{p}$ ist sehr befriedigend.

Zur Controle, ob die obige Formel den Werth der Grenzspannung $p$ für verschieden dicke Prismen richtig angibt, habe ich einige Präparate von ungefähr doppelten Querdimensionen gleichfalls der Beobachtung unterworfen. Die Resultate sind weniger sicher, wie die vorigen, weil die benutzten Stäbchen sehr kurz waren, — ihre freie Länge übertraf nur wenig ihre Dicke, — und in einem solchen Fall die gewöhnliche Theorie der Drillung eigentlich nicht mehr anwendbar ist.

| Nr. | $D_1$ | $D_2$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 8) | 3,98 | 3,99 | 899 | 2720 |
| 9) | 4,00 | 4,01 | 946 | 2830 |
| 10) | 3,99 | 4,01 | 791 | 2370 |
| 11) | 3,99 | 4,00 | 845 | 2550 |
| 12) | 3,98 | 3,99 | 928 | 2810 |
| 13) | 3,99 | 4,02 | 910 | 2720 |

In Rücksicht auf die eben gemachte Bemerkung kann man durch diese Zahlen die Richtigkeit der Formel als erwiesen betrachten.

*W* II (Seitenflächen parallel Granatoëderflächen).

| Nr. | $D_1$ | $D_2$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 1,95 | 1,995 | 109 | 2730 |
| 2) | 1,955 | 1,96 | 111 | 2840 |
| 3) | 1,94 | 1,97 | 110 | 2830 |
| 4) | 1,955 | 1,975 | 122,5 | 3100 |
| 5) | 1,94 | 1,96 | 106 | 2750 |
| 6) | 1,96 | 1,98 | 107 | 2740 |

Im Mittel $\overline{p} = 2830$

Diese Beobachtungen stimmen unter einander nicht ganz so gut, als wie die vorigen, — namentlich ergibt Nr. 4) einen

ungewöhnlich hohen Werth für $\bar{p}$, der irgend eine Störung im Apparat vermuthen lässt. Zieht man dies in Rücksicht, so sind die für beide Gattungen von Stäbchen erhaltenen Grenzspannungen $\bar{p}$ als sehr nahezu gleich zu bezeichnen; dies ist ein unerwartetes Resultat, wenn man bedenkt, dass bei einseitigem Zug unter sonst gleichen Verhältnissen, auch bei gleicher Lage der Begrenzungsfläche $\bar{p}$ resp. gleich 115,0 und 200,0 gefunden worden ist. Auch die absolute Grösse der obigen Werthe ist überraschend; da neben der Zugkraft ein gleich grosser Druck in einer zur ersteren normalen Richtung stattfindet und dieser noch einen Antheil zu der durch die Zugkraft bewirkten, ihr parallelen, Längsdehnung hinzufügt, so hätte man eher kleinere Werthe $\bar{p}$, als bei blos einseitigem Zug, erwarten mögen.

Es bleibt zu untersuchen — und diese Frage hoffe ich bald entscheiden zu können — ob auch unter anderen Umständen ein seitlicher Druck die Zugfestigkeit einer Substanz vergrössert. —

Von einer Ausdehnung der Drillungsbeobachtungen auf anders orientirte Steinsalzprismen habe ich zunächst abgesehen, einmal, weil mir dafür kein Material zur Hand war, und sodann, weil nur für wenige specielle Orientirungen die Theorie der Drillungsdeformation durchführbar ist; ohne eine solche ist aber eine Verwerthung der Beobachtung nicht möglich.

Göttingen, Neujahr 1893.

## VII. *Beobachtungen über die Zerreissungsfestigkeit von Bergkrystall und Flussspath; von W. Voigt.*

Die überraschenden Resultate, welche die von Hrn. A. Sella und mir angestellten Beobachtungen[1]) über die Zerreissungsfestigkeit des *Steinsalzes* ergeben haben, liessen eine Ausdehnung der Untersuchungen auf andere Krystalle als durchaus nothwendig erscheinen.

Von diesen bietet der *Bergkrystall*, neben der Leichtigkeit der Beschaffung genügenden Materiales, das besondere Interesse, dass er nur sehr unvollkommen spaltbar ist, sich hierin also beträchtlich vom Steinsalz unterscheidet. Es war daher zu erwarten, dass die der Untersuchung unterworfenen Präparate im allgemeinen *nicht* nach Spaltungsflächen reissen würden, sodass hier die Beobachtung an ganz veränderte Verhältnisse anzuknüpfen hätte.

Die Bergkrystallpräparate sind wiederum von Hrn. Dr. W. Steeg und Reuter im Bad Homburg vortrefflich hergestellt worden. Ihre Form war die bei Steinsalz angewandte und früher beschriebene. Stäbchen von ca. 30 mm Länge und einem quadratischen Querschnitt von ca. 2,5 mm Seite wurden auf allen vier Seitenflächen mittelst eines Kreiscylinders etwas hohl geschliffen, bis in der Mitte der Länge die Querdimensionen auf ca. 2,2 mm reducirt waren; die Höhlungen wurden fein polirt, die prismatischen Endstücken aber matt belassen.

Bei der Wahl der Orientirungen waren die durch die Untersuchung des Steinsalzes gewonnenen Resultate zu benutzen. Dort hatte sich ergeben, dass die Tragfähigkeit eines Prismas von der Orientirung seiner Seitenflächen abhängt, und dass daher klare Resultate nur mit Prismen erhalten werden können, deren Seitenflächen sämmtlich physikalisch gleichwerthig sind.

*Physikalisch* gleichwerthig sind nun jedenfalls alle *krystal-*

1) Vgl. die oben unter Nr. V stehende Arbeit.

*lographisch* gleichwerthigen Flächen; da die Cohäsionserscheinungen aber nothwendig ein Symmetriecentrum besitzen müssen, so ordnet sich einer jeden Fläche noch die in Bezug auf das Symmetriecentrum gegenüberliegende hinzu.

Hiernach sind bei Bergkrystall nur diejenigen rechteckigen Prismen von lauter gleichwerthigen Seitenflächen begrenzt, deren Längsrichtung senkrecht zu einer zweizähligen Symmetrieaxe steht, und deren Querdimensionen Winkel von $45^0$ mit ihr einschliessen.

Auf solche Prismen beziehen sich die meisten der von mir angestellten Beobachtungen. Legt man die $Z$-Coordinatenaxe in die dreizählige Hauptaxe, die $X$-Axe in eine der zweizähligen Nebenaxen und lässt die positive $Y$-Axe aus einer der drei um die positive $Z$-Axe gelagerten Flächen $+R$ austreten, bezeichnet man ferner den Winkel der Längsaxe des Stäbchens gegen die $Z$-Axe (nach der $+Y$-Axe hin positiv gerechnet) mit $\varphi$, so liegen die von mir untersuchten Präparate der beschriebenen Art mit ihrer Längsrichtung in der $YZ$-Ebene und entsprechen den Winkeln

$$\varphi = 0^0,\ 30^0,\ 60^0,\ 90^0,\ 120^0,\ 150^0.$$

Ausser ihnen habe ich nur noch drei Gattungen von Prismen beobachtet, bei denen sämmtliche Kanten mit Coordinatenaxen zusammenfielen. Sie sollten die Fragen entscheiden: 1) ob auch bei Prismen, deren Längsaxe in die krystallographische Hauptaxe fällt, die Tragfähigkeit von der Orientirung der Seitenflächen abhängt; 2) wie sich in dieser Hinsicht Prismen verhalten, deren Längsaxe in der $Y$-Coordinatenaxe liegt; 3) ob Prismen, deren Längsrichtung in die $X$- resp. $Y$-Axe und deren eine Querdimension in die $Z$-Axe fällt, verschiedene Tragfähigkeiten ergeben.

Vorläufige Versuche, die Bergkrystallstäbchen, ebenso wie früher Steinsalzstäbchen, durch eine longitudinal wirkende Zugkraft direct zu zerreissen, ergaben, dass dieser Weg hier nicht zum Ziele führt. Die Stäbchen wurden viel eher aus den Fassungen herausgerissen, als ihre Cohäsion überwunden war. Allerdings hätte man, — da der Umfang, an welchem die Befestigung angreift, langsamer abnimmt, als der Querschnitt, — durch Verkleinerung der Dicke schliesslich Verhältnisse er-

reichen können, welche die Anwendung des früheren Verfahrens gestatteten; indessen wären dadurch andere Schwierigkeiten entstanden und wäre jedenfalls die Anfertigung neuer kostbarer Präparate nöthig geworden.

Ich entschloss mich daher, die Stäbchen durch *Biegung* zu zerreissen, und zwar, da die Biegung durch centrale Belastung gerade in dem kritischen mittelsten Querschnitt, wo die Zerreissung zu erwarten ist, Verhältnisse schafft, welche der Theorie nicht zugänglich sind, durch *eine Biegung mittels auf die Enden der Stäbchen ausgeübten Drehungsmomentes um eine zur Längsrichtung normale Axe.*

Hierzu wurden die Veranstaltungen folgendermaassen getroffen:

Auf die mattgeschliffenen prismatischen Endstücke der Quarzpräparate wurde, ähnlich wie ein Uhrschlüssel auf den Zapfen der Feder, je ein messingener Hebelarm von ca. 56 mm Länge aufgesetzt und mit Wachscolophoniumgemisch festgekittet, sodass das Stäbchen mit den beiderseitigen Verlängerungen zusammen ein starres System von ca. 125 mm Länge bildete. Dieses System wurde auf zwei horizontale stumpfe stählerne Schneiden aufgelegt, sodass sich zwischen diesen gerade das hohlgeschliffene mittlere Stück des Stäbchens befand; der Abstand der Schneiden betrug 12 mm. Nahe den äusseren Enden waren zwei Löcher in die Messinghebel gebohrt und darin mit zwei ca. 100 mm langen Drahthaken ein horizontaler Balken von ca. 124 mm Länge aufgehangen, welcher in seiner Mitte eine Waagschale trug.

Ist das Gewicht eines jeden Hebels $= h$, dasjenige von Balken und Schale $= b$, und ist auf der Schale ein Gewicht $= g$ befindlich, so erfährt jedes Ende des gebogenen Prismas da, wo es auf der stählernen Schneide aufliegt, ein Drehungsmoment

$$M = (h + g + b)\,\frac{l}{2} = P\,\frac{l}{2},$$

worin $P$ die ganze wirksame Belastung bezeichnet.

Auf die Querschnitte des Stäbchens zwischen beiden Schneiden wirken dann normale Spannungen, deren Grössen dem Abstand von der mittelsten (neutralen) Schicht proportional sind und ihre Maxima in der obersten Schicht anneh-

men. Bei der gewählten Gestalt der Präparate ist der mittelste Querschnitt, weil am kleinsten, auch am stärksten gespannt, und der Werth der auf die Einheit des Querschnitts bezogenen Grenzspannung $\bar{p}$ in der oberen Fläche ist hier gegeben durch

$$\bar{p} = \frac{3\bar{P}l}{BD^2},$$

falls $\bar{P}$ die Belastung bezeichnet, bei der das Brechen eintritt, und $B$ die horizontale Querdimension (Breite), $D$ die verticale (Dicke) des Präparates an der dünnsten Stelle bedeutet.

Nach dieser Formel sind die Beobachtungen in der folgenden Zusammenstellung berechnet.

Bezüglich der erhaltenen Resultate ist im allgemeinen zu bemerken, dass in den bei weitem zahlreichsten Fällen das Brechen der Präparate nach mehr als einer Fläche geschah, sodass entweder von der oberen Seite des Stäbchens her zwei unter 45° gegen die Verticale geneigte unvollkommene Ebenen auftraten, oder aber neben einem verticalen Querschnitt eine in der untern Hälfte des Stäbchens verlaufende horizontale Fläche, welche sich nach den Seiten hin bald mehr bald weniger weit ausbreitete, und, indem sie nach oben oder unten ausbog, die eine oder alle beide Hälften des Stäbchens nochmals zerfällte.

In einigen wenigen Fällen brachen hingegen die Präparate nach nur *einer*, nahezu verticalen, Fläche, und dann stets bei unverhältnissmässig (um ein Viertel bis ein Drittel) geringerer Belastung; es ist anzunehmen, dass hier Fehler des Materiales wirkten, und es sind deshalb die betreffenden Beobachtungen unterdrückt.

Die folgende Zusammenstellung enthält für jedes untersuchte Stäbchen, ausser der Charakteristik seiner Orientirung, die Grösse seiner Breite $B$ und Dicke $D$ in Millimetern und der Belastung $\bar{P}$ in Grammen, bei welcher es brach; aus diesen Daten unter Zuziehung des Werthes $l = 56$ mm ist die Grenzspannung $\bar{p}$ berechnet.

I) $L \perp X$; $\varphi = 0^{0}$.

| Nr. | $D$ | $B$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,24 | 2,20 | 1092 | 16500 |
| 2) | 2,18 | 2,28 | 1091 | 16900 |
| 3) | 2,28 | 2,20 | 1012 | 14800 |
| 4) | 2,24 | 2,20 | 1081 | 16400 |
| 5) | 2,19 | 2,24 | 1041 | 16300 |

Die Bruchflächen verliefen durchaus unregelmässig, hatten dabei aber mehr oder weniger Aehnlichkeit mit unter 45° gegen den verticalen Querschnitt geneigten Ebenen.

II) $L \perp X$; $\varphi = 30^{0}$.

| Nr. | $D$ | $B$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,24 | 2,27 | 1173 | 17200 |
| 2) | 2,24 | 2,26 | 1107 | 16400 |
| 3) | 2,27 | 2,24 | 844 | 12300 |
| 4) | 2,27 | 2,24 | 857 | 12500 |
| 5) | 2,27 | 2,30 | 1282 | 18100 |
| 6) | 2,30 | 2,28 | 912 | 12700 |

Die Bruchflächen hatten ungefähr den oben als zweiten beschriebenen Verlauf, zeigten aber wenig Regelmässigkeit.

Die hier erhaltenen Werthe weichen ganz enorm von einander ab, und es ist für das extraordinäre Verhalten dieser Sorte II ein Grund nicht einzusehen.

III) $L \perp X$, $\varphi = 60^{0}$.

| Nr. | $D$ | $B$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,24 | 2,24 | 830 | 12400 |
| 2) | 2,24 | 2,24 | 714 | 10700 |
| 3) | 2,23 | 2,24 | 828 | 12400 |
| 4) | 2,23 | 2,25 | 810 | 12100 |

Die Bruchfläche war durchweg von einem vertikalen Querschnitt gebildet, der aber das Stäbchen nicht vollständig durchsetzte, sondern gegen eine zweite, nahezu horizontal verlaufende Fläche stiess, durch welche auf der einen horizontalen Seitenfläche des Stäbchens eine kleine Platte abgetrennt wurde.

Nr. IV brach glatt durch und trug demgemäss nur 450 g.

IV) $L \perp X$, $\varphi = 90^{0}$.

| Nr. | $D$ | $B$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,23 | 2,25 | 844 | 12700 |
| 2) | 2,23 | 2,24 | 807 | 12100 |
| 3) | 2,24 | 2,24 | 851 | 12700 |
| 4) | 2,23 | 2,25 | 862 | 13000 |

Diese Stäbchen brachen ähnlich, wie die vorigen. Abweichend verhielt sich Nr. 2; es brach nach zwei sich kreuzenden, um 45° gegen einen vertikalen Querschnitt geneigten Ebenen und ergab folgende Zahlen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2) | 2,25 | 2,28 | 1044 | 158oo. |

V) $L \perp X$, $\varphi = 120^0$.

| Nr. | $D$ | $B$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,25 | 2,26 | 1073 | 157oo |
| 2) | 2,24 | 2,26 | 962 | 141oo |
| 3) | 2,27 | 2,25 | 1073 | 156oo |
| 4) | 2,25 | 2,27 | 1079 | 159oo |
| 5) | 2,24 | 2,27 | 917 | 135oo |

Die Bruchflächen verliefen ähnlich, wie bei den Sorten III und IV; bei Nr. 5 war der horizontale Sprung nur eben angedeutet; dem entspricht auch der besonders kleine Werth von $\overline{p}$.

VI) $L \perp X$, $\varphi = 150^0$.

| Nr. | $D$ | $B$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,23 | 2,20 | 1057 | 161oo |
| 2) | 2,20 | 2,20 | 930 | 146oo |
| 2) | 2,26 | 2,24 | 980 | 143oo |
| 5) | 2,23 | 2,20 | 918 | 141oo |

Bruchflächen, wie bei den vorigen Gattungen; ausgeschlossen ist Nr. 4, bei dem der horizontale Sprung nur eben angedeutet war, und das demgemäss $\overline{P} = 799$ ergab.

Die vorstehenden Zahlen für $\overline{p}$, welche sich, wie gesagt, ausschliesslich auf Richtungen in der $YZ$-Ebene beziehen, zeigen, dass die Zugfestigkeit des Bergkrystalles in dieser Ebene nur sehr wenig variirt; ein Minimum scheint beiläufig in der Richtung normal zu der unvollkommenen Spaltungsfläche $+R$ zu liegen. Ersteres ist einigermassen überraschend, wenn man in Betracht zieht, dass in der dem untersuchten Hauptschnitt im regulären System einigermassen entsprechenden Granatoëderfläche die Zugfestigkeit des Steinsalzes nahezu vom ein- bis 2,4 fachen variirte, — und zwar um so mehr überraschend, als zugleich bei Steinsalz der elastische Dehnungswiderstand nur vom ein- bis 1,3 fachen, bei Bergkrystall dagegen vom einfachen bis nahe zum doppelten wechselt. Bei Steinsalz fällt ein Minimum der Zugfestigkeit mit einem Maximum des Dehnungswiderstandes, bei Bergkrystall umgekehrt nahezu

mit einem Minimum des Dehnungswiderstandes zusammen. Es tritt hierdurch hervor, dass bezüglich der Zugfestigkeit die Elasticität eine sehr geringe, die Spaltbarkeit aber eine bedeutende Rolle spielt.

Ich gebe nun die Resultate, welche mit den drei letzten Gattungen von Stäben erhalten sind.

VII) $L \parallel Z$, $B$ und $D \parallel X$ und $Y$.

| Nr. | $D$ | $B$ | $\bar{P}$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,25 | 2,24 | 1177 | 173oo |
| 2) | 2,25 | 2,26 | 1178 | 174oo |
| 4) | 2,25 | 2,25 | 1037 | 152oo |
| 5) | 2,25 | 2,27 | 1103 | 163oo |

Ausgeschlossen ist Nr. 3, welches $\bar{P} = 846$ ergab. Bruchflächen wie früher.

Diese Resultate stimmen mit den an Sorte I erhaltenen so nahe überein, dass sie ziemlich sicher erweisen, es sei die Orientirung der Seitenfläche ohne Einfluss auf die Zugfestigkeit, wenn die Zugrichtung in die krystallographische Hauptaxe fällt.

VIII) $L \parallel Y$, $B$ und $D \parallel X$ und $Z$.

| Nr. | $D$ | $B$ | $\bar{P}$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,13 | 2,30 | 801 | 129oo |
| 2) | 2,13 | 2,29 | 926 | 150oo |
| 3) | 2,13 | 2,29 | 749 | 121oo |
| 4) | 2,29 | 2,15 | 874 | 129oo |
| 5) | 2,29 | 2,15 | 885 | 131oo |

Bruchflächen wie bei den vorigen Gattungen. Vergleicht man diese Resultate mit den für Sorte IV erhaltenen, so sieht man, dass ein etwaiger Einfluss der Orientirung der Seitenflächen bei der Lage der Längsrichtung $\parallel$ der $Y$-Axe durch die Beobachtungsfehler verdeckt wird. Es ist zu vermuthen, dass dies, wegen der überall geringen Verschiedenheit der Werthe von $\bar{p}$, bei Bergkrystall *allgemein* stattfinden wird.

IX) $L \parallel X$, $B$ und $D \parallel Y$ und $Z$.

| Nr. | $D$ | $B$ | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1) | 2,27 | 2,29 | 883 | 126oo |
| 2) | 2,29 | 2,29 | 963 | 135oo |
| 3) | 2,26 | 2,26 | 869 | 127oo |
| 5) | 2,26 | 2,26 | 890 | 130oo |

Bei den Stäbchen dieser Gattung geschah das Brechen nach zwei um ungefähr 45° gegen den verticalen Querschnitt

geneigten unebenen Flächen; sodass ein nahezu dreieckiges Stück heraussprang. Nur die zwei Stäbchen 4 und 6, brachen nach dem Querschnitt glatt durch und trugen demgemäss auch nur resp. 661 und 719 g.

Die oben gegebenen Zahlen für $\bar{p}$ stimmen so nahe mit den bei VIII erhaltenen überein, dass vollständige Gleichheit der beiden Zugfestigkeiten wahrscheinlich ist; man darf vermuthen, dass alle Richtungen senkrecht zur Hauptaxe sich gleichmässig verhalten.

Von einer X. Sorte Stäbchen, deren Längsrichtung den Winkel zwischen der $X$- und $Z$-Axe halbirte, während eine Querdimension in die $Y$-Axe fiel, kann ich ausführliche Resultate nicht angeben, da sämmtliche Präparate mit Ausnahme von zweien glatt durchbrachen; diese zwei, welche sich ähnlich verhielten, wie Gattung VIII, gaben resp.

| Nr. | $D$ | $B$ | $\bar{P}$ | $\bar{p}$ |
|---|---|---|---|---|
| 2) | 2,28 | 2,21 | 970 | $142_{00}$ |
| 7) | $2,22_5$ | 2,29 | 1016 | $151_{00}$ |

Die erhaltenen $\bar{p}$ fallen in der That zwischen die bei Sorte VII und IX, welche entsprechend orientirt waren, mitten hinein.

Bildet man aus allen Werthen $\bar{p}$, die sich auf eine Zugrichtung parallel zur Hauptaxe beziehen, — es sind die Sorten I und VII — das Mittel, so erhält man

$$\bar{p}_0 = 16\,300 \pm 190;$$

verfährt man ebenso mit allen Werthen, die bei Zugrichtungen senkrecht zur Hauptaxe erhalten sind, — sie entsprechen den Gattungen IV, VIII, IX — so findet sich

$$\bar{p}_{90} = 12\,550 \pm 150$$

Diese Zahlen, mit anderen erhaltenen verglichen, ergeben die grösste Zugfestigkeit von Bergkrystall nicht ganz acht Mal so gross, als die grösste von Steinsalz, aber an fünf Mal kleiner, als die Zugfestigkeit von Krupp'schem Gussstahl, wenn von letzterem aus Gussproben geschnittene Stäbe den Versuchen unterworfen werden.[1])

1) Hr. Dr. F. Salomon in Essen, dessen Freundlichkeit ich mehrere Stücke verschiedenen Krupp'schen Gussstahles verdanke, gibt für zwei von ihnen die Werthe $\bar{p} = 76\,000$ und $\bar{p} = 90\,000$ an.

Gezogene Drähte verhalten sich bekanntlich anders, als geschnittene Prismen, weil ihre Oberflächenschicht durch die mechanische Bearbeitung dichter und fester geworden ist; ähnlich dürften Fäden aus geschmolzenem Quarz eine grössere Zugfestigkeit zeigen, als die vorstehend untersuchten Präparate.

Gegenüber den bei Steinsalz erhaltenen Zahlen zeigen die auf Quarz bezüglichen eine unerwartet grosse Unsicherheit, welche nur von Störungen der Krystallstructur herrühren kann; man hätte vermuthen mögen, dass wasserheller Bergkrystall sich regelmässiger verhalten würde. —

Noch ungünstigere Resultate ergaben vorläufige Messungen an Stäbchen aus demselben farblosen, klaren *Flussspath*, der sich bei meinen Elasticitätsbeobachtungen[1]) so gut bewährt hatte; sie lassen eine exacte Untersuchung der Cohäsionsverhältnisse dieser Substanz als nahezu unmöglich erscheinen und sollen hier nur mitgetheilt werden, um eine Vorstellung von der absoluten Grösse ihrer Zugfestigkeit, sowie von deren Variation mit der Richtung zu geben.

Die Festigkeit des Flussspathes ist sehr erheblich geringer, als die von Bergkrystall, und Hr. Dr. Sella, der diese Messungen auf meine Veranlassung angestellt hat, konnte die Stäbe, welche dieselbe Form und Grösse, wie die von Bergkrystall gefertigten, besassen, direct durch longitudinalen Zug zerreissen. Das Brechen geschah stets nach mehr oder weniger regelmässigen Spaltungsflächen.

Bezeichnet $Q$ den kleinsten Querschnitt des Präparates, $P$ die Belastung, bei welcher es zerriss, und setzt man $P/Q = p$, so schreiben sich die erhaltenen Zahlen folgendermaassen.

I. Längs- und Querrichtungen krystallographischen Hauptaxen parallel.

| Nr. | $Q$ | $P$ | $\bar{p}$ |
|---|---|---|---|
| 1) | 4,02 | 18200 | 4540 |
| 2) | 4,19 | 18900 | 4520 |
| 3) | 4,07 | 20000 | 4910 |
| 4) | 4,11 | 16700 | 4060 |
| 5) | 4,81 | 23600 | 4960 |
| 6) | 4,86 | 22500 | 4620 |

Gesammtmittel $\bar{p}$ = **4660**

---

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1888 p. 299

Bei dieser Sorte ist die Uebereinstimmung also recht gut, was um so merkwürdiger ist, als sonst bei Zugrichtungen, die schief gegen alle Spaltungsflächen liegen, die Abweichungen besonders gross zu sein scheinen.

II. Längsrichtung parallel einer Granatoëdernormalen: eine Querdimension in der gleichen Würfelebene wie die Länge.

| Nr. | $Q$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|
| 1) | 4,99 | $160_{00}$ | $320_0$ |
| 2) | 4,07 | $140_{00}$ | $343_0$ |
| 3) | 4,13 | $226_{00}$ | $546_0$ |
| 4) | 4,85 | $155_{00}$ | $321_0$ |
| 5) | 4,79 | $209_{00}$ | $436_0$ |
| 6) | 4,92 | $217_{00}$ | $442_0$ |
| 7) | 4,83 | $154_{00}$ | $318_0$ |
| 8) | 4,88 | $95_{00}$ | $195_0$ |

Gesammtmittel $\overline{p} = 365_0$

Aus Resultaten, wie diese, kann man natürlich wenig schliessen; die letzte zu kleine Zahl lässt sich zwar durch eine locale Störung oder einen kleinen Sprung wohl erklären, der enorm grosse Werth bei Nr. III ist aber sehr bedenklich, da an eine Unregelmässigkeit am Apparat — etwa ein einseitiges Aufliegen der Waagschaale auf einem Stützpunkte — kaum zu denken ist. Zufällig compensiren sich übrigens die beiden Werthe in Bezug auf das Gesammtmittel ziemlich genau.

III. Längsrichtung in einer Octaëdernormalen; eine Querdimension um 33°, die andere um 65° gegen eine andere Octaëdernormale geneigt.

| Nr. | $Q$ | $\overline{P}$ | $\overline{p}$ |
|---|---|---|---|
| 1) | 5,02 | $110_{00}$ | $219_0$ |
| 2) | 4,98 | $90_{00}$ | $181_0$ |
| 3) | 5,16 | $99_{00}$ | $192_0$ |
| 4) | 4,98 | $112_{00}$ | $225_0$ |
| 5) | 4,98 | $145_{00}$ | $290_0$ |

Gesammtmittel $\overline{p} = 221_0$

Auch hier ist wieder der eine hervorstechend grosse Werth von $\overline{p}$ bedenklich und legt die Vermuthung nahe, dass die vier anderen leidlich stimmenden kleineren Zahlen sämmtlich durch locale Störungen bedingt sind, und der normale Werth von $\overline{p}$ viel höher liegt.

Zu genauen Untersuchungen, die Aufklärung über die tieferen Bedingungen und Gesetze der Cohäsion liefern könnten, erscheint hiernach der Flussspath nicht brauchbar.

Immerhin hat das unzweifelhaft festgestellte Resultat, dass auch bei Flussspath die Zugcomponente normal zur Spaltungsfläche den kleinsten Widerstand findet, ein gewisses Interesse.

Göttingen, im December 1892.

## VIII. *Bestimmung der Elasticitätsconstanten einiger quasi-iostroper Metalle durch langsame Schwingungen von Stäben; von W. Voigt.*

### § 1. Das Beobachtungsmaterial.

So überaus zahlreiche Bestimmungen der Elasticitätsconstanten von Metallen auch schon durchgeführt worden sind, so haben doch nur wenige der durch sie erhaltenen Zahlen für den Physiker Werth, da die meisten sich auf mehr oder weniger schlecht definirtes, überdies auch sehr wahrscheinlich nicht isotropes Material beziehen. Daher dürften die folgenden Untersuchungen[1]), welche bestimmt sind, diese Lücke auszufüllen, einiges Interesse beanspruchen.

Sie benutzen sämmtlich prismatische Stäbchen von beiläufig 10 cm Länge, 0,6 cm Breite und 0,1 cm Dicke, welche aus vorsichtig gegossenen Blöcken herausgeschnitten sind. Um den Präparaten den quasi-isotropen Zustand, der in den Gussstücken sehr nahe stattgefunden haben dürfte, nach Möglichkeit zu erhalten, nämlich die verschiedenen Richtungen physikalisch gleichwerthig zu belassen, sind auch bei der Herstellung der Stäbchen gewisse Vorsichtsmassregeln zur Anwendung gekommen. Die Schnitte sind langsam und in vielfachen Pausen ausgeführt, um erhebliche locale Erwärmungen zu vermeiden; die erhaltenen rohen Schnittstücke sind mit scharfem Stichel auf die gewünschte Dicke abgedreht und nur der letzte Schliff mit einer scharfen Feile, bez. feinem Smirgel, ohne Anwendung eines erheblichen Druckes, erzielt. Herr Mechaniker Bartels in Göttingen hat diese Arbeiten mit viel Geduld und Sorgfalt ausgeführt; die Stäbchen sind recht regelmässig in der Form gerathen und zu Messungen, die auf einige pro mille zuverlässig sind, wohl zu benutzen.

1) Ein Theil der im Folgenden mitgetheilten Beobachtungen ist bereits in der Abhandlung „Bestimmung der Constanten der Elasticität und Untersuchung der innern Reibung für einige Metalle“ (Göttingen 1892) veröffentlicht; für die vorliegende Arbeit sind sechs neue Metalle den früheren zugefügt und die auf die alten bezüglichen Beobachtungen ergänzt, zum Theil wiederholt worden.

Natürlich hat die Sorgfalt der Bearbeitung etwaige Unvollkommenheiten des Materiales, Gussporen, Inhomogenitäten, sowie locale Anisotropie in Folge von zu grobkrystallinischer Structur nicht zu beseitigen vermocht; dass solche vorhanden sind, zeigen die erhaltenen Beobachtungsresultate, die von einander mitunter um viel mehr, als die Wirkung der directen Beobachtungsfehler, differiren.

Die Gussstücke hatten die Form von Kreiscylindern von ca. 12 cm Länge und 4—7 cm Durchmesser; die Stäbchen wurden stets der Längsaxe parallel aus den mittleren Partien herausgeschnitten, falls dort nicht, wie dies bei den im Erstarren sich stark zusammenziehenden Metallen stattfand, eine Höhlung sich befand.

Die untersuchten Metalle sind zum Theil dieselben, deren innere Reibung ich unlängst beobachtet habe[1]); ich gebe jetzt Genaueres über ihre Herkunft und Reinheit an.

*Aluminium* und *Magnesium* sind mir von der ehemaligen Aluminium- und Magnesium-Fabrik in Hemelingen geliefert; beide Gussstücke sind dem Augenschein nach recht befriedigend dicht.

Die chemische Analyse, die, wie auch die folgenden, Herr Dr. Rung am hiesigen chemischen Institut ausgeführt hat, ergaben für das Aluminium

Al 97,53 proc., Fe 1,33 proc., Si 1,01 proc., C 0,17 proc.

Die Verunreinigung ist also nicht unbedeutend; überdies scheint das Gemisch nicht homogen zu sein. Das Magnesium fand sich bis auf unbestimmbare Spuren von beigemengtem Aluminium chemisch rein.

*Rein-Nikel* verdanke ich dem Westpfälischen Nickelwalzwerke in Schwerte; der Block ist im Innern anscheinend völlig dicht, und die daraus gefertigten Stäbe nahmen schöne Politur an.

*Kupfer*, *Zinn*, *Messing*, *Bronze*, sind von Herrn W. Gg. Otto in Darmstadt aus chemisch reinem Material gegossen. Nach Angabe des Verfertigers ist dem Kupfer behufs Desoxydation, um ein dichtes Gefüge zu erzielen, beim Guss eine kleine Menge Phosphor zugesetzt, ebenso der Bronze. Die

1) W. Voigt, Wied. Ann. 47. p. 671. 1892.

Analyse ergab, dass von diesem Zusatz in den gegossenen Stücken nur wenig noch vorhanden ist; die nachweisbare Phosphormenge betrug bei Kupfer 0,14, bei Bronce 0,94 Proc. Das Kupfer fand sich ausserdem mit 0,34 Procent Zinn verunreinigt.

Die Zusammensetzung des Messings ist nach Mittheilung des Giessers 60 Theile Kupfer, 40 Theile Zink,
die der Bronce 88 Theile Kupfer, 12 Theile Zinn,

Von Herrn Otto gegossenes, chemisch reines Zink erwies sich als zu meinen Beobachtungen unbrauchbar, nämlich porös und brüchig: gewöhnliches käufliches, hier von Herrn Mechaniker Bartels gegossen, verhielt sich besser und ist von mir denn auch benutzt worden, obgleich die darauf bezüglichen Zahlen natürlich geringen Werth haben.

*Gusseisen*, sogenannter schmiedbarer Guss, ist aus der Giesserei von *Gruson* in Buckau-Magdeburg geliefert und nicht vollkommen dicht; die polirten Flächen lassen mit der Loupe kleine Gussporen erkennen.

*Silber* und *Gold* ist in Form kleiner Barren von der deutschen Gold- und Silberscheide-Anstalt in Frankfurt a. M. bezogen und angeblich nahe chemisch rein.

*Wismuth* ist als chemisch rein von H. Kahlbaum in Berlin bezogen und hier im physikalischen Institut durch Herrn Dr. Drude geschmolzen.

Um die Gussporen möglichst zu vermeiden, geschah dies in einem etwa 50 cm langen, 2 cm weiten Glasrohr, das mit der Quecksilberluftpumpe nahe luftleer gemacht war. Nachdem die Masse flüssig geworden war und auch beim Neigen des Glasrohres, — wodurch der hydrostatische Druck im Innern des Schmelzflusses vermindert wurde, — keine Luftblasen mehr aufstiegen, wurde der Gasbrenner beseitigt, die Verbindung mit der Luftpumpe unterbrochen und das Glasrohr in ein Gefäss mit sehr heissem Sand gesteckt, um die Erkaltung langsam und unter Atmosphärendruck vor sich gehen zu lassen. Letzteres geschah, um etwa noch vorhandene Luftbläschen zur Absorption zu bringen oder doch auf ein recht kleines Volumen zu comprimiren.

In Folge der langsamen Abkühlung sind nun allerdings die Krystallindividuen in der Masse sehr gross geworden, und

die Präparate können kaum mehr als quasi-isotrop gelten; demgemäss weichen die an ihnen erhaltenen Resultate sehr von einander ab.

*Cadmium* ist aus derselben Quelle bezogen, wie Wismuth, und ähnlich verschmolzen. Wegen der sehr starken Contraction, welche dasselbe beim Erstarren erfährt, war es nöthig, den oberen Theil der geschmolzenen Masse noch in flüssigem Zustande zu erhalten, während der untere Theil erstarrte; es gelang auf diese Weise, eine anscheinend ganz dichte Substanz zu erhalten.

Für die Untersuchung von *Gussstahl* hat Hr. Fr. Krupp in Essen mir freundlichst eine sehr interessante Reihe von Proben gesandt, die extra für diese Beobachtungen verschmolzen und bearbeitet sind.

Es handelte sich dabei für mich um die Beantwortung der Frage, in wie weit durch die Behandlung des Schmiedens, welche die Festigkeit des Stahles so erheblich verändert, die Elasticität modificirt wird. Diese Frage hat ein gewisses practisches und daneben ein theoretisches Interesse, weil Gussstahl ein schönes und bequemes Beispiel für ein quasi-isotropes Medium bietet, das mit verschieden feinem Korn, d. h. verschieden grossen Krystallindividuen, zu erhalten ist.

Hr. Dr F. Salomon in Essen, unter dessen Aufsicht die Proben hergestellt sind, und dem ich für seine Bemühungen zu grossem Danke verpflichtet bin, theilt mir über ihre Naturgeschichte im Wesentlichen Folgendes mit.

Zwei verschiedene Güsse haben das Material geliefert.

Der erste Stahl ($LS$ 84) enthält nach Hrn. Salomon's Analysen

$$C: 0{,}70\,\%,\quad Si: 0{,}24\,\%,\quad Mn: 0{,}64\,\%,\quad P: 0{,}015\,\%;$$

der zweite ($LS$ 86), „welcher etwas weicher ist"

$$C: 0{,}65\,\%,\quad Si: 0{,}22\,\%,\quad Mn: 0{,}24\,\%,\quad P: 0{,}014\,\%.$$

Die Proben

($LS$ 84 $R$) und ($LS$ 86 $R$)

„sind direct aus dem rohen, in der Form erkalteten Guss geschnitten und besitzen infolge der langsamen Abkühlung ein verhältnissmässig grobes Korn"; die zweite Probe übrigens ein gröberes, als die erste.

Die Proben

$(LS\ 84\ N)$ und $(LS\ 86\ N)$

sind aus den bezüglichen Güssen in der Weise geschmiedet, dass die mechanische Bearbeitung möglichst gleichmässig von allen Seiten stattfand.

Die Proben

$(LS\ 84\ E)$ und $(LS\ 86\ E)$

sind nach einem besonderen, der Firma Krupp eigenthümlichen Verfahren verschmiedet, welches dem Stahl einen „ausserordentlich schönen und sehnigen Bruch" verleiht.

Zerreissungsversuche mit aus den letzten beiden Proben geschnittenen Stäben von 10 cm Länge und 0,12 cm Durchmesser ergaben für:

| | $(LS\ 84\ E)$ | und $(LS\ 86\ E)$ |
|---|---|---|
| Bruch . . . . . . . . . . | 9000 kg | 7600 kg pro qmm. |
| Elasticitätsgrenze . . . . | 5200 „ | 4400 „ „ „ |
| Dehnung beim Bruch . . | 15 % | 18 % |

## § 2. Die Beobachtungsmethode.

Da unter den zu untersuchenden Metallen die meisten sehr beträchtliche elastische Nachwirkungen und dauernde Deformationen bei Einwirkung selbst mässiger Kräfte zeigen, so schien es mir passend, keine *statische*, sondern eine *dynamische* Methode der Beobachtung anzuwenden; und zwar wählte ich, da die Messung der Schwingungsdauern der freien, unbeschwerten Stäbchen nicht mit der wünschenswerthen Genauigkeit möglich war, die Beobachtung der durch passend angebrachte träge Massen *verzögerten* Schwingungen, welche sich theoretisch und practisch gleich empfehlen.

Die *Elasticitätsconstanten* sind die Parameter des elastischen Potentiales $f$, falls man dasselbe durch die Deformationsgrössen $x_x \dots x_y$ ausdrückt; dasselbe ist in diesem Falle gegeben durch

$$(1)\qquad 2f = c_1(x_x+y_y+z_z)^2 + c_2\left(2(x_x^2+y_y^2+z_z^2)+y_z^2+z_x^2+x_y^2\right),$$

und $c_1$, $c_2$ oder, indem man die Bezeichnung

$$(2)\qquad 2c_2 = c - c_1$$

einführt, $c$ und $c_1$ sind die Elasticitätsconstanten. Die ela-

stischen Druckcomponenten $X_x \dots X_y$ folgen aus dem Potential nach deu Formeln

$$X_x = -\frac{\partial f}{\partial x_x}, \dots X_y = -\frac{\partial f}{\partial x_y}.$$

Die *Elasticitätsmoduln* sind die Parameter des Potentiales $f$ wenn man dasselbe durch die Druckcomponenten ausdrückt; hier gilt

(3) $$2f = s_1 (X_x + Y_y + Z_z)^2 + s_2 (\tfrac{1}{2}(X_x^2 + Y_y^2 + Z_z^2) + Y_z^2 + Z_x^2 + X_y^2)$$

und $s_1$, $s_2$, oder falls man

(4) $$s_2 = 2(s - s_1)$$

setzt, $s$ und $s_1$ sind die bez. Moduln.

Zwischen den Moduln und den Constanten bestehen die Formeln

(5) $$c = \frac{4s - s_2}{s_2(8s - s_2)}, \quad c_1 = \frac{s_2 - 2s}{s_2(8s - s_2)}, \quad c_2 = \frac{1}{s_2}. -$$

Wenn ein prismatischer Stab von der Länge $L$, der Breite $B$ und der Dicke $D$ auf seinen beiden Endflächen zwei entgegengesetzt gleiche Drehungsmomente $\pm M$ um die Richtung B erfährt, so krümmt er sich nach einem Kreisbogen, und der resultirende Winkel $\varphi$ zwischen dem ersten und dem letzten Element seiner Axe ist gegeben durch

$$\varphi = \frac{12 L M s}{B D^3},$$

worin $s$ den *Dehnungsmodul* bedeutet, d. h. das Reciproke des sogenannten Elasticitätscoefficienten (besser als *Dehnungswiderstand* bezeichnet).

Umgekehrt, wenn ein Stab von den obigen Dimensionen mit einem Ende eingeklemmt oder eingelöthet und mit dem anderen so an einer um eine Axe drehbaren trägen Masse befestigt ist, dass das letzte Element der Stabaxe mit einem Radiusvector zusammenfällt, so erfährt bei jeder Ablenkung aus der Ruhelage diese Masse seitens des Stabes ein Moment

$$M = -\frac{B D^3 \varphi}{12 L s},$$

welches nach der Ruhelage hin wirkt.

Diese Formel, die zunächst nur für den Gleichgewichtszustand gilt, ist auch auf den Bewegungszustand anwendbar,

wenn die träge Masse die Schwingungsdauer so verlängert, dass sie als unendlich gross gegen die Zeit angesehen werden kann, die eine Biegungsschwingung zur Fortpflanzung über die Länge des Stabes braucht.

Wirkt kein anderes Moment, als das durch das Stäbchen gelieferte. ist also der Einfluss der Schwerkraft z. B. dadurch ausgeschlossen, dass die Drehungsaxe durch den Schwerpunkt der trägen Masse geht, so gilt hiernach, wenn man noch deren Trägheitsmoment um ihre Rotationsaxe mit $\mathfrak{M}_\beta$ bezeichnet. für ihre Bewegung die Gleichung

$$\mathfrak{M}_\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - \frac{B D^3 \varphi}{12 L s};$$

aus ihr folgt die Dauer einer Doppelschwingung $T$ gemäss der Formel

$$T_\beta^2 = 4 \pi^2 . \frac{12 \mathfrak{M}_\beta L s}{B D^3} \tag{6}$$

Hierbei sind allerdings die in Wirklichkeit nie fehlenden Widerstandskräfte, Luftwiderstand, innere Reibung, elastische Nachwirkung u. s. f. vernachlässigt; indessen ist dies unbedenklich. Stellt man ihr Moment nämlich durch eine nach ungeraden Differentialquotienten nach der Zeit fortschreitende Reihe der Form

$$M' = - \left( a \frac{\partial \varphi}{\partial t} + b \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} + c \frac{\partial \varphi^5}{\partial t^5} + \cdot \cdot \right)$$

dar und setzt voraus, dass alle diese Glieder von der ersten Ordnung gegen das oben allein berücksichtigte $M$ sind, so weicht die Schwingungsdauer nur um Glieder *zweiter* Ordnung von dem in Formel (6) angegebenen Werthe ab, und die Anwendung des letzteren ist gestattet. —

Wenn man einen prismatischen Stab von den oben festgesetzten Dimensionen einem auf die beiden Grundflächen wirkenden Moment $\pm N$ um die Längsaxe unterwirft, so drillt sich derselbe gleichförmig, und die Drehung $\psi$ des letzten gegen den ersten Querschnitt wird, für ein Verhältniss $D/B$, welches kleiner als $1/3$ ist, gegeben durch

$$\psi = \frac{3 L N s_2}{B D^3 \left( 1 - 0{,}630 \frac{D}{B} \right)},$$

worin $s_2$ den *Drillungsmodul* bedeutet, d. h. das Reciproke des sonst eingeführten Torsionscoefficienten (besser *Drillungswiderstand* genannt).

Wenn daher der vertical gestellte Stab an seinem oberen Ende mit einer trägen Masse in Form eines Rotationskörpers so verbunden ist, dass seine Längsrichtung mit dessen Axe zusammenfällt, so erfährt die träge Masse bei einer Drehung um den Winkel $\psi$ aus ihrer Ruhelage ein Moment $N$ seitens des gedrillten Stabes von der Grösse

$$N = -\frac{B D^3 \psi}{3 L s_2}\left(1 - 0{,}630\,\frac{D}{B}\right),$$

welches nach der Ruhelage zurückstrebt.

Diese Formel gilt, wie für den Gleichgewichts-, so auch für den Bewegungszustand, wenn nur die Schwingungsdauer des Systems als unendlich gross gegen die Zeit betrachtet werden kann, welche eine Drillungschwingung zur Fortpflanzung über die Länge des Stabes braucht.

Wirkt auf die träge Masse, deren Trägheitsmoment mit $\mathfrak{M}_\delta$ bezeichnet sein mag, kein anderes Moment. als das von dem elastischen herrührende, so gilt für seine Bewegung die Gleichung

$$\mathfrak{M}_\delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{D B^3 \psi}{3 L s_2}\left(1 - 0{,}630\,\frac{D}{B}\right);$$

aus ihr folgt für die Dauer $T_\delta$ einer Doppelschwingung die Gleichung

$$T_\delta^2 = 4\pi^2 \frac{3\,\mathfrak{M}_\delta\, L\, s_2}{D B^3\left(1 - 0{,}630\,\frac{D}{B}\right)}. \tag{7}$$

Ueber den Einfluss etwa nur kleiner Widerstandskräfte auf die Schwingungsdauer gilt das zu Formel (6) Gesagte. —

Um die zu untersuchenden Stäbchen so, wie bei der Ableitung der vorstehenden Formeln vorausgesetzt ist, zu gleichförmigen, langsamen Biegungs- und Torsionsschwingungen zu zwingen, habe ich die folgenden beiden Apparate construirt und benutzt, welche kurz als der *Biegungs-* und der *Drillungsapparat* bezeichnet werden mögen.

Der *Biegungsapparat* ist in Fig. 1 und 2 von vorn und von hinten dargestellt.

Auf einer massiven Eisenplatte erheben sich zwei starke eiserne Säulen $q$ und $q_1$; erstere trägt das schwingende System, letztere die Vorrichtung, um dasselbe in die gewünschte Bewegung zu versetzen.

Ich beschreibe zunächst das erstere. Die träge Masse ist gebildet von einer Messingscheibe $SS$ von ca. 20 cm im Durchmesser mit stark verdicktem Rande, bestimmt, bei mässiger Masse (1200 g) ein möglichst grosses Trägheitsmoment zu lie-

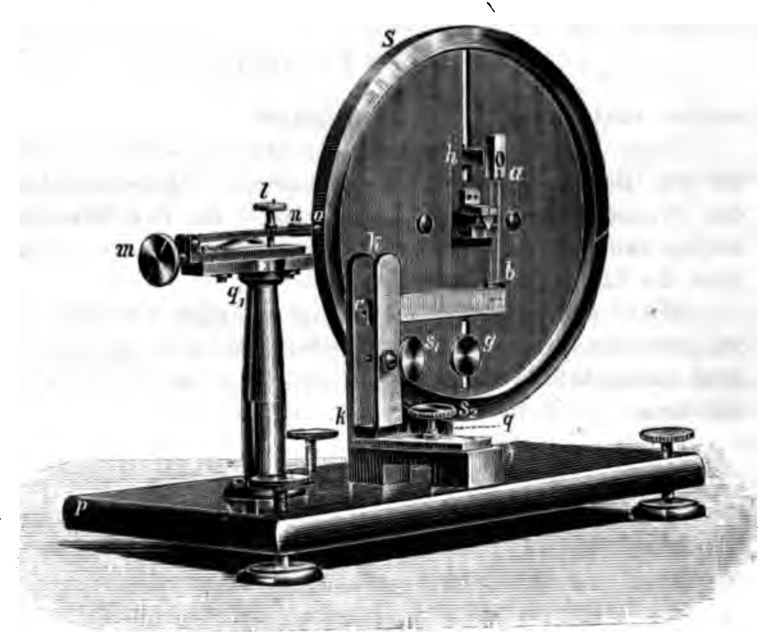



Fig. 1.

fern. Diese Scheibe ruht mit einer genau in ihre Axe fallenden Carneolschneide auf einer Carneolplatte, welche auf der oberen Fläche der Säule $q$ aufgekittet ist und mit Hülfe der Stellschrauben der Fussplatten horizontal gestellt werden kann. Damit bei den verschiedenen, mit der Scheibe vorzunehmenden Hantirungen die Schneide nicht beschädigt wird, kann man dieselbe mittelst einer Arretirungsvorrichtung von ihrer Unterlage aufheben. Es liegt nämlich unterhalb der Schneide ein in Fig. 1 aus dem viereckigen Ausschnitt der Scheibe $SS$ herausragender Rahmen von Messing, der, wie

Fig. 2 zeigt, mit der starken Stahlfeder *r* verbunden ist und durch die Schraube *s* gehoben und gesenkt werden kann.

In seiner tiefsten Stellung lässt er die Carneolschneide frei auf der Platte liegen, beim Heben fasst er sie aber in zwei Ausschnitten, während sich zugleich vier Schraubenköpfe stützend unter die Fassung der Schneide legen; er gestattet so, das ganze bewegliche System etwa 1 mm über die Carneolplatte zu erheben.

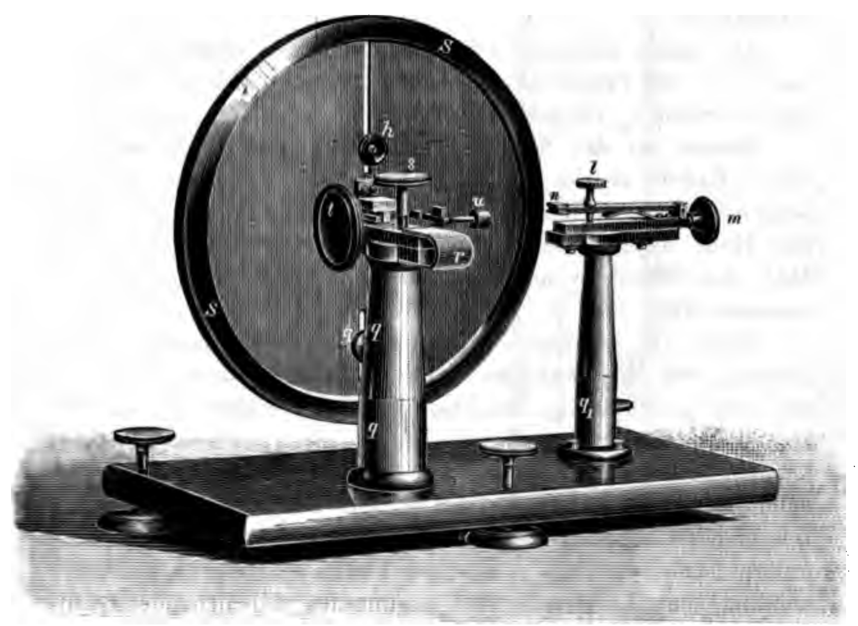



**Fig. 2.**

Oberhalb der Axe ist in die Scheibe *SS* eine Spalte eingeschnitten; in dieser gleitet ein kurzer Messingansatz *h* und lässt sich in jeder Stellung durch die in Fig. 2 bei *h* sichtbare Schraubenmutter befestigen. Am Ansatz *h* wird die Fassung *a* angeschraubt, in welche das obere Ende des zu untersuchenden Stäbchens *ab* eingekittet oder eingelöthet ist.

Ein in einem zweiten Spalt unterhalb der Axe verschiebbares Gegengewicht *g* compensirt die Masse von *a* und *h*, sodass der Massenmittelpunkt des ganzen Systems, zuzüglich der oberen Hälfte des Stäbchens *ab*, nahezu in die Drehungsaxe fällt.

Das untere Ende des Stäbchens $b$ ist ähnlich, wie das obere, zunächst in eine massive Messingfassung eingekittet oder gelöthet und mit dieser durch zwei Schrauben an dem in Fig. 1 sichtbaren horizontalen Arme $b\,c$ befestigt. Dieser Arm trägt am Ende $c$ eine horizontale Stahlaxe, die in zwei feinen Spitzen endigt und zwischen den Messingbacken der Klammer $k$ durch die Schraube $s_1$ mit leichtem Druck gehalten wird, sodass der Arm $b\,c$ um diese Axe drehbar ist.

Die ganze Klammer $k\,k$ kann auf einer sicheren Unterlage vor- und rückwärts geschoben und an jeder Stelle mit der Schraube $s_2$ festgestellt werden.

Sonach ist das Stäbchen mit dem einen Ende parallel einem Radius an der grossen Scheibe $S\,S$, mit dem anderen senkrecht zu dem Radiusvector $b\,c$ nach der Axe $c$ befestigt; die Höhe beider Befestigungen ist so gewählt, dass die Mitte des Stäbchens möglichst genau mit der Carneolschneide zusammenfällt.

Wird die Scheibe $S\,S$ aus der Ruhelage abgelenkt, so krümmt sich das Stäbchen nach einem Kreisbogen, erleidet also eine gleichförmige Biegung. Das untere Ende bei $b$ senkt sich dabei nur ganz unmerklich; bei der gewöhnlichen Anfangsamplitude des Randes der Scheibe von ca. 1 mm und einer Stäbchenlänge von 100 mm nämlich nur um ca. 0,0004 mm. Ich hielt es demnach anfangs überhaupt nicht für nöthig, das untere Ende *beweglich* zu machen; indessen zeigte die Beobachtung, dass bei directer Befestigung des Stäbchenendes $b$ an einem festen Halter leicht eine Längsspannung des Stäbchens und dadurch ein Druck der Carneolscheide gegen ihre Unterlage von höchst wechselnder und ganz uncontrolirbarer Grösse entstand, welcher die Axenreibung veränderte und die Messungen störte. Daher habe ich den beschriebenen Weg ergriffen, der diesen Uebelstand beseitigt.

Eine Elongation von gewünschter Grösse dem beweglichen System mitzutheilen, dient der auf der zweiten Säule $q_1$ befestigte Theil.

Auf einer horizontalen Platte ist mit dem Handgriff $m$ eine Art von Zange verschiebbar, deren oberer Arm am Ende $n$ gegabelt ist; die Schraube $l$ gestattet, zusammen mit der gegen

den Arm von unten wirkenden Feder, ihn in beliebiger Höhe einzustellen.

Für die Verwendung schiebt man die Gabel *n* über den in Fig. 1 sichtbaren, am Rande der grossen Scheibe *SS* befindlichen Ansatz *o*, dreht die Schraube *l* um ein gewünschtes Stück und zieht nun mittelst des Griffes *m* die Zange schnell zurück; auf diese Weise wird die Scheibe mit einer Elongation von gewünschter Grösse freigelassen und beginnt ihre Schwingungen.

Die Schwingungen zu beobachten, gestattete der in Fig. 2 sichtbare, auf der Rückseite der Scheibe *SS* angebrachte Spiegel *t*, dessen Gewicht durch das verstellbare Gegengewicht *u* compensirt ist.

Wenn, wie vorausgesetzt, der Massenmittelpunkt des beweglichen Systems in die Drehungsaxe, d. h. die Kante der Carneolschneide, fällt, so ist die Elasticität des Stäbchens in der That die einzige beschleunigende Kraft. Die oben entwickelte Formel (6) für die Schwingungsdauer ist also anwendbar. —

Den *Drillungsapparat* stellt Fig. 3 dar.




Fig. 3.

Auf einem schweren eisernen Dreifuss *ff* erheben sich zwei starke messingene Säulen *hh*, welche auf ihren oberen Enden eine Querstange tragen; von dieser hängt an einem dünnen Messingdrahte das bewegliche System herab und kann mittelst der Schraubenmutter *s* innerhalb gewisser Grenzen gehoben und gesenkt, ausserdem auch um den Aufhängedraht als Axe gedreht werden.

Dass bewegliche System besteht aus der grossen Messingscheibe *SS* mit dickem Rande, im Gewichte von ca. 1300 g, verbunden mit einem Gestell aus Messingdraht, welches die Befestigung an dem Aufhängedraht bei *r* gestattet.

In die Axe der Scheibe wird die Messingfassung *a* eingeschraubt, in welche das untere Ende des zu untersuchenden Stäbchens *ab* eingekittet oder eingelöthet ist; das obere Ende *b* ist in eine in der Figur sichtbare Kugel von Messing mit unten angefeilter Ebene gekittet oder gelöthet.

Diese Kugel wird mit kräftigem Druck der Schraube $s_1$ zwischen die Backen der Klammer *k* gefasst und so gehalten; die gewählte Kugelgestalt gestattet, dies auszuführen, ohne dass dabei das untere Ende des Stäbchens mit der Scheibe *SS*

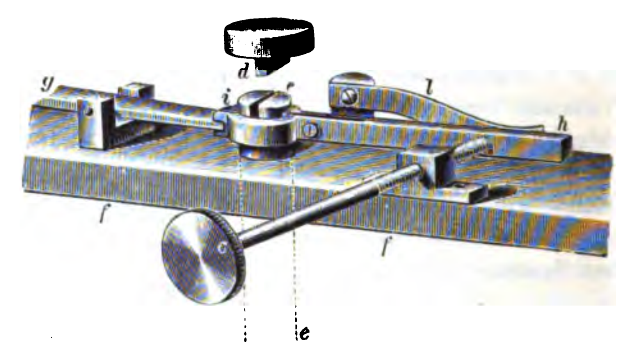



Fig. 4.

seine Lage verändert, sodass auch nach der Befestigung der Aufhängedraht in die Drehungsaxe des ganzen Systems fällt. Dies ist nöthig, um reine Drillungsschwingungen ohne seitliches Pendeln zu erhalten, und es sind Marken vorhanden, um die Centrirung des Stäbchens zu prüfen.

Die Klammer *k* lässt sich je nach der verschiedenen Länge der zu untersuchenden Stäbe höher oder tiefer stellen und mit der Schraube $s_2$ festklemmen.

Um dem ganzen beweglichen System eine Elongation von gewünschter Grösse zu ertheilen, dient eine unterhalb der Scheibe *SS* liegende Vorrichtung, die in Fig. 4 schematisch dargestellt ist.

Da es sich um die Hervorbringung reiner Drillungs-

schwingungen handelt, so musste die äussere Einwirkung möglichst nahe der Drehungsaxe angreifen.

Zu diesem Zwecke war auf der unteren Seite der Scheibe *SS* die kleine verticale Stahlplatte *d* befestigt, deren Mitte in die Drehungsaxe fiel. Unter ihr, mit seiner Axe gleichfalls in der Drehungsaxe liegend, befand sich der stählerne Cylinder *ee*, der in einer Durchbohrung des Dreifusses *ff* sowohl dreh- als verschiebbar war.

Eine Drehung konnte man ihm durch die Schraube *c* ertheilen, welche der Feder *l* entgegen auf den Hebel *h* wirkte, eine Hebung oder Senkung durch den Griff *g*, der mit dem Ende *i* in eine an dem Cylinder *ee* befestigte Gabel fasste. (Der Kopf der Schraube *c* und das Ende des Griffes *g* ragten unter der Scheibe hervor und sind auch in Fig. 3 sichtbar.)

Um nun die gewünschte Elongation zu ertheilen, wurde mittelst *g* der Cylinder *ee* gehoben, sodass der Ansatz *d* der Scheibe sich in den Einschnitt auf seiner oberen Fläche legte, die Schraube *c* um einen bestimmten Betrag gedreht und sodann durch schnelles Heben des Griffes *g* die Scheibe wieder frei gegeben.

Zur Beobachtung der Schwingungen diente der in Fig. 3 sichtbare Spiegel *t*, dessen Gewicht durch das Gegengewicht *u* compensirt wurde.

Bei der beschriebenen Anordnung wirkt auf das bewegliche System als beschleunigende Kraft ausser der Elasticität des Stäbchens *ab* auch diejenige des Aufhängedrahtes; letztere ist aber gegen erstere so gering, dass sie vernachlässigt werden kann. Es ist also für die Schwingungsdauer die oben abgeleitete Formel (7) gültig.

### § 3. Vorbereitende Messungen.

Um nach den Formeln (6) und (7) die Biegungs- und Drillungsmoduln $s$ und $s_2$ zu berechnen, ist ausser der Beobachtung der Schwingungsdauer $T_\beta$ und $T_\delta$ erforderlich die Bestimmung der Trägheitsmomente $\mathfrak{M}_\beta$ und $\mathfrak{M}_\delta$ der mit den elastischen Stäben verbundenen Massen und die Messung der Dimensionen der Metallprismen. Ueber die letzteren beiden Arbeiten, welche den eigentlichen Elasticitätsbeobachtungen vorausgingen, soll in diesem Abschnitt berichtet werden.

Zur Ableitung der Trägheitsmomente wurde der von Gauss angegebene Weg eingeschlagen. Jede der beiden Scheiben wurde bifiler aufgehängt, sodass ihre Ebene horizontal lag, und mit zwei cylindrischen Uebergewichten armirt welche einmal nahe dem Umfang, sodann nahe dem Mittelpunkt an ihnen befestigt werden konnten. In beiden Anordnungen wurden die Scheiben in Schwingungen versetzt und ihre Schwingsdauern beobachtet.

Bezeichnet man mit $m$ die Masse eines Zusatzgewichtes, mit $m k^2$ sein Trägheitsmoment um die vertikal gestellte Cylinderaxe, und sind $T_1$ und $T_2$ die Schwingungsdauern, während die Zusatzgewichte resp. die Entfernungen $e_1$ und $e_2$ von der Drehungsaxe besassen, so findet sich das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}$ der Scheibe ohne die Uebergewichte

$$\mathfrak{M} = 2\, m \frac{T_2^2 (k^2 + e_1^2) - T_1^2 (k^2 + e_2^2)}{T_1^2 - T_2^2}. \tag{8}$$

Die Massen der Zusatzgewichte waren $m = 128{,}88$ g, ihre Radien gleich 0,99 cm, also $k^2 = (0{,}99)^2 / 2$.

Die Bestimmung der Schwingungsdauern geschah mit einem Chronometer, welches 0,4 Sec. schlug, und die Ablesungen der Zeitpunkte $t$ für die Durchgänge der Scheiben durch die Ruhelage sind unten in diesen Einheiten angegeben; jede mitgetheilte Zahl ist das Mittel aus drei aufeinander folgenden Bestimmungen. Unter $n$ ist die Anzahl der Doppelschwingungen verstanden, die seit der ersten Beobachtung verflossen waren, unter $t_b$ die aus der schliesslich gefundenen Schwingungsdauer berechneten Werthe der Beobachtungen, welche beigefügt sind, um die Zuverlässigkeit der Beobachtungen zu zeigen.

### I. Scheibe vom Biegungsapparat.

a) Zusatzgewichte aussen; $e_1 = 9{,}47_5$.

| $t$ | $n$ | $t_b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | −0,2 |
| 2102,4 | 28 | 2102,6 |
| 4205,5 | 56 | 4205,4 |
| 6458,4 | 86 | 6458,5 |
| 9012,0 | 120 | 9011,9 |

$T_1 = 75{,}100_7$.

b) Zusatzgewichte innen; $e_1 = 1{,}60_0$.

| $t$ | $n$ | $t_b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,3 |
| 2237,5 | 34 | 2237,6 |
| 4146,2 | 63 | 4145,9 |
| 6120,6 | 93 | 6120,0 |
| 8919,5 | 136 | 8949,6 |
| 11449,7 | 174 | 11450,1 |

$T_2 = 65{,}803_3$.

c) Zusatzgewichte aussen; $e_1 = 9{,}47_5$.

| $t$ | $n$ | $t_b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,2 |
| 2554,0 | 34 | 2553,8 |
| 4957,5 | 66 | 4957,2 |
| 7210,3 | 96 | 7210,4 |
| 12317,5 | 164 | 12317,6 |

$T_1 = 75{,}105_9$.

Die Differenz zwischen dem ersten und dem zweiten Werth von $T_1$ rührt wahrscheinlich davon her, dass die Aufhängedrähte, trotzdem die Scheibe längere Zeit mit einem Uebergewicht von 600 g sich selbst überlassen worden war, sich während der Beobachtung nochmals gereckt haben; wir rechnen mit den Werthen:

$$T_1 = 75{,}103, \quad T_2 = 65{,}803.$$

Die Anwendung der Formel (8) liefert das Trägheitsmoment der Biegungsscheibe

$$M_\beta = 7350_0$$

mindestens bis auf ein pro mille genau.

II. Scheibe vom Drillungsapparat.

a) Zusatzgewichte aussen; $e = 6{,}00_0$.

| $t$ | $n$ | $t_b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,1 |
| 1185,3 | 25 | 1185,3 |
| 3887,9 | 82 | 3887,7 |
| 5404,8 | 114 | 5404,8 |
| 7206,3 | 172 | 7206,4 |

$T_1 = 47{,}409_9$.

b) Zusatzgewichte innen; $e_2 = 1{,}03_5$.

| $t$ | $n$ | $t_b$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | − 0,2 |
| 1635,6 | 39 | 1635,5 |
| 3899,9 | 93 | 3899,8 |
| 6289,9 | 150 | 6289,9 |
| 8554,0 | 204 | 8554,2 |

$T_2 = 41{,}931_2$.

c) Zusatzgewichte aussen; $e_1 = 6,00$.

| $t$ | $n$ | $t_1$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,2 |
| 2513,3 | 53 | 2513,0 |
| 3888,1 | 82 | 3887,8 |
| 5689,6 | 120 | 5689,6 |
| 7491,1 | 158 | 7491,2 |

$T_1 = 47,411$.

Die Differenz zwischen den beiden für $T_1$ erhaltenen Werthen findet in demselben Sinne statt, wie oben, erklärt sich also wohl auch auf dieselbe Weise; sie ist übrigens noch unbedeutender wie dort. Wir rechnen mit den Zahlen

$$T_1 = 47,411, \quad T_2 = 41,931.$$

Ihre Anwendung ergibt aus Formel (8)

$$M_3 = 3193. \text{ —}$$

Was die Bestimmung der Dimensionen der Metallprismen anlangt, so war es nicht nöthig, der einzelnen Messung eine so bedeutende Genauigkeit zu geben, wie z. B. den analogen an Krystallstäbchen gelegentlich der Bestimmung ihrer Elasticitätscomponenten. Denn einerseits hatten die Metallstäbe viel grössere Dimensionen, andererseits aber wegen der grösseren Weichheit des Materiales viel unregelmässigere Gestalt, als die Krystallprismen. Daher genügte es, mit einem gut gearbeiteten Dickemesser, dessen Schraubenhöhe = 0,647 mm betrug, die Dicke längs zweier den Kanten auf $^1/_4$ Breite Abstand parallel laufenden Geraden je 7—11 Mal zu messen und von diesen 14—22 Messungen das Mittel zu nehmen. In den folgenden Tafeln sind, um ein Bild von der Gestalt der Stäbe zu geben, die 7—11 Mittel aus den beiden auf denselben Querschnitt bezüglichen Messungen angegeben. Die Breite wurde mittelst eines Schublineals an 3—6 Stellen gemessen. Diese Messungen hat fast sämmtlich Herr Dr. Drude ausgeführt.

### § 4. Schwingungsbeobachtungen.

Für die Beobachtung der Schwingungsdauern wurden die Metallstäbchen beiderseits in kräftige Messingklötze eingelöthet, resp., wo das Löthen durch das Material unmöglich gemacht wurde, mit Schellack eingekittet und mit der einen Fassung an der beweglichen Scheibe angeschraubt, mit der andern in

den oben beschriebenen Klammern eingeklemmt. Die Fassungen umschlossen beiderseits die Stäbchen sehr streng, und die aus ihnen herausgetretene Löth- oder Kittmasse wurde sorgfältig beseitigt, damit die schwingende freie Länge des Stäbchens wohl definirt wäre.

Die Bestimmung der Schwingungsdauern geschah zumeist durch Abzählen einiger hundert Schwingungen mit einem Chronograph, der Fünftel-Secunden registrirte, von Assmann in Glashütte; nur bei sehr kleinen Schwingungsdauern, wo dies Verfahren unsicher schien, wurde die früher beschriebene[1]) Methode der photographischen Registrirung benutzt. Auf beide Weisen erhielt man ohne alle Schwierigkeit die mehr wie genügende Genauigkeit von nahe 0,001″.

In den folgenden Tafeln gebe ich in alphabetischer Anordnung der untersuchten Metalle die Resultate der auf jedes Stäbchen bezüglichen directen Messungen; zunächst die Dichte $\varepsilon$ des Materiales, ferner für die einzelnen Stäbchen die gefundenen Dicken in 7—11 aequidistanten Querschnitten in Trommeltheilen des Dickemessers, sodann die Mittelwerthe der Breite $B$ und Dicke $D$ in Centimetern, dann in den mit ($\beta$) und ($\delta$) bezeichneten Reihen die bei Biegungs- und Drillungsversuchen benutzten Längen $L$ und erhaltenen Schwingungsdauern $T$, daneben auch die Beobachtungstemperatur $\vartheta$.

Aus den gemessenen $B$, $D$, $L$ und $T$ und den früher bestimmten Trägheitsmomenten $\mathfrak{M}$ berechnen sich die Biegungs- und Drillungsmoduln, $s$ resp. $s_2$, nach den Formeln

$$(9)\qquad \begin{cases} s = \dfrac{B D^3 T_\beta^2}{48 \pi^2 \mathfrak{M}_\beta L_\beta}, \\[2ex] s_2 = \dfrac{B D^3 T_\delta^2}{12 \pi^2 \mathfrak{M}_\delta L_\delta}\left(1 - 0{,}630 \dfrac{D}{B}\right). \end{cases}$$

Aus den Moduln $s$ und $s_2$ folgen die Elasticitätsconstanten $c$ und $c_1$, resp. $c_1$ und $c_2 = \frac{1}{2}(c - c_1)$ der Substanz nach den Formeln (5).

Da $s_2 / s$ immer nahe um 2,5 liegt, so sind die Constanten $c$ und $c_1$ wesentlich ungenauer zu bestimmen, als die Moduln $s$ und $s_2$.

1) W. Voigt, Wied. Ann. 47. p. 680. 1892.

Die Moduln und Constanten sind in absoluten Einheiten (cm, g, sec.) angegeben; da man indessen die sogenannten „Elasticitätscoefficienten", die alle präciser „elastische Widerstände" genannt würden, vielfach in Millimetern und Grammgewichten (letztere als Krafteinheiten gewählt) angiebt, so habe ich den „Biegungswiderstand" $E$ und den „Drillungswiderstand" $T$ in diesen Einheiten noch hinzugefügt. Es ist bis auf den Unterschied der Einheiten

$$E = 1/s, \quad T = 1/s_2.$$

Die Abweichungen zwischen den bei verschiedenen Stäben derselben Substanz gefundenen Constantenwerthen von einander übersteigen mehrfach bedeutend den Betrag der directen Beobachtungsfehler, dessen Grösse man durch Vergleichung der an demselben Stabe bei verschiedenen von einander unabhängigen Beobachtungen gefundenen Werthe beurtheilen kann.

Zwei Ursachen bedingen dieselben: einerseits die Inhomogenität, andererseits die Anisotropie des Materials; erstere wird durch Verunreinigungen und Gussporen, letztere durch die bei manchen Metallen recht beträchtliche Grösse des krystallinischen Kornes verursacht. Mitunter kann man aus den erhaltenen Zahlen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit schliessen, ob der eine oder der andere Umstand maassgebend gewesen ist.

Weicht die Biegungs- und die Drillungsconstante in *demselben* Sinne vom Mittelwerth ab, so wird man die *Inhomogenität*, weichen sie im *entgegengesetzten* Sinne ab, so wird man die *Anisotropie* als wirksam betrachten dürfen. Für Beides liefern die folgenden Tabellen Beispiele.

Aluminium ($s = 2{,}676$).

Nr. 1. 153,9 153,7 153,5 153,9 153,5 153,7 154,1 154,1 153,8 154,5
$B = 0{,}603$, $D = 0{,}1014$.
β) $L = 10{,}16$, $T = 0{,}964$, $\vartheta = 14{,}5$, $s = 1{,}65 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10{,}28$, $T = 0{,}542$, $\vartheta = 14{,}5$, $s_2 = 4{,}24 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 2. 156,0 156,1 156,9 157,3 156,3 156,5 157,0 156,8 155,3 156,1
$B = 0{,}608$, $D = 0{,}0997$.
β) $L = 10{,}27$, $T = 0{,}934$, $\vartheta = 14{,}4$, $s = 1{,}47 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10{,}22$, $T = 0{,}520$, $\vartheta = 14{,}4$, $s_2 = 3{,}78 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 153,3 153,2 154,1 154,9 155,4 155,2 155,5 155,9 156,4 155,6
$B = 0{,}599$, $D = 0{,}1005$.
β) $L = 10{,}16$, $T = 0{,}956$, $\vartheta = 12{,}5$, $s = 1{,}57 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10{,}16$, $T = 0{,}522$, $\vartheta = 17{,}0$, $s_2 = 3{,}86 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 153,7 154,0 154,8 154,2 152,9 153,2 153,5 153,7 152,5 151,7
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}0994$.
$\beta$) $L = 10{,}28$, $T = 0{,}976$, $\vartheta = 13{,}5$, $s = 1{,}57 \,.\, 10^{-12}$
10,16, 0,971. $\vartheta = 13{,}4$, $1{,}57 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}21$, $T = 0{,}542$, $\vartheta = 15{,}0$, $s_2 = 4{,}02 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 5. 191,3 193,0 193,5 193.5 192,2 192,2 191,7 191,8 192,0 191,6
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1234$.
$\beta$) $L = 10{,}00$, $T = 0{,}684$, $\vartheta = 16{,}2$. $s = 1{,}55 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}12$, $T = 0{,}387$, $\vartheta = 15{,}0$, $s_2 = 3{,}91 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 6. 189,8 189,9 191,0 192,0 190,6 189,8 190,2 190,0 190,8 190,7
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1245$.
$\beta$) $L = 9{,}96$, $T = 0{,}684$, $\vartheta = 15{,}0$, $s = 1{,}50 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}16$, $T = 0.387$, $\vartheta = 15{,}0$, $s_2 = 3{,}81 \,.\, 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{1{,}55_2} \,.\, 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}42_5} \,.\, 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{3{,}95_3} \,.\, 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2{,}54_7}$.
$c = \mathbf{0{,}81_1} \,.\, 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0{,}30_6} : 10^{-12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}25_2} \,.\, 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{2{,}66}$.
$E = \mathbf{6{,}56_7} \,.\, 10^6$, $T = \mathbf{2{,}57_8} \,.\, 10^6$.

Bei Aluminium entsprechen durchweg grosse Biegungsmoduln grossen Drillungsmoduln; die bedeutenden Abweichungen vom Mittelwerthe sind hiernach auf Inhomogenitäten zurückzuführen.

**Bronze** ($\varepsilon = 8{,}731$).

Nr. 1. 160,5 161,5 159,5 158,5 160,5 160,5 159,0
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1036$.
$\beta$) $L = 10{,}08$, $T = 0{,}707$, $\vartheta = 15{,}0$, $s = 0{,}950 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}36$, $T = 0{,}403$, $\vartheta = 17{,}3$, $s_2 = 2{,}46_4 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 2. 158,0 158,0 159,0 159,5 159,0 158,0 158,0
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1027$.
$\beta$) $L = 10{,}15$, $T = 0{,}722$, $\vartheta = 15{,}2$, $s = 0{,}959 \,.\, 10^{-12}$
9,99, 0,714, 13,8, $0{,}953 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}37$, $T = 0{,}411$, $\vartheta = 16{,}0$, $s_2 = 2{,}49_8 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 159,0 156,5 157,5 158,0 161,5 159,0 159,0
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1023$.
$\beta$) $L = 10{,}16$, $T = 0{,}721$, $\vartheta = 16{,}4$, $s = 0{,}944 \,.\, 10^{-12}$
9,99, 0,715, 13,5, $0{,}944 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}40$, $T = 0{,}408$, $\vartheta = 15{,}0$, $s_2 = 2{,}42_7 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 159,5 158,5 159,5 160,5 159,5 158,5 159,0
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1030$.
$\beta$) $L = 10{,}10$, $T = 0{,}720$, $\vartheta = 17{,}1$, $s = 0{,}966 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}36$, $T = 0{,}409$, $\vartheta = 15{,}3$, $s_2 = 2{,}49_7 \,.\, 10^{-12}$
10,05, 0,405, 14,5, $2{,}52_4 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 5. 189,6 189,9 190,8 191,3 191,6 192,0 191,9 191,0 189,8 189,3
$B = 0{,}607$, $D = 0{,}1235$.
$\beta$) $L = 9{,}97$, $T = 0{,}544$, $\vartheta = 13{,}6$, $s = 0{,}974 \,.\, 10^{-12}$
9,84, 0,537, 13,5, $0{,}962 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9{,}89$, $T = 0{,}307$, $\vartheta = 13{,}8$, $s_2 = 2{,}51_1 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 6. 185,4 185,2 187,4 188,3 189,0 189,2 189,3 188,9 187,1 186,3
$B = 0{,}603$, $D = 0{,}1215$.
$\beta$) $L = 9{,}92$, $T = 0{,}557$, $\vartheta = 13{,}6$, $s = 0{,}971 \,.\, 10^{-12}$
9,86, 0,556, 13,3, $0{,}975 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9.94$. $T = 0{,}319$, $\vartheta = 13{,}8$, $s_2 = 2{,}55_5 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 7. 125,1 125,3 125,2 126,0 126,2 127,1 127,1 126,7 126,4 125,8
$B = 0{,}608$, $D = 0{,}0817$.
$\beta$) $L = 9{,}96$, $T = 1{,}010$, $\vartheta = 14{,}6$, $s = 0{,}973 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 8. 122,0 123,0 124,5 125,9 126,4 126,6 126,5 124,7 123,7 123,5
$B = 0{,}607$, $D = 0{,}0808$.
$\beta$) $L = 9{,}96$, $T = 1{,}031$, $\vartheta = 14{,}6$, $s = 0{,}979 \,.\, 10^{-12}$
9,92, 1,029, 14,0, $0{,}981 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 9. 125,7 124,2 123,6 124,2 125,9 126,7 126,4 126,2 124,4 123,6
$B = 0{,}607$, $D = 0{,}08125$.
$\beta$) $L = 9{,}99$, $T = 1{,}019$, $\vartheta = 14{,}6$, $s = 0{,}972 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 10. 124,2 124,2 123,0 124,1 124,4 125,3 124,7 122,9 122,7 123,7
$B = 0{,}597$, $D = 0{,}0803$.
$\beta$) $L = 9{,}94$, $T = 1{,}045$, $\vartheta = 14{,}8$, $s = 0{,}975 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 11. 191,5 192,1 192,4 191,9 191,8 191,9 191,8 191,9 191,4 191,1
$B = 0{,}606$, $D = 0{,}1242$
$\beta$) $L = 9{,}86$, $T = 0{,}529$, $\vartheta = 14{,}0$, $s = 0{,}947 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9{,}92$, $T = 0{,}307$, $\vartheta = 14{,}2$, $s_2 = 2{,}53_4 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 12. 193,5 193,2 193,9 194,2 193,9 193,9 194,3 194,5 194,2 193,1
$B = 0{,}604$, $D = 0{,}1255$.
$\beta$) $L = 9{,}84$, $T = 0{,}525$, $\vartheta = 14{,}2$, $s = 0{,}960 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9{,}91$, $T = 0{,}302$, $\vartheta = 14{,}3$, $s_2 = 2{,}52_7 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 14. 140,6 140,5 140,0 140,3 140,5 140,7 141,3 140,7 140,3 140,3
$B = 0{,}602$, $D = 0{,}0910$.
$\beta$) $L = 9{,}77$, $T = 0{,}844$, $\vartheta = 15{,}3$, $s = 0{,}950 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9{,}91$, $T = 0{,}483$, $\vartheta = 15{,}4$, $s_2 = 2{,}55_4 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 15. 138,0 136,8 137,4 137,4 139,0 139,8 140,0 139,5 138,4 138,1
$B = 0{,}601$, $D = 0{,}08975$.
$\beta$) $L = 9{,}71$, $T = 0{,}866$, $\vartheta = 15{,}3$, $s = 0{,}964 \,.\, 10^{-12}$.

Mittelw.: $s = \mathbf{0{,}962_7} \,.\, 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}29_2} \,.\, 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{2{,}50_9} \,.\, 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2{,}60_6}$.
$c = \mathbf{1{,}41} \,.\, 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0{,}61} \,.\, 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}40} \,.\, 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{2{,}30}$.
$E = \mathbf{10{,}5_9} \,.\, 10^{+6}$, $T = \mathbf{4{,}06} \,.\, 10^{+6}$.

Da die Stäbe aus Bronze in grösserer Zahl zu den Beobachtungen über innere Reibung benutzt wurden, so ergaben sich beiläufig für sie auch die Elasticitätsmoduln; das Material hat sich als leidlich, doch nicht hervorragend, homogen und isotrop erwiesen.

### Cadmium ($s = 8{,}65$).

Nr. 1. 153,5 155,3 156,1 156,5 155,9 155,0 153,9 152,7 152,5
$B = 0{,}604$, $D = 0{,}1002$.
$\beta$) $L = 9{,}61$, $T = 0{,}892$, $\vartheta = 14{,}6$, $s = 1{,}44 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}15$, $T = 0{,}540$, $\vartheta = 14{,}7$, $s_2 = 4{,}13 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 2. 153,9 155,0 154,8 155,9 156,2 154,8 155,4 155.0 154,8 154,4
$B = 0{,}605$, $D = 0{,}1005$.
$\beta$) $L = 10{,}09$, $T = 0{,}900$, $\vartheta = 13{,}0$, $s = 1{,}41_5 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}19$, $T = 0{,}545$, $\vartheta = 14{,}6$, $s_2 = 4{,}23 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 154,0 153,5 154,2 154,5 154,3 155,2 156,2 157,1 155,4 154,4
$B = 0{,}607$, $D = 0{,}1001$.
$\beta$) $L = 10{,}02$, $T = 0{,}908$, $\vartheta = 15{,}4$, $s = 1{,}44 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}15$, $T = 0{,}540$, $\vartheta = 14{,}7$, $s_2 = 4{,}13 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 154,7 154,4 155,3 155,8 155,0 154,5 153,7 153,2 154,1 154,6
$B = 0{,}604$, $D = 0{,}1003$.
β) $L = 10{,}07$, $T = 0{,}921$, $\vartheta = 14{,}7$, $s = 1{,}47_5 \cdot 10^{-12}$
δ) $L = 10{,}18$, $T = 0{,}535$, $\vartheta = 15{,}4$, $s_2 = 4{,}15 \cdot 10^{-12}$.

Mittelw.: $s = \mathbf{1{,}44_2} \cdot 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}63_8} \cdot 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{4{,}16_0} \cdot 10^{-12}$, $s_1/s_2 = \mathbf{2{,}88_5}$.
$c = \mathbf{2{,}33} \cdot 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{1{,}85} \cdot 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}24} \cdot 10^{+12}$, $c_1/c = \mathbf{1{,}26}$.
$E = \mathbf{7{,}07} \cdot 10^{+6}$, $T = \mathbf{2{,}45} \cdot 10^{+6}$.

Die Cadmiumstäbchen sind infolge der Weichheit des Materiales nicht sehr regelmässig gestaltet. Zwei von ihnen wurden für andere Untersuchungen dünner geschliffen und zeigten um einige Procent verkleinerte Moduln; offenbar hat die doppelte Bearbeitung das Material dichter und widerstandsfähiger gemacht.

Eisen ($\varepsilon = 7{,}188$).

Nr. 1. 157,0 156,0 157,3 158,7 159,8 160,0 160,1 159,1 157,5 157,5
$B = 0{,}596$, $D = 0{,}1026$.
β) $L = 10{,}16$, $T = 0{,}662$, $\vartheta = 16{,}0$, $s = 0{,}797 \cdot 10^{-12}$
δ) $L = 10{,}07$, $T = 0{,}363$, $\vartheta = 16{,}5$, $s_2 = 1{,}98_5 \cdot 10^{-12}$

Nr. 2. 158,4 159,1 159,8 160,5 160,7 160,3 159,4 158,2 157,3 158,1
$B = 0{,}595$, $D = 0{,}1030$.
β) $L = 10{,}28$, $T = 0{,}661$, $\vartheta = 15{,}8$, $s = 0{,}793 \cdot 10^{-12}$
δ) $L = 10{,}52$, $T = 0{,}363$, $\vartheta = 16{,}5$, $s_2 = 1{,}91_9 \cdot 10^{-12}$

Nr. 3. 157,8 158,6 160,3 162,0 162,7 162,9 162,3 161,1 159,4 159,2
$B = 0{,}596$, $D = 0{,}1038$.
β) $L = 10{,}17$, $T = 0{,}641$, $\vartheta = 15{,}4$, $s = 0{,}773 \cdot 10^{-12}$
δ) $L = 10{,}10$, $T = 0{,}355$, $\vartheta = 14{,}5$, $s_2 = 1{,}96_0 \cdot 10^{-12}$

Nr. 4. 156,8 157,7 159,2 159,7 159,5 159,3 159,4 159,4 158,0 157,9
$B = 0{,}596$. $D = 0{,}1028$.
β) $L = 10{,}18$, $T = 0{,}669$, $\vartheta = 16{,}1$, $s = 0{,}817 \cdot 10^{-12}$
δ) $L = 10{,}44$, $T = 0{,}365$, $\vartheta = 15{,}3$, $s_2 = 1{,}94_7 \cdot 10^{-12}$

Nr. 5. 191,6 193,6 195,3 195,5 194,6 194,0 193,6 193,4 192,8 192,0
$B = 0{,}607$, $D = 0{,}1254$.
β) $L = 9{,}94$, $T = 0{,}480$, $\vartheta = 13{,}6$, $s = 0{,}797 \cdot 10^{-12}$
δ) $L = 10{,}09$, $T = 0{,}269$, $\vartheta = 14{,}0$, $s_2 = 1{,}97_6 \cdot 10^{-12}$

Nr. 6. 190,6 192,0 192,9 193,0 193,3 193,3 192,7 192,6 192,0 190,9
$B = 0{,}606$, $D = 0{,}1246$.
β) $L = 9{,}91$, $T = 0{,}483$, $\vartheta = 14{,}7$, $s = 0{,}792 \cdot 10^{-12}$
δ) $L = 10{,}05$, $T = 0{,}269$, $\vartheta = 14{,}6$, $s_2 = 1{,}94_2 \cdot 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{0{,}795} \cdot 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}182} \cdot 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{1{,}95_5} \cdot 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2{,}45_9}$.
$c = \mathbf{1{,}46} \cdot 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0{,}43_4} \cdot 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}51} \cdot 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{3{,}36}$.
$E = \mathbf{12{,}8_2} \cdot 10^{+6}$, $T = \mathbf{5{,}21} \cdot 10^{+6}$.

Gold ($\varepsilon = 19{,}28$).

Nr. 1. 157,3 157,3 157,0 156,5 156,1 155,7 155,5 156,0 157,1 157,0
$B = 0{,}601_7$, $D = 0{,}1014$.
β) $L = 9{,}59$, $T = 0{,}854$, $\vartheta = 18{,}0$, $s = 1{,}37 \cdot 10^{-12}$
δ) $L = 9{,}58$, $T = 0{,}479$, $\vartheta = 19{,}0$, $s_2 = 3{,}55 \cdot 10^{-12}$

Nr. 2. 156,7 157,6 157,4 156,8 155,9 155,1 155,0 155,8 157,1 156,7
$B = 0{,}6018$, $D = 0{,}1013$.
$\beta$) $L = 9{,}58$, $T = 0{,}842$, $\vartheta = 19{,}0$, $s = 1{,}32 \cdot 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9{,}54$, $T = 0{,}483$, $\vartheta = 18{,}5$, $s_2 = 3{,}61 \cdot 10^{-12}$
Mittelw.: $s = \mathbf{1{,}34_5} \cdot 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}44_5} \cdot 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{3{,}58} \cdot 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2{,}66}$.
$c = \mathbf{1{,}1_1} \cdot 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0{,}54_6} \cdot 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}28_0} \cdot 10^{-12}$, $c/c_1 = \mathbf{2{,}02}$.
$E = \mathbf{7{,}58} \cdot 10^{+6}$, $T = \mathbf{2{,}85} \cdot 10^{+6}$.

Als die Goldstäbchen direct nach der Herstellung beobachtet wurden, gaben sie untereinander stark abweichende Resultate; offenbar hatte die Bearbeitung auf das so äusserst weiche Material eine Wirkung geübt. Nach einmaligem leichten Glühen fanden sich die vorstehenden befriedigenden Zahlen.

**Kupfer** ($\varepsilon = 8{,}860$).

Nr. 1. 157,2 158,7 159,7 158,4 159,0 159,7 160,6
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1028$.
$\beta$) $L = 10{,}08$, $T = 0{,}707$, $\vartheta = 13{,}5$, $s = 0{,}929 \cdot 10^{-12}$
10,16, 0,711, 15,0, $0{,}932 \cdot 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}10$, $T = 0{,}381$, $\vartheta = 14{,}5$, $s_2 = 2{,}21 \cdot 10^{-12}$

Nr. 2. 157,4 159,2 160,2 160,7 160,6 160,0 160,0 160,4 160,7 159,6
$B = 0{,}602$, $D = 0{,}1036$.
$\beta$) $L = 10{,}25$, $T = 0{,}709$, $\vartheta = 14{,}2$, $s = 0{,}942 \cdot 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}07$, $T = 0{,}381$, $\vartheta = 14{,}0$, $s_2 = 2{,}28 \cdot 10^{-12}$
10,10, 0,382, 15,0, $2{,}28 \cdot 10^{-12}$
10,08, 0,381, 15,0, $2{,}27 \cdot 10^{-12}$

Nr. 3. 157,2 158,5 160,0 159,7 159,4 159,4 158,4
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1025$.
$\beta$) $L = 10{,}16$, $T = 0{,}705$, $\vartheta = 15{,}0$, $s = 0{,}908 \cdot 10^{-12}$
10,08, 702, $0{,}907 \cdot 10^{-12}$
10,23, 708, $0{,}909 \cdot 10^{-12}$
10,22, 707, $0{,}908 \cdot 10^{-12}$
10,12, 700, $0{,}899 \cdot 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}17$, $T = 0{,}371$, $\vartheta = 14{,}7$, $s_2 = 2{,}06 \cdot 10^{-12}$
10,12, 0,373, 14,5, $2{,}10 \cdot 10^{-12}$

Nr. 4. 156,7 156,7 158,1 158,4 157,8 158,0 157,8
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1018$.
$\beta$) $L = 10{,}24$, $T = 0{,}735$, $\vartheta = 16{,}0$, $s = 0{,}960 \cdot 10^{-12}$
10,06, 0,731, 14,4, $0{,}966 \cdot 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}41$, $T = 0{,}390$, $\vartheta = 14{,}8$, $s_2 = 2{,}18 \cdot 10^{-12}$

Nr. 5. 191,2 191,7 192,8 193,9 193,9 193,4 192,7 192,8 191,8 191,7
$B = 0{,}605$, $D = 0{,}1247$.
$\beta$) $L = 9{,}97$, $T = 0{,}532$, $\vartheta = 15{,}0$, $s = 0{,}955 \cdot 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9{,}94$, $T = 0{,}272_5$, $\vartheta = 15{,}0$, $s_2 = 2{,}02 \cdot 10^{-12}$

Nr. 6. 194,6 194,0 196,0 195,4 194,9 194,3 195,1 195,2 194,9 194,7
$B = 0{,}606$, $D = 0{,}1263$.
$\beta$) $L = 9{,}94$, $T = 0{,}517$, $\vartheta = 13{,}8$, $s = 0{,}941 \cdot 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}10$, $T = 0{,}269$, $\vartheta = 15{,}0$, $s_2 = 2{,}01 \cdot 10^{-12}$
10,12, 0,271, 14,2, $2{,}04 \cdot 10^{-12}$
10,21, 0,270, 13,8, $2{,}00 \cdot 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{0{,}939_5} \cdot 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}12_6} \cdot 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{2{,}18_2} \cdot 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2{,}27_0}$.
$c = \mathbf{1{,}11_0} \cdot 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0{,}17_3} \cdot 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}46_8} \cdot 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{6{,}4_2}$.
$E = \mathbf{10{,}8_5} \cdot 10^{+6}$, $T = \mathbf{4{,}78} \cdot 10^{+6}$.

An den Kupferstäbchen 2 und 3 sind die Beoabachtungen zur Constatirung eines etwaigen Einflusses der Befestigungsart vorgenommen worden. Diese Stäbchen sind in zwei verschiedene Paare von Fassungen bald eingelöthet, bald eingekittet und so in Schwingungen versetzt worden. Die erhaltenen Werthe weichen nur unmerklich von einander ab; die beiden Befestigungsarten sind also als gleichwerthig zu betrachten,

Zugleich beweisen diese Resultate, dass die bedeutenden Abweichungen der für *verschiedene* Stäbchen erhaltenen Werthe nicht in der Beobachtungsmethode, sondern in der Inhomogenität der Substanz begründet sind.

### Magnesium ($s$ = 1,741).

Nr. 1. 149,5 153,9 153,8 152,7 152,6 153,1 153,7 152,2 151,1 152,5
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}0988$.
$\beta$) $L = 9{,}56$, $T = 1{,}175$, $\vartheta = 13{,}8$, $s = 2{,}40 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9{,}58$, $T = 0{,}643$, $\vartheta = 14{,}5$, $s_2 = 5{,}92 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 2. 149,0 155,4 156,4 154,6 153,5 155,4 155,0 154,7 153,5 153,6
$B = 0{,}605$, $D = 0{,}0999$.
$\beta$) $L = 10{,}16$, $T = 1{,}203$, $\vartheta = 14{,}1$, $s = 2{,}47 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}18$, $T = 0{,}661$, $\vartheta = 16{,}0$, $s_2 = 6{,}13 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 152,3 151,7 152,0 153,1 153,2 155,0 155,3 156,0 154,7
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}0995$.
$\beta$) $L = 8{,}78$, $T = 1{,}106$, $\vartheta = 15{,}2$, $s = 2{,}36 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 8{,}78$, $T = 0{,}612$, $\vartheta = 14{,}7$, $s_2 = 5{,}97 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 153,8 154,6 154,2 153,4 153,2 154,3 155,0 154,9
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}0999$.
$\beta$) $L = 7{,}59$, $T = 1{,}015$, $\vartheta = 14{,}7$, $s = 2{,}33 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 7{,}68$, $T = 0{,}563$, $\vartheta = 14{,}6$, $s_2 = 5{,}85 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 5. 189,1 188,8 189,6 190,1 189,6 189,6 189,4 189,4 189,6 189,1
$B = 0{,}605$, $D = 0{,}1228$.
$\beta$) $L = 9{,}97$, $T = 0{,}863$, $\vartheta = 13{,}7$, $s = 2{,}40 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9{,}97$, $T = 0{,}480$, $\vartheta = 14{,}7$, $s_2 = 5{,}98 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 6. 187,6 188,1 188,6 188,9 188,5 188,8 189,1 188,6 187,5 187,1
$B = 0{,}609$, $D = 0{,}1220$.
$\beta$) $L = 9{,}98$, $T = 0{,}866$, $\vartheta = 13{,}2$, $s = 2{,}39 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9{,}97$, $T = 0{,}487$, $\vartheta = 15{,}2$, $s_2 = 5{,}92 \,.\, 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{2{,}39}_2 \,.\, 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}58}_9 \,.\, 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{5{,}96}_1 \,.\, 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2{,}49}_2$.
$c = \mathbf{0{,}49}_8 \,.\, 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0{,}16}_3 \,.\, 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}16}_7 \,.\, 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{3{,}0}_6$.
$E = \mathbf{4{,}26}_1 \,.\, 10^{+6}$, $T = \mathbf{1{,}71}_0 \,.\, 10^{+6}$.

### Messing ($s$ = 8,438).

Nr. 1. 159,8 158,5 157,3 158,0 159,3 160,2 159,4 158,5 158,5 158,1
$B = 0{,}607$, $D = 0{,}1029$.
$\beta$) $L = 9{,}97$, $T = 0{,}732$, $\vartheta = 16{,}8$, $s = 1{,}02 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}13$, $T = 0{,}434$, $\vartheta = 14{,}0$, $s_2 = 2{,}88 \,.\, 10^{-12}$

**Nr. 2.** 161,1 162,1 160,1 159,8 162,3 162,4 160,9 160,8 162,2 162,2

$B = 0{,}615$, $D = 0{,}1046$.

$\beta$) $L = 9{,}83$, $T = 0{,}716$, $\vartheta = 15{,}6$, $s = 1{,}05 \cdot 10^{-12}$

$\delta$) $L = 10{,}11$, $T = 0{,}416$, $\vartheta = 16{,}8$, $s_2 = 2{,}84 \cdot 10^{-12}$

**Nr. 3.** 159,1 161,1 162,6 162,0 162,6 162,2 160,1 159,9 159,9 161,0

$B = 0{,}611$, $D = 0{,}1043$.

$\beta$) $L = 10{,}00$, $T = 0{,}747$, $\vartheta = 13{,}6$, $s = 1{,}11 \cdot 10^{-12}$

$\delta$) $L = 10{,}12$, $T = 0{,}410$, $\vartheta = 16{,}6$, $s_2 = 2{,}72 \cdot 10^{-12}$

**Nr. 4.** 163,1 162,9 159,8 161,1 163,5 162,8 159,5 158,4 161,7 163,3

$B = 0{,}612$, $D = 0{,}1047$.

$\beta$) $L = 10{,}09$, $T = 0{,}728$, $\vartheta = 14{,}7$, $s = 1{,}06 \cdot 10^{-12}$

$\delta$) $L = 10{,}16$, $T = 0{,}418$, $\vartheta = 16{,}5$, $s_2 = 2{,}85 \cdot 10^{-12}$

**Nr. 5.** 154,3 153,9 153,5 153,4 153,4 152,6 151,6 152,0 152,9 152,9 153,4

$B = 0{,}604$, $D = 0{,}0991$.

$\beta$) $L = 10{,}01$, $T = 0{,}816$, $\vartheta = 16{,}5$, $s = 1{,}13 \cdot 10^{-12}$

$\delta$) $L = 10{,}04$, $T = 0{,}443$, $\vartheta = 13{,}0$, $s = 2{,}73 \cdot 10^{-12}$

**Nr. 6.** 153,0 153,4 153,1 151,7 150,3 150,3 151,5 152,1 151,4 150,8

$B = 0{,}608$, $D = 0{,}0983$.

$\beta$) $L = 10{,}17$, $T = 0.844$, $\vartheta = 12{,}5$, $s = 1{,}16 \cdot 10^{-12}$

9,93, 0,832, 15,0, $1{,}16 \cdot 10^{-12}$

$\delta$) $L = 10{,}03$, $T = 0{,}447$, $\vartheta = 16{,}5$, $s_2 = 2{,}73 \cdot 10^{-12}$

**Nr. 7.** 191,7 192,1 193,5 192,9 190,5 190,4 191,7 193,0 191,9 191,5

$B = 0{,}607$, $D = 0{,}1244$.

$\beta$) $L = 9{,}90$, $T = 0{,}578$, $\vartheta = 15{,}0$, $s = 1{,}13 \cdot 10^{-12}$

$\delta$) $L = 9{,}95$, $T = 0{,}311$, $\vartheta = 15{,}0$, $s_2 = 2{,}61 \cdot 10^{-12}$

**Nr. 8.** 191,3 191,5 192,7 192,1 191,7 192,0 193,0 193,2 191,9 191,0

$B = 0{,}606$, $D = 0{,}1244$.

$\beta$) $L = 9{,}89$, $T = 0{,}592$, $\vartheta = 15{,}0$, $s = 1{,}185 \cdot 10^{-12}$

$\delta$) $L = 10{,}03$, $T = 0{,}318$, $\vartheta = 14{,}8$, $s_2 = 2{,}71 \cdot 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{1{,}10}_6 \cdot 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}27}_4 \cdot 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{2{,}75}_9 \cdot 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2{,}49}_5$.

$c = \mathbf{1{,}08} \cdot 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0{,}35}_5 \cdot 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}36} \cdot 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{3{,}04}$.

$E = \mathbf{9{,}21}_7 \cdot 10^{+6}$, $T = \mathbf{3{,}69}_5 \cdot 10^{+6}$.

Die Abweichungen zwischen den erhaltenen Zahlen sind in der Hauptsache auf unvollkommene Isotropie zurückzuführen, da meist grosse Werthe $s$ kleinen Werthen $s_2$ entsprechen und umgekehrt.

### Nickel ($\varepsilon = 8{,}795$).

**Nr. 1.** 153,5 154,0 154,0 153,5 152,8 147,5 147,0

$B = 0{,}602$, $D = 0{,}0985$.

$\beta$) $L = 10{,}26$, $T = 0{,}553$, $\vartheta = 15{,}8$, $s = 0{,}492 \cdot 10^{-12}$

$\delta$) $L = 10{,}25$, $T = 0{,}310$, $\vartheta = 16{,}0$, $s_2 = 1{,}28 \cdot 10^{-13}$

**Nr. 2.** 155,0 155,0 155,0 156,0 156,5 153,5 152,0

$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1005$.

$\beta$) $L = 10{,}14$, $T = 0{,}548$, $\vartheta = 15{,}3$, $s = 0{,}518 \cdot 10^{-12}$

$\delta$) $L = 10{,}47$, $T = 0{,}308$, $\vartheta = 16{,}3$, $s_2 = 1{,}31 \cdot 10^{-12}$

Nr. 3. 154,0 154,3 156,1 157,1 156,6 156,5 156,1 155,4 154,5 154,3
$B = 0,602$, $\vartheta = 0,1011$.
β) $L = 10,14$, $T = 0,531$, $\vartheta = 16,4$, $s = 0,497 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10,24$, $T = 0,306$, $\vartheta = 15,6$, $s_2 = 1,34 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 152,0 153,5 154,5 154,8 154,5 153,0 154,0
$B = 0,600$, $D = 0,0998$.
β) $L = 10,17$, $T = 0,540$, $\vartheta = 16,4$, $s = 0,491 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10,48$, $T = 0,306$, $\vartheta = 16,1$, $s_2 = 1,26 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 5. 195,8 196,0 198,0 198,7 198,1 197,7 197,2 197,0 196,0 195,8
$B = 0,606$, $D = 0,1275$.
β) $L = 9,95$, $T = 0,375$, $\vartheta = 14,5$, $s = 0,511 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10,11$, $T = 0,214$, $\vartheta = 14,2$, $s_2 = 1,31 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 6. 194,5 194,6 195,0 194,8 194,3 195,1 195,9 196,0 195,4 195,3
$B = 0,605$, $\vartheta = 0,1263$.
β) $L = 9,96$, $T = 0,376$, $\vartheta = 14,2$, $s = 0,497 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10,04$, $T = 0,2165$, $\vartheta = 14,0$, $s_2 = 1,32 \,.\, 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{0,501} \,.\, 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0,151} \,.\, 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{1,80_3} \,.\, 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2,60}$.
$c = \mathbf{2,69} \,.\, 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{1,16} \,.\, 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0,76} \,.\, 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{2,33}$.
$E = \mathbf{20,3_4} \,.\, 10^{+6}$, $T = \mathbf{7,82} \,.\, 10^{+6}$.

## Silber ($\varepsilon = 10,49$).

Nr. 1. 188,2 187,2 186,8 187,7 188,2 187,2 187,4 187,2 187,0 187,2
$B = 0,604$, $D = 0,1214$.
β) $L = 10,00$, $T = 0,650$, $\vartheta = 14,5$, $s = 1,31 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10,06$, $T = 0,371$, $\vartheta = 14,7$, $s_2 = 3,41 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 2. 186,3 186,5 188,3 189,1 188,9 188,2 188,0 187,7 186,4 186,6
$B = 0,603$, $D = 0,1216$.
β) $L = 10,06$, $T = 0,646$, $\vartheta = 14,0$, $s = 1,29 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10,03$, $T = 0,367$, $\vartheta = 14,0$, $s_2 = 3,36 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 139,7 140,1 140,8 141,9 141,9 142,9 143,3 142,2 141,4 141,6
$B = 0,610$, $D = 0,0921$.
β) $L = 9,86$, $T = 0,975_5$, $\vartheta = 15,6$, $s = 1,32 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10,09$, $T = 0,558$, $\vartheta = 15,0$, $s = 3,52 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 139,8 140,6 141,1 141,3 141,5 141,6 142,5 143,2 142,9 141,0
$B = 0,608$, $D = 0,0926$.
β) $L = 9,85$, $T = 0,984$, $\vartheta = 15,6$, $s = 1,36 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 9,85$, $T = 0,550$, $\vartheta = 15,6$, $s_2 = 3,55 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 5. 141,7 143,0 143,1 143,0 142,5 142,3 142,4 142,3 142,2 141,7
$B = 0,603$, $D = 0,0922_4$.
β) $L = 9,98$, $T = 0,970$, $\vartheta = 14,2$, $s = 1,28 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 9,96$, $T = 0,547$, $\vartheta = 14,8$, $s_2 = 3,40 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 6. 141,1 140,5 140,0 140,0 139,0 140,8 141,5 141,6 140,8 140,0
$B = 0,602$, $D = 0,0910_6$.
β) $L = 9,89$, $T = 0,990$, $\vartheta = 14,8$, $s = 1,29 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10,00$, $T = 0,561$, $\vartheta = 14,2$, $s_2 = 3,42 \,.\, 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{1,30_8} \,.\, 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0,41_3} \,.\, 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{3,44_8} \,.\, 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2,63}$.
$c = \mathbf{1,08} \,.\, 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0,49_9} \,.\, 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0,29} \,.\, 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{2,1_6}$.
$E = \mathbf{7,79} \,.\, 10^{+6}$, $T = \mathbf{2,96} \,.\, 10^{+6}$.

**Stahl** ($\varepsilon = 7,822$).
($L\ S$ 84 $R.$)

Nr. 1. 126,5 126,3 126,9 127,1 127,5 127,6 127,6 127,3 126,2 125,8
$B = 0,600, \quad D = 0,0822.$[1])
$\beta$) $L = 10,08, \quad T = 0,723, \quad \vartheta = 15,6, \qquad s = 0,496 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10,11, \quad T = 0,397, \quad \vartheta = 16,2, \qquad s_2 = 1,25_5 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 2. 126,6 126,8 127,1 127,6 127,7 128,4 128,2 127,7 126,7 126,2
$B = 0,600, \quad D = 0,0824.$
$\beta$) $L = 10,07, \quad T = 0,721, \quad \vartheta = 16,1, \qquad s = 0,498 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10,32, \quad T = 0,401, \quad \vartheta = 14,5, \qquad s_2 = 1,26_3 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 125,1 125,6 127,2 128,0 128,1 128,4 128,4 128,0 126,3 125,4
$B = 0,603, \quad D = 0,0823.$
$\beta$) $L = 10,13, \quad T = 0,724, \quad \vartheta = 17,0, \qquad s = 0,500 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10,11, \quad T = 0,397, \quad \vartheta = 15,0, \qquad s_2 = 1,26_6 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 127,0 128,0 128,5 128,7 129,0 129,2 129,1 128,9 128,3 127,1
$B = 0,600, \quad D = 0,0832.$
$\beta$) $L = 10,05, \quad T = 0,713, \quad \vartheta = 15,0, \qquad s = 0,502 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10,21, \quad T = 0,393, \quad \vartheta = 16,6, \qquad s_2 = 1,26_3 \,.\, 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{0,499} \,.\, 10^{-12}, \; s_1 = -\mathbf{0,132} \,.\, 10^{-12}, \; s_2 = \mathbf{1,26_2} \,.\, 10^{-12}, \; s_2/s = \mathbf{2,54}.$
$c = \mathbf{2,47} \,.\, 10^{+12}, \; c_1 = \mathbf{0,89} \,.\, 10^{+12}, \; c_2 = \mathbf{0,79} \,.\, 10^{+12}, \; c/c_1 = \mathbf{2,78}.$
$E = \mathbf{20,4_2} \,.\, 10^{+6}, \; T = \mathbf{8,07_6} \,.\, 10^{+6}.$

**Stahl** ($\varepsilon = 7,829$).
($L\ S$ 84 $N.$)

Nr. 1. 138,5 139,2 138,7 139,6 140,1 139,9 141,0 141,5 141,0 139,8 138,7
$D = 0,608, \quad D = 0,0905_5.$
$\beta$) $L = 9,82, \quad T = 0,609_4, \quad \vartheta = 18,0 \qquad s = 0,489_5 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9,87, \quad T = 0,336_5, \quad \vartheta = 16,7 \qquad s_2 = 1,24_0 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 2. 142,8 141,6 141,8 143,0 143,7 143,6 144,6 144,8 144,0 142,7 142,0
$B = 0,609, \quad D = 0,0927_3.$
$\beta$) $L = \;\; 9,80, \quad T = 0,588 \;, \quad \vartheta = 18,0 \qquad s = 0,492 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10,00, \quad T = 0,3253, \quad \vartheta = 16,7 \qquad s_2 = 1,22_8 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 139,1 139,4 139,7 140,3 139,2 139,1 139,4 140,3 140,0 139,2 139,1.
$B = 0,605, \quad D = 0,0904_0.$
$\beta$) $L = 9,80, \quad T = 0,612, \quad \vartheta = 16,7, \qquad s = 0,491 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9,86, \quad T = 0,337, \quad \vartheta = 18,0, \qquad s_2 = 1,23_8 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 139,8 138,8 139,1 140,0 140,6 140,8 141,4 142,0 141,1 139,3 139,5
$B = 0,605, \quad D = 0,0907_9.$
$\beta$) $L = 9,81, \quad T = 0,606, \quad \vartheta = 16,7, \qquad s = 0,4865 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9,87, \quad T = 0,335, \quad \vartheta = 18,0, \qquad s_2 = 1,22_9 \,.\, 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{0,490} \,.\, 10^{-12}, \; s_1 = -\mathbf{0,126} \,.\, 10^{-12}, \; s_2 = \mathbf{1,23_3} \,.\, 10^{-12}, \; s_2/s = \mathbf{2,51}.$
$c = \mathbf{2,49} \,.\, 10^{+12}, \; c_1 = \mathbf{0,87} \,.\, 10^{+12}, \; c_2 = \mathbf{0,81} \,.\, 10^{+12}, \; c/c_1 = \mathbf{2,87}.$
$E = \mathbf{20,8_0} \,.\, 10^{+6}, \; T = \mathbf{8,27} \,.\, 10^{+6}.$

**Stahl** ($\varepsilon = 7,827$).
($L\ S$ 84 $E.$)

Nr. 1. 138,8 141,5 142,4 141,9 141,4 141,3 141,5 141,3 141,5 141,2 138,4
$B = 0,607, \quad D = 0,0913.$
$\beta$) $L = 9,80, \quad T = 0,594, \quad \vartheta = 15,6 \qquad s = 0,478 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9,96, \quad T = 0,329, \quad \vartheta = 17,8 \qquad s_2 = 1,20_1 \,.\, 10^{-12}$

1) Im ersten Abdrucke steht fälschlich 0,0829.

Nr. 2. 140,0 141,8 142,2 142,6 142,6 142,4 142,2 142,4 142,1 141,9 140,1
$B = 0{,}608$, $D = 0{,}0918_5$.
β) $L = 9{,}86_5$, $T = 0{,}593$, $\vartheta = 15{,}3$ $s = 0{,}482 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 9{,}90$, $T = 0{,}327$, $\vartheta = 17{,}8$ $s_2 = 1{,}21_6 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 140,0 141,5 142,3 141,2 142,1 141,7 141,8 141,6 141,2 141,1 139,7
$B = 0{,}607$, $D = 0{,}0917$.
β) $L = 9{,}85$, $T = 0{,}593$, $\vartheta = 15{,}7$ $s = 0{,}480 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 9{,}86$, $T = 0{,}324$, $\vartheta = 15{,}3$ $s_2 = 1{,}19_2 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 139,9 140,1 140,4 140,3 139,7 139,6 139,3 139,4 139,5 139,5 138,8
$B = 0{,}605$, $D = 0{,}09045$.
β) $L = 9{,}80$, $T = 0{,}607$, $\vartheta = 15{,}7$ $s = 0{,}483_5 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10{,}06$, $T = 0{,}335$, $\vartheta = 15{,}0$ $s_2 = 1{,}19_6 \,.\, 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{0{,}480_9} \,.\, 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}120} \,.\, 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{1{,}20_1} \,.\, 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2{,}50}$.
$c = \mathbf{2{,}49} \,.\, 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0{,}82} \,.\, 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}83} \,.\, 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{3{,}02}$.
$E = \mathbf{21{,}1_9} \,.\, 10^{+6}$, $T = \mathbf{8{,}22} \,.\, 10^{+6}$.

## Stahl.

### (*L S* 86 *R.*)

Nr. 1. 140,8 140,9 142,4 143,8 143,3 141,6 141,2 141,9 141,0 140,2 140,3
$B = 0{,}607$, $D = 0{,}0917$.
β) $L = 9{,}85$, $T = 0{,}606$, $\vartheta = 18{,}0$ $s = 0{,}497_5 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 9{,}92$, $T = 0{,}334_5$, $\vartheta = 18{,}5$ $s_2 = 1{,}25_6 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 2. 139,3 139,1 139,8 141,3 140,5 139,7 140,2 140,3 139,8 138,6 139,1
$B = 0{,}609$, $D = 0{,}0905_5$.
β) $L = 9{,}81$, $T = 0{,}614$, $\vartheta = 18{,}1$ $s = 0{,}499 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 9{,}89$, $T = 0{,}339$, $\vartheta = 18{,}6$ $s_2 = 1{,}25_9 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 140,0 139,4 140,6 141,4 141,5 141,2 140,9 139,7 139,0 139,6 139,8
$B = 0{,}609$, $D = 0{,}0908_5$.
β) $L = 9{,}83$, $T = 0{,}609$, $\vartheta = 18{,}2$ $s = 0{,}494 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 9{,}91$, $T = 0{,}336_8$, $\vartheta = 18{,}1$ $s_2 = 1{,}24_6 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 140,8 139,4 139,6 140,9 141,5 141,7 142,4 142,2 140,9 139,5 140,4
$B = 0{,}609$, $D = 0{,}0912$.
β) $L = 9{,}85$, $T = 0{,}608$, $\vartheta = 18{,}2$ $s = 0{,}497_5 \,.\, 10^{-11}$
δ) $L = 9{,}90$, $T = 0{,}338$, $\vartheta = 18{,}1$ $s_2 = 1{,}27_6 \,.\, 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{0{,}497_0} \,.\, 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}133} \,.\, 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{1{,}25_9} \,.\, 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2{,}53_8}$.
$c = \mathbf{2{,}50} \,.\, 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0{,}91} \,.\, 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}80} \,.\, 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{2{,}75}$.
$E = \mathbf{20{,}5_1} \,.\, 10^{+6}$, $T = \mathbf{8{,}09_5} \,.\, 10^{+6}$.

## Stahl.

### (*L S* 86 *N.*)

Nr. 1. 141,3 141,0 142,1 142,8 142,4 142,0 141,7 141,8 141,5 140,6 140,5
$B = 0{,}611$, $D = 0{,}0917$.
β) $L = 9{,}82$, $T = 0{,}588$, $\vartheta = 19{,}0$, $s = 0{,}476_5 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 9{,}88$, $T = 0{,}326_4$, $\vartheta = 17{,}3$, $s_2 = 1{,}21_5 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 2. 139,2 138,8 139,7 141,0 141,6 141,6 141,6 141,4 140,7 139,8 141,0
$B = 0{,}609$, $D = 0{,}0910_5$.
β) $L = 9{,}81_5$, $T = 0{,}600$, $\vartheta = 19{,}0$, $s = 0{,}484 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 9{,}89$, $T = 0{,}332_2$, $\vartheta = 17{,}3$, $s_2 = 1{,}22_7 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 140,7 140,0 140,6 141,7 142,3 142,0 142,0 142,0 141,2 140,4 141,2
$B = 0{,}610$, $D = 0{,}0914_5$.
β) $L = 9{,}83$, $T = 0{,}594_5$, $\vartheta = 17{,}3$, $s = 0{,}481_5 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 9{,}89$, $T = 0{,}330$, $\vartheta = 19{,}0$, $s_2 = 1{,}22_9 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 139,1 138,6 139,4 140,0 140,2 140,5 141,3 141,5 140,9 139,6 139,1
$B = 0{,}602$, $D = 0{,}0906_5$.
β) $L = 9{,}79$, $T = 0{,}602$, $\vartheta = 17{,}3$, $s = 0{,}485 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 9{,}86_5$, $T = 0{,}332$, $\vartheta = 19{,}0$, $s_2 = 1{,}22_2 \,.\, 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{0{,}481_8} \,.\, 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}130} \,.\, 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{1{,}22_8} \,.\, 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2{,}54}$.
$c = \mathbf{2{,}59} \,.\, 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0{,}95} \,.\, 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}82} \,.\, 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{2{,}72}$.
$E = \mathbf{21{,}1_5}{+6}$, $T = \mathbf{8{,}34} \,.\, 10^{+6}$.

Stahl.
($L\,S$ 86 $E$.)

Nr. 1. 139,5 138.5 140,5 141,7 140,4 139,3 139,8 141,5 140,8 139,5 139,1
$B = 0{,}617$, $D = 0{,}0907$.
β) $L = 9{,}79$, $T = 0{,}5963$, $\vartheta = 18{,}2$, $s = 0{,}480_8 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10{,}00$, $T = 0{,}3326$, $\vartheta = 18{,}4$, $s_2 = 1{,}22_8 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 2. 141,0 140,2 141,5 143,1 143,4 142,6 141,7 140,7 139,8 138,2 139.0
$B = 0{,}613$, $D = 0{,}0913$.
β) $L = 9{,}86$, $T = 0{,}5961$, $\vartheta = 18{,}2$, $s = 0{,}483_5 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 9{,}88$, $T = 0{,}3292$, $\vartheta = 18{,}4$, $s_2 = 1{,}22_7 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 138,0 137,8 138,3 138,9 138,7 138,1 138,5 139,5 138,5 137,5 139,0
$B = 0{,}615$, $D = 0{,}08965$.
β) $L = 9{,}83$, $T = 0{,}611$, $\vartheta = 18{,}4$, $s = 0{,}483 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 10{,}02$, $T = 0{,}338$, $\vartheta = 18{,}2$, $s_2 = 1{,}21_3 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 140,4 139,0 140,1 141,0 141,0 140.5 141,0 141,2 140,4 139,7 139,5
$B = 0{,}615$, $D = 0{,}0909$.
β) $L = 9{,}83$, $T = 0{,}597$, $\vartheta = 18{,}4$, $s = 0{,}481 \,.\, 10^{-12}$
δ) $L = 9.92$, $T = 0{,}3296$, $\vartheta = 18{,}2$, $s_2 = 1{,}213 \,.\, 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{0{,}482} \,.\, 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}127} \,.\, 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{1{,}21_9} \,.\, 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2{,}53_6}$.
$c = \mathbf{2{,}56} \,.\, 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0{,}92} \,.\, 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}82} \,.\, 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{2{,}78}$.
$E = \mathbf{21{,}1_4} \,.\, 10^{+6}$, $T = \mathbf{8{,}36} \,.\, 10^{+6}$.

Vergleicht man die vorstehend für sechs verschiedene Stahlsorten erhaltenen Zahlen, so überrascht ihre fast völlige Uebereinstimmung. Die mechanische Bearbeitung, welche die Cohäsion und, wie ich mich überzeugt habe, auch die innere Reibung so bedeutend modificirt, ist also fast ohne Einfluss auf die Elasticitätsverhältnisse des Stahles. Auch die Dichte ändert sich innerhalb des Bereiches der Beobachtungsfehler ($\pm$ 0,005) kaum merklich.

Uebereinstimmend werden die beiden Moduln $s$ und $s_2$ durch die Bearbeitung ein wenig kleiner, die elastischen Wider-

stände $E$ und $T$ also grösser; nicht ohne Interesse ist dabei, dass, bei der Stahlsorte $LS$ 84 deutlich, bei der anderen $LS$ 86 undeutlicher, das Verhältniss $s_2/s$ nach 2,5 hin abnimmt. Denn die von mir gegebene Theorie der quasi-isotropen Körper verlangt, dass mit wachsender Feinheit des krystallinischen Kornes $s_2/s$ sich diesem Werth nähert; die mechanische Bearbeitung hat ja aber die Wirkung, das Korn zu verkleinern.

**Wismuth** ($\varepsilon = 10{,}05$).

Nr. 1. 151,6 150,9 150,9 151,5 152,4 152,9 153,3 153,3 153,7 153,8
$B = 0{,}595$, $D = 0{,}0987$.
$\beta$) $L = 10{,}24$, $T = 1{,}390$, $\vartheta = 15{,}6$, $s = 3{,}10 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}24$, $T = 0{,}788$, $\vartheta = 14{,}8$, $s_2 = 8{,}22 \,.\, 10^{-12}$
9,93, 0,781, 15,1. 8,32 . $10^{-12}$

Nr. 2. 150,2 151,2 149,6 148,8 153,0 154,6 154,1 153,7 154,0 152,2
$B = 0{,}593$, $D = 0{,}0985$.
$\beta$) $L = 10{,}14$, $T = 1{,}433$, $\vartheta = 15{,}6$, $s = 3{,}30 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}45$, $T = 0{,}822$, $\vartheta = 15{,}3$, $s_2 = 8{,}68 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 150,7 152,5 153,3 153,5 152,8 153,0 152,8 152,9
$B = 0{,}595$, $D = 0{,}0989$.
$\beta$) $L = 8{,}12$, $T = 1{,}253$, $\vartheta = 15{,}5$, $s = 3{,}20 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 8{,}09$, $T = 0{,}680$, $\vartheta = 15.0$, $s_2 = 7.80 \,.\, 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{3{,}20} \,.\, 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}92} \,.\, 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{8{,}25} \,.\, 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2{,}58}$.
$c = \mathbf{0{,}40_9} \,.\, 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0{,}16_6} \,.\, 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}12_4} \,.\, 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{2{,}4_6}$.
$E = \mathbf{3{,}19} \,.\, 10^{+6}$, $T = \mathbf{1{,}24} \,.\, 10^{+6}$.

Des sehr groben krystallinischen Kornes wegen stimmen diese Zahlen nur wenig überein. Merkwürdig ist die Kleinheit der elastischen Widerstände für dieses Material.

**Zink** ($\varepsilon = 7{,}212$).

Nr. 1. 156,5 157,4 158,0 158,3 156,8 156,5 156,5
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1015$.
$\beta$) $L = 10{,}26$, $T = 0{,}736$, $\vartheta = 16{,}2$, $s = 0{,}951 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}27$, $T = 0{,}427$, $\vartheta = 15{,}5$, $s_2 = 2{,}63 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 2. 157,4 155,3 158,3 157,7 158,0 158,9 156,8
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1018$.
$\beta$) $L = 10{,}15$, $T = 0{,}746$, $\vartheta = 16{,}0$, $s = 0{,}997 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}30$, $T = 0{,}422$, $\vartheta = 15{,}5$, $s_2 = 2{,}59 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 158,0 160,4 160,4 157,1 158,0 157,4 156,5
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1023$.
$\beta$) $L = 10{,}08$, $T = 0{,}741$, $\vartheta = 15{,}0$, $s = 1{,}005 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}16$, $T = 0{,}430$, $\vartheta = 15{,}3$, $s_2 = 2{,}76 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 160,9 160,6 159,7 159,1 159,1 159,4 160,9
$B = 0{,}600$, $D = 0{,}1034$.
$\beta$) $L = 9{,}76$, $T = 0{,}717$, $\vartheta = 15{,}0$, $s = 1{,}003 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10{,}00$, $T = 0{,}402$, $\vartheta = 15{,}6$, $s_2 = 2{,}53 \,.\, 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{0{,}98_9} \,.\, 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{0{,}32_6} \,.\, 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{2{,}63} \,.\, 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{2{,}60}$.
$c = \mathbf{1{,}49} \,.\, 10^{+12}$, $c_1 = \mathbf{0{,}73} \,.\, 10^{+12}$, $c_2 = \mathbf{0{,}38} \,.\, 10^{+12}$, $c/c_1 = \mathbf{2{,}04}$.
$E = \mathbf{10{,}3_0} \,.\, 10^{+6}$, $T = \mathbf{3{,}88} \,.\, 10^{+6}$.

**Zinn** ($s = 7,328$).

Nr. 1. 150,1 150,7 149,8 146,6 148,1 148,1 148,1
$B = 0,601$, $D = 0,0963$.
$\beta$) $L = 10,15$, $T = 1,119$, $\vartheta = 14,6$, $s = 1,90 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10,25$, $T = 0,707$, $\vartheta = 13,7$, $s_2 = 6,15 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 2. 156,5 155,9 156.5 155,9 152,6 151,9 151,6
$B = 0,600$, $D = 0,0999$.
$\beta$) $L = 10,02$, $T = 1,059$, $\vartheta = 14,5$, $s = 1,92 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10,25$, $T = 0,652$, $\vartheta = 13,1$, $s_2 = 5,87 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 3. 157,4 157,1 157,5 155,9 154,6 153,9 153,8
$B = 0,600$, $D = 0,1006$.
$\beta$) $L = 10,08$, $T = 1,064$, $\vartheta = 13,6$, $s = 1,97 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10,04$, $T = 0,634$, $\vartheta = 15,0$, $s_2 = 5,79 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 4. 154,0 155,2 155,3 154,5 154,8 153,4 156,8
$B = 0,600$, $D = 0,1002$.
$\beta$) $L = 10,06$, $T = 1,058$, $\vartheta = 14,0$, $s = 1,93 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 10,10$, $T = 0,635$, $\vartheta = 15,0$, $s_2 = 5,70 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 5. 185,5 184,2 184,4 184,9 184,3 184,9 185,2 184,6 184,2 185,2
$B = 0,602$, $D = 0,1197$.
$\beta$) $L = 9,90$, $T = 0,781$, $\vartheta = 15,0$, $s = 1,83 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9,87$, $T = 0,500$, $\vartheta = 14.2$, $s_2 = 6,05 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 6. 187,0 187,5 187,0 186,5 185,9 187.0 187,1 186,2 186,6 187,2
$B = 0,606$, $D = 0,1211$.
$\beta$) $L = 9,86$, $T = 0,762$, $\vartheta = 13,0$, $s = 1,82 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9,92$, $T = 0,486$, $\vartheta = 14.5$, $s_2 = 5,92 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 7. 136,6 137,0 137,9 138,4 138,5 137,7 136,9 136,7 136,5 136,3
$B = 0,602$, $D = 0,0889$.
$\beta$) $L = 9,77$, $T = 1,220$, $\vartheta = 16,0$, $s = 1,85 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9,84$, $T = 0,765$, $\vartheta = 16,5$, $s_0 = 6,04 \,.\, 10^{-12}$

Nr. 8. 136,9 136,0 135,8 136,4 136,7 137,3 136,5 136,1 136,2 137,3
$B = 0,606$, $D = 0,0885$.
$\beta$) $L = 9,68$, $T = 1,220$. $\vartheta = 16,0$, $s = 1,86 \,.\, 10^{-12}$
$\delta$) $L = 9,66$, $T = 0,741$, $\vartheta = 16,5$, $s_2 = 5,73 \,.\, 10^{-12}$

Mittelw.: $s = \mathbf{1,88}_5 \,.\, 10^{-12}$, $s_1 = -\mathbf{1,06}_8 \,.\, 10^{-12}$, $s_2 = \mathbf{5,90}_6 \,.\, 10^{-12}$, $s_2/s = \mathbf{3,13}$.
$E = \mathbf{5,40}_7 \,.\, 10^{+6}$, $T = \mathbf{1,72}_6 \,.\, 10^{+6}$.

Die erhaltenen Werthe $s$ und $s_2$ stimmen recht leidlich überein; um so merkwürdiger ist, dass aus ihnen die beiden Constanten $c$ und $c_1$ kleiner, als Null, folgen. Das würde auf labile Gleichgewichtszustände hinweisen; in der That folgt aus solchen Werthen bei allseitig gleichem Drucke keine Compression, sondern eine Dilatation. Dergleichen scheint mir unmöglich, und es bleibt zur Erklärung nur die Annahme übrig, dass das so überaus weiche Zinn durch die mit aller Vorsicht ausgeführte Bearbeitung doch die Isotropie verloren hat, also nach den Richtungen der drei Prismenkanten physikalisch verschiedenwerthig geworden ist, — eine Vermuthung, die zu weiterer Untersuchung auffordert.

## § 5. Die Beobachtungsresultate.

Die im vorigen Paragraphen erhaltenen Zahlen sollen unten noch einmal übersichtlich und systematisch zusammengestellt werden.

Dabei sollen die Metalle kurz durch ihre chemischen Symbole, Bronze durch Bo, Messing durch Me, Gussstahl ($LS\,84\,R$) durch St bezeichnet werden.

Ich gebe zunächst die elastischen Moduln und Widerstände.

Der *Dehnungs-* (oder Biegungs-)*modul* $s$, sowie der *Dehnungs-* (oder Biegungs-)*widerstand* $E$ ist am einfachsten definirt durch die Längsdehnung $\lambda$ eines Cylinders vom Querschnitt $Q$ unter einseitigem Zug $P$ nach der Beziehung:

$$\lambda = \frac{P}{Q}\,s = \frac{P}{Q\,E};$$

der *Modul*, resp. *Widerstand der seitlichen Contraction* $s_1$ resp. $C$ durch die bei demselben Vorgang auftretende seitliche Dilation $\lambda_1$, gemäss der Formel

$$\lambda_1 = -\frac{P}{Q}\,s_1 = -\frac{P}{Q\,C}.$$

Der *Drillungsmodul* $s_2 = 2\,(s - s_1)$ und der *Drillungswiderstand*

$$T = \frac{1}{2\left(\frac{1}{E} - \frac{1}{C}\right)}$$

gibt sich einfach durch den Torsionswinkel $\tau$ eines Stabes von der Länge $L$ und den Querdimensionen $B$ und $D$, wo $B$ viel grösser ist, als $D$, gemäss der Formel

$$\tau = \frac{3\,L\,N\,s_2}{B\,D^3} = \frac{3\,L\,N}{T\,B\,D^3}.$$

Der *Compressionsmodul*

$$s_3 = 3\,(s + 2\,s_1) = 3\,(3\,s - s_2)$$

oder der *Compressionswiderstand*

$$K = \frac{1}{3\left(\frac{1}{E} + \frac{2}{C}\right)}$$

folgt aus der räumlichen Dilatation $S$ bei allseitig gleichem Druck $p$ nach der Gleichung

$$\delta = p\,s_3 = \frac{p}{K}.$$

Da $s$ und $s_2$, resp. $E$ und $T$ ziemlich direct beobachtet sind, ist ihre Genauigkeit grösser, als die von $s_1$ und $s_3$, resp. $C$ und $K$.

Die Moduln sind in absoluten Einheiten angegeben, die Widerstände in Millimetern und Grammgewichten.

Elasticitätsmoduln.

| | $+s.10^{+12}$ | $-s_1.10^{+12}$ | $+s_2.10^{+12}$ | $+s_3.10^{+12}$ | $s_2/s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Al | 1,55 | 0,425 | 3,95 | 2,11 | 2,55 |
| Bo | 0,963 | 0,292 | 2,51 | 1,14 | 2,61 |
| Cd | 1,44 | 0,638 | 4,16 | 0,50 (?) | 2,89 |
| Fe | 0,795 | 0,182 | 1,955 | 1,29 | 2,46 |
| Au | 1,345 | 0,445 | 3,58 | 1,37 | 2,66 |
| Cu | 0,940 | 0,126 | 2,132 | 2,06 | 2,27 |
| Mg | 2,39 | 0,589 | 5,96 | 3,64 | 2,49 |
| Me | 1,11 | 0,274 | 2,76 | 1,67 | 2,50 |
| Ni | 0,501 | 0,151 | 1,30 | 0,60 | 2,60 |
| Ag | 1,31 | 0,414 | 3,44 | 1,44 | 2,63 |
| St | 0,490 | 0,132 | 1,26 | 0,70 | 2,54 |
| Bi | 3,20 | 0,92 | 8,25 | 4,08 | 2,58 |
| Zn | 0,989 | 0,326 | 2,63 | 1,01 | 2,66 |
| Sn | 1,89 | 1,07 | 5,91 | −0,75 (?) | 3,13 (?) |

Das Verhältniss $s_2/s$, das bei ideal isotropen Körpern bekanntlich $= 2,50$ sein müsste, weicht meist merklich davon ab, wie das nach der sichtbar krystallinischen Structur der meisten Metalle nicht anders zu erwarten war. $s_2/s = 3$ gibt die obere Grenze für diese Grösse und den Beginn instabilen elastischen Gleichgewichtes. Warum diese Grenze bei Zinn scheinbar überschritten ist, habe ich oben erörtert; höchst wahrscheinlich hat derselbe Grund mitgewirkt, dass für Cadmium $s_2/s$ so gross, $s_3$ so klein erscheint.

Betrachtet man als unwahrscheinlich[1]), dass ein einseitig gedehntes Prisma eine positive Querdilatation erleidet, so erhält man wegen $-s_1 = \frac{1}{2}s_2 - s$ für $s_2/s$ die untere Grenze 2; es ist daher begreiflich, dass die gefundenen Werthe für dieses Verhältniss sich nicht zu weit von 2,5 entfernen.

Elastische Widerstände.

| | $E.10^{-6}$ | $-C.10^{-6}$ | $T.10^{-6}$ | $K.10^{-6}$ |
|---|---|---|---|---|
| Al | 6,57 | 24,0 | 2,58 | 4,83 |
| Bo | 10,6 | 34,9 | 4,06 | 8,94 |
| Cd | 7,07 | 16,0 | 2.45 | 20,4 (?) |
| Fe | 12,8 | 56,0 | 5,21 | 7,90 |
| Au | 7,58 | 22,9 | 2,85 | 7,47 |
| Cu | 10,85 | 80,9 | 4,78 | 4,95 |
| Mg | 4,26 | 17,3 | 1,71 | 2,80 |
| Me | 9,22 | 37,2 | 3,70 | 6,10 |

1) Vgl. hierzu übrigens die für Pyrit und chlorsaures Natron gefundenen Zahlen (Wied. Ann. **35.** p. 650. 1888; Gött. Nachr. **6.** p. 223. 1893.)

| | $E.10^{-6}$ | $-C.10^{-6}$ | $T.10^{-6}$ | $K.10^{-6}$ |
|---|---|---|---|---|
| Ni | 20,3 | 67,5 | 7,82 | 17,0 |
| Ag | 7,79 | 24,6 | 2,96 | 7,08 |
| St | 20,4 | 77,2 | 8,07 | 14,6 |
| Bi | 3,19 | 11,1 | 1,24 | 2,50 |
| Zn | 10,3 | 31,3 | 3,88 | 10,1 |
| Sn | 5,41 | 9,53 | 1,73 | — |

Die *Elasticitätsconstanten* haben mehr theoretisches, als praktisches Interesse; ihre Definition und Berechnung aus den Beobachtungen ist in den Formeln (1), (2) und (5) angegeben. Die erhaltenen Zahlen in absoluten Einheiten geben die folgende Tabelle.

Elasticitätsconstanten.

| | $c.10^{-12}$ | $c_1.10^{-12}$ | $c_2.10^{-12}$ | $c/c_1$ |
|---|---|---|---|---|
| Al | 0,811 | 0,307 | 0,252 | 2,66 |
| Bo | 1,41 | 0,61 | 0,40 | 2,30 |
| Cd | 2,33 | 1,85 | 0,24 | 1,26 |
| Fe | 1,46 | 0,43 | 0,51 | 3,36 |
| Au | 1,11 | 0,546 | 0,280 | 2,02 |
| Cu | 1,11 | 0,173 | 0,468 | 6,43 |
| Mg | 0,498 | 0,163 | 0,167 | 3,06 |
| Me | 1,08 | 0,355 | 0,36 | 3,04 |
| Ni | 2,69 | 1,16 | 0,76 | 2,33 |
| Ag | 1,08 | 0,499 | 0,29 | 2,16 |
| St | 2,47 | 0,89 | 0,79 | 2,78 |
| Bi | 0,41 | 0,17 | 0,12 | 2,46 |
| Zn | 1,49 | 0,73 | 0,38 | 2,04 |

Die Zahlen für Zinn sind aus den oben erörterten Gründen ausgelassen.

Das Verhältniss $c/c_1$ soll nach der Theorie bei absolut isotropen Körpern $= 3$ sein. Hat das Modulnverhältniss $s_2/s$ seinen *oberen* Grenzwerth 3, so ist $c/c_1 = 1$, hat $s_2/s$ seinen *unteren* Grenzwerth 2, so ist $c/c_1 = +\infty$; die Grenzen für $c/c_1$ sind also viel weiter, als die für $s_2/s$, und dementsprechend drückt sich die Abweichung des Zustandes eines Materiales vom ideal-isotropen viel stärker in dem Zahlwerth von $c/c_1$, als in dem von $s_2/s$ aus. —

Ob es gelingt, numerische Beziehungen zwischen den elastischen und anderen physikalischen Constanten derselben Substanz aufzufinden, muss die Zeit lehren; jedenfalls musste die systematische Bestimmung der ersteren für eine grössere Anzahl von Substanzen vorausgehen, ehe man an die Untersuchung dieser wichtigen Frage gehen kann.

Göttingen, im Januar 1893.

## IX. *Ueber das Gesetz von Dulong und Petit; von F. Richarz.*

(Vorgetr. in d. Physik. Gesellsch. zu Berlin, Sitzung vom 24. Febr. 1893).

---

Hr. Boltzmann hat eine theoretische Begründung des Gesetzes von Dulong und Petit gegeben[1]), welche in längeren Rechnungen ausgeht von dem durch Hrn. Boltzmann früher abgeleiteten Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines Zustandsintervalles eines vielatomigen Gasmolecüls, dann die Zustandsvertheilung für die Atombewegung in einem festen Körper betrachtet, der mit einem Gase in Berührung steht, oder endlich sich selbst überlassen ist. Die Voraussetzungen dieser kinetischen Theorie gehen also auch in den Beweis des Gesetzes von Dulong und Petit ein.

Mit Hülfe des Clausius'schen Satzes vom Virial[2]) lässt sich eine Begründung jenes Gesetzes geben, welche über die Art der Atombewegung nur ganz allgemeine Annahmen macht.

### I.

Das Gesetz von Dulong und Petit, angenommen dass es streng gültig sei, würde aussagen, dass jedem Atom der festen Elemente bei gleicher Temperaturerhöhung dieselbe Wärmemenge zuzuführen ist. Es muss nun eine kinetische Definition der Temperatur angenommen werden. Eine solche kann für den festen Zustand nicht ebenso sicher, wie für den gasförmigen, gegeben werden. In letzterem ist die mittlere lebendige Kraft eines Atoms der Temperatur proportional und hat für alle Atome verschiedener Substanzen bei gleicher Temperatur denselben Wert. Die Annahme, dass dies in allen Aggregatzuständen der Fall ist hat durch die Unter-

---

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. Wien. Akad. **63.** 2. Abt. p. 731. 1871.

2) Ueber die Geschichte des Virialsatzes siehe Richarz, Wied. Ann. **48.** p. 468. 1893.

suchungen von Hrn. Boltzmann[1]), Clausius[2]) und Hrn. von Helmholtz[3]) über die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie eine grosse Wahrscheinlichkeit gewonnen.

Die moleculare Wirkung einer Wärmezufuhr ist allgemein eine doppelte: Vermehrung der mittleren lebendigen Kraft der Wärmebewegung und Vermehrung der mittleren potentiellen Energie der Atomkräfte. Die äussere Arbeit soll gleich Null sein. Die potentielle Energie eines Atoms soll so gerechnet werden, dass sie, wie die lebendige Kraft, bei dem absoluten Nullpunkt der Temperatur verschwindet. Dann verlangt das Gesetz von Dulong und Petit, dass die Summe: mittlere lebendige Kraft eines Atoms plus mittlerer potentieller Energie desselben der absoluten Temperatur proportional sei, und für alle Atome verschiedener Art bei gleicher Temperatur denselben Wert habe. Nach der kinetischen Definition der Temperatur ist dies aber für die lebendige Kraft allein identisch erfüllt; also muss es, wenn das Dulong-Petit'sche Gesetz gelten soll, auch für die potentielle Energie allein erfüllt sein; oder, was dasselbe sagt, die mittlere potentielle Energie eines Atoms muss für alle Atome jeder Art dasselbe Multiplum der mittleren lebendigen Kraft sein.

Man denke sich nun zunächst den zu betrachtenden festen Körper in eine unausdehnbare Hülle eingeschlossen. Die zuzuführende Wärmemenge wird dann durch die specifische Wärme bei constantem Volumen ausgedrückt. Die Wärmebewegung bei festen Körpern stellt man sich so vor, dass jedes Atom um eine bestimmte mittlere Lage umherschwankt. In Folge der Einschliessung in eine unausdehnbare Hülle bleibt diese mittlere Lage für jedes Atom bei steigender Temperatur unverändert. Aber in Folge der erhöhten lebendigen Kraft verändert sich die mittlere Entfernung jedes Atoms von seiner mittleren Lage, und dadurch verändert sich

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. Wien. Akad. **53.** Abth. 2. p. 195. 1866. **63.** Abth. 2. p. 712. 1871. **90.** Abth. 2. p. 231. 1884.

2) Clausius, Sitzungsber. der Niederrhein. Gesellsch. **27.** 1870; Pogg. Ann. **142.** p. 433. 1871.

3) H. von Helmholtz, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1884. p. 159 und p. 311. Crelles Journ. **97.** p. 111 und p. 317. 1884.

auch seine mittlere potentielle Energie. Beim absoluten Nullpunkt der Temperatur würde jedes Atom in seiner mittleren Lage, der Lage stabilen Gleichgewichts, ruhen; nach der getroffenen Festsetzung soll für diese also die potentielle Energie des Atoms gleich Null gesetzt werden.

Die Atome sollen als materielle Punkte betrachtet werden.[1]) Die Gleichgewichtslage eines bestimmten Atoms sei der Anfangspunkt des Coordinatensystems, $x y z$ seien die Coordinaten des Atoms.[2]) Die potentielle Energie für die gesammte Kraft, welche die benachbarten Atome auf das betrachtete ausüben sei $\varphi$. Der Wert von $\varphi$ für $x = o$, $y = o$, $z = o$ soll dann also Null sein. Für variable $x y z$ werde $\varphi$ in eine Potenzreihe entwickelt, so dass man setzen kann:

$$\varphi = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots\ldots$$

wo $F_1$ eine homogene Function ersten Grades von $x y z$ ist; $F_2$ eine eben solche zweiten Grades u. s. w.

Die Componenten der gesammten auf das Atom wirkenden Kraft sind:

$$X = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_3}{\partial x} - \ldots\ldots$$

$$Y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial y} - \ldots\ldots$$

$$Z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial z} - \ldots\ldots$$

Da $F_1$, $F_2$, $F_3$, .... homogene Functionen ersten, zweiten, dritten ... Grades von $x y z$ sind, sind ihre ersten Differentialquotienten nullten, ersten, zweiten ... Grades nach $x y z$. Nun sollte $x = o$, $y = o$, $z = 0$ die stabile Gleichgewichtlage des Atoms sein, für dieselbe ist also $X = Y = Z = 0$; mithin

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 0, \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial F_1}{\partial z} = 0,$$

---

1) Ich bemerke ausdrücklich, dass ich mir wohl bewusst bin, wie weit sich diese Annahme in vielen Verhältnissen von der Wirklichkeit entfernt.

2) Streng genommen verändert sich die Gleichgewichtslage eines Atoms fortwährend infolge der Bewegung der benachbarten Atome. Die mittlere Gleichgewichtslage aber bleibt unverändert.

oder $F_1$ (als homogen ersten Grades) = 0. Es wird also schliesslich

$$\varphi = F_2 + F_3 + F_4 + \cdots$$

Das Virial für das betrachtete Atom wird:

$$-\tfrac{1}{2}(Xx + Yy + Zz) = \frac{x}{2}\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial F_2}{\partial z}$$
$$+ \frac{x}{2}\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{y}{2}\frac{\partial F_3}{\partial y} + \frac{z}{2}\frac{\partial F_3}{\partial z}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Da die $F$ homogene Functionen sind, wird nach dem Euler'schen Satz:

$$-\tfrac{1}{2}(Xx + Yy + Zz) = F_2 + \tfrac{3}{2}F_3 + 2F_4 + \tfrac{5}{2}F_5 + \cdots$$

Die Wärmebewegung des Atoms ist eine „stationäre" im Sinne von Clausius. Also ist nach dem Satze vom Virial essen Mittelwerth über eine lange Zeit genommen gleich dem der lebendigen Kraft $L$, und es ist also bei der üblichen Bezeichnung derMittelwerthe:

$$\overline{\varphi} = \overline{F_2} + \overline{F_3} + \overline{F_4} + \cdots$$
$$\overline{L} = \overline{F_2} + \tfrac{3}{2}\overline{F_3} + 2\overline{F_4} + \cdots$$

Das Dulong-Petit'sche Gesetzt gilt, wie oben auseinandergesetzt, dann und nur dann, wenn $\overline{\varphi}$ für Atome jeder Art dasselbe Multiplum von $\overline{L}$ ist. Das ist der Fall, wenn einer der Mittelwerthe $\overline{F_2}$, $\overline{F_3}\ldots$ weit grösser ist als alle anderen.

Die Kraft, welche die benachbarten Atome auf das betrachtete ausüben, hängt ab von der relativen Lage derselben. Wenn daher die Verrückungen $xyz$ des Atoms aus seiner Gleichgewichtslage klein sind gegen die Abstände von den benachbarten Atomen, so kann man in der Reihenentwickelung für die potentielle Energie die höheren Potenzen von $xyz$ vernachlässigen. Man kann sich dann in den Ausdrücken für $\varphi$ und $L$ auf die Glieder des niedrigsten vorkommenden Grades, des zweiten, beschränken, und erhält

$$\overline{\varphi} = \overline{F_2};\; \overline{L} = \overline{F_2}.$$

Dann würde also in der That das Gesetz von Dulong und Petit in aller Strenge erfüllt sein.

II.

Dies ist aber in Wirklichkeit für die specifische Wärme bei constantem Druck, wie sie bei festen Körpern zur unmittelbaren Messung gelangt, keineswegs der Fall.

Die Annahme der entwickelten Theorie, dass der Körper in eine unausdehnbare Hülle eingeschlossen sei, bedingt, dass die gezogenen Schlüsse nur für die specifische Wärme bei constantem Volumen gelten. Man könnte daher zunächst daran denken, dass der Unterschied der beiden specifischen Wärmen die Ursache der Abweichungen vom Dulong-Petit-schen Gesetz sei. Aus der specifischen Wärme bei constantem Druck lässt sich die bei constantem Volumen berechnen, und zwar in doppelter Weise. Erstens nach einer Formel von Clausius[1]), welche die Kenntniss der thermischen Ausdehnung und der Compressibilität voraussetzt; zweitens nach Beobachtungen von Edlund[2]) aus der adiabatischen Temperaturveränderung bei plötzlicher Ausdehnung. Für das Verhältniss der specifischen Wärmen, $K = C_p / C_v$, ergeben sich so folgende Werthe

| | | | |
|---|---|---|---|
| Silber | 1,016 | — | 1,023 |
| Eisen | 1,008 | — | 1,012 |
| Kupfer | 1,012 | — | 1,018 |
| Platin | 1,006 | — | 1,009 |
| Gold | 1,016 | | |

Für folgende Metalle liegen ebenfalls noch die experimentellen Daten zur Berechnung vor.

Für *Aluminium* sind Torsionscoefficient und Elasticitätscoëfficient durch Katzenelsohn[3]) bestimmt; daraus ergiebt sich dann Compressibilität und das Verhältniss der specifischen Wärmen. Es wird:

$$K = 1{,}020$$

1) Clausius, mechan. Wärmetheorie, Bd. I. p. 189. Rühlmann, Bd. I. p. 495.

2) Edlund, Pogg. Ann. **126.** p. 539. 1865. Rühlmann, Bd. I. p. 512, 523.

3) Katzenelsohn; Winkelmann, Handbuch d. Physik, Bd. I. p. 241. 242. 248.

Für *Blei* ist der Elasticitätscoefficient durch Wertheim, das Verhältniss von Längsdehnung und Quercontraction durch Mallock bestimmt.[1]) Es ergiebt sich:

$$K = 1{,}039$$

Für *Zink* wird nach den Daten derselben Beobachter

$$K = 1{,}040$$

Für die Berechnung mit den specifischen Wärmen bei constantem Druck zeigen schon die aufgezählten Metalle ganz erhebliche Abweichungen vom Dulong-Petit'schen Gesetz, obwohl sie keine der am weitesten abweichenden Elemente (Kohlenstoff, Bor, Beryllium) enthalten; Aluminium gibt für das Product von specifischer Wärme und Atomgewicht einen Wert, der um 10 proc. kleiner ist als das Mittel der übrigen. Führt man die Berechnung mit den Werten für die specifische Wärme bei constantem Volumen durch, welche sich aus den obigen $K$ ergeben, so werden die Abweichungen nicht geringer. Das Gesetz von Dulong und Petit gilt also auch nicht für die specifischen Wärmen bei constantem Volumen genau.

III.

Die Abweichungen müssen darin begründet sein, dass die eine oder andere Annahme der Theorie nicht erfüllt ist. Dies ist die Annahme, dass die Verrückungen des Atoms aus der Gleichgewichtslage klein seien gegen die Abstände von den benachbarten Atomen.

Wenn diese Annahme nicht erfüllt ist, können die höheren Glieder in den Ausdrücken für $\overline{\varphi}$ und $L$ nicht mehr vernachlässigt werden, und es ist nicht mehr, wie das Gesetz von Dulong und Petit verlangen würde, $\varphi$ proportional $\overline{L}$. Da nun $\overline{L}$ proportional der absoluten Temperatur $T$ ist, ist dann auch nicht mehr die mittlere gesammte Energie $(\overline{\varphi} + \overline{L})$ eines Atoms proportional der absoluten Temperatur $T$, sondern es wird $\overline{\varphi} + \overline{L} = T\psi(T)$ sein, wo $\psi(T)$ eine Temperaturfunction. Daraus folgt zunächst, dass bei den Elementen, welche dem Gesetze von Dulong und Petit nicht folgen, die specifische

1) Mallock, Winkelmann 1. p. 247.

Wärme $(\bar{\varphi} + L) / T$ von der Temperatur abhängig sein muss: die bekannte von Hrn. H. F. Weber entdeckte Beziehung.

Ueberlegt man ferner, unter welchen Umständen die Voraussetzung am wenigsten erfüllt ist, dass die Verrückungen eines Atoms klein seien gegen die Abstände von den benachbarten Atomen, so gelangt man zu einer Vermuthung, bei welchen Elementen die grössten Abweichungen von dem Dulong-Petit'schen Gesetze zu erwarten sind.

Jene Annahme wird ceteris paribus um so weniger erfüllt sein, je kleiner die Abstände zwischen den Atomen sind. Ein Maass für diese Abstände bildet der Quotient Atomgewicht dividirt durch Dichtigkeit oder das sog. Atomvolumen. Die drei festen Elemente, welchen die kleinsten Atomvolumina zukommen[1]), sind Kohlenstoff, Bor, Beryllium; sie zeigen zugleich bei gewöhnlicher Temperatur die grössten Abweichungen von dem Dulong-Petit'schen Gesetz.

Zweitens werden unter sonst gleichen Umständen bei derselben Temperatur, also bei gegebener lebendiger Kraft die Atome um so grössere Geschwindigkeiten annehmen, je kleiner ihre Masse ist. Um so weiter werden sie sich also auch ceteris paribus von ihrer Gleichgewichtslage entfernen, und um so weniger wird die Voraussetzung der Gültigkeit des Dulong-Petit'schen Gesetzes erfüllt sein.

Fasst man beide Ursachen zusammen, so ergibt sich, dass bei dem Zusammentreffen von kleinem Atomvolumen und kleinem Atomgewicht Abweichungen von dem Gesetze von Dulong und Petit zu erwarten sind. Diese Regel ist, wie ich nachträglich gefunden habe, schon bekannt[2]); eine Erklärung für dieselbe war bis jetzt nicht gegeben. Die folgende Tabelle veranschaulicht dieselbe. Sie enthält die festen Elemente nach der Grösse ihres Atomgewichtes geordnet bis zum Kalium und Calcium; bei diesen beiden und bei noch grösseren Atomgewichten finden sich keine erheblichen Abweichungen vom Dulong-Petit'schen Gesetze mehr. Bekanntlich fallen und steigen die Atomvolumina periodisch; für die Elemente

---

1) Vgl. z. B. die Tabelle bei Lothar Meyer, moderne Theorien, 1884, p. 143.

2) Lothar Meyer, moderne Theorien, 1884, p. 167.

mit einem Atomgewicht bis zu 39 befolgen nur diejenigen das Gesetz von Dulong und Petit, welche den ersten Maximis des Atomvolumens entsprechen: Lithium, Natrium und Kalium. Bei den Elementen, deren specifische Wärme von der Temperatur erheblich abhängig ist, sind bei den Atomwärmen die für gewöhnliche Temperatur geltenden Zahlen als untere Grenze, als obere die höchsten beobachten und theilweise sogar darüber hinaus extrapolirte Werthe angegeben. Die Zahlen finden sich bei Lothar Meyer p. 86—91.

| | Atomgewicht | Atomvolumen | Atomwärme |
|---|---|---|---|
| Lithium . . . . . | 7,0 | 11,9 | 6,6 |
| Beryllium . . . . | 9,1 | 5,6 | 3,6—5,3 |
| Bor . . . . . . | 10,9 | 4,0 | 2,5—5,5 |
| Kohlenstoff . . . . | 12,0 | 3,6 | 1,4—5,5 |
| Natrium . . . . . | 23,0 | 23,7 | 6,7 |
| Magnesium . . . . | 23,9 | 13,8 | 5,9—6,0 |
| Aluminium . . . . | 27,0 | 10,6 | 5,5—5,8 |
| Silicium . . . . . | 28,0 | 11,2 | 4,6—5,7 |
| Phosphor . . . . | 31,0 | 13,5 | 5,3—5,9 |
| Schwefel. . . . . | 32,0 | 15,7 | 5,2—5,7 |
| Kalium . . . . . | 39,0 | 45,4 | 6,5 |
| Calcium . . . . . | 39,9 | 25,4 | 6,8 |

Um nichts Zweifelhaftes in diese Zusammenstellung hineinzutragen, sind die Elemente, deren Atomvolumen und Atomwärme im festen Zustande nur aus Verbindungen berechnet worden ist, weggelassen. Nach den von Hrn. Lothar Meyer angegebenen Zahlen fügen aber auch diese sich der Regel.

## IV.

Aus der im Vorstehenden entwickelten Theorie des Gesetzes von Dulong und Petit ergibt sich noch eine weitere Consequenz, deren thatsächliche Grundlage ebenfalls schon bei Hrn. Lothar Meyer zu finden ist[1]), und die ebenso Hr. Boltzmann als Consequenz seiner Theorie findet.

Wenn ein Gas aus isolirten Atomen besteht, wie Quecksilberdampf, so besteht die Energie der ihm zugeführten Wärme lediglich in der lebendigen Kraft. Gehört dasselbe Element im festen Zustande zu denjenigen, welche dem Gesetze von Dulong und Petit gehorchen, so ist dann die

1) Lothar Meyer, moderne Theorien, 1884, p. 109.

Energie nach den auf p. 712 abgeleiteten Werthen gleich der mittleren lebendigen Kraft plus der ebensogrossen mittleren potentiellen Energie. Nun ist die mittlere lebendige Kraft unabhängig vom Aggregatzustande, nur proportional der absoluten Temperatur. Also folgt, dass die Atomwärme und auch die specifische Wärme bei constantem Volumen für dasselbe Element als Gas, wenn seine Molecüle aus einzelnen Atomen bestehen, halb so gross ist als im starren Zustande. Dies ist in der That bei Quecksilber der Fall.[1])

Nach der Tabelle bei Hrn. Lothar Meyer trifft dieselbe Beziehung aber auch für die zweiatomigen Gase Stickstoff, Chlor und Brom sehr nahe zu. Für diese kommt aber zur Vermehrung der lebendigen Kraft bei Temperaturerhöhung noch die Arbeit gegen die Kräfte hinzu, welche die Atompaare zusammenhalten. Wenn daher auch bei *diesen* Gasen die specifische Wärme im festen Zustande nahezu doppelt so gross ist als im gasförmigen, so muss bei denselben die Arbeit, welche im gasförmigen Zustande bei Temperaturerhöhung gegen die Atomkräfte geleistet wird, klein sein gegen die Zunahme der lebendigen Kraft.

Berlin, im Februar 1893.

1) Lothar Meyer, l. c.

## X. *Ueber die optischen Eigenschaften sehr enger Spalten; von H. Ambronn.*

Bei Gelegenheit einer anderen Untersuchung fand ich in dem Silberbelag einer sogenannten Abbe'schen Diffractionsplatte einen sehr feinen Spalt, dessen Breite jedenfalls unter 0,5 $\mu$ betrug ($\mu = 0{,}001$ mm). Bei Anwendung der stärksten Oel-Immersionen konnte man feststellen, dass die Ränder des Spaltes ganz scharf waren, und dass bei Messung der Breite mit starken Ocularen sich Werthe von ca. 0,4 $\mu$ ergaben.

Es war nun von besonderem Interesse, das optische Verhalten eines solchen Spaltes zu prüfen. Es stellte sich dabei heraus, dass er beim Betrachten mit einem Nicol am hellsten erschien, wenn die Polarisationsebene senkrecht zur Spaltrichtung lag; drehte man dann die Platte oder das Nicol'sche Prisma um 90$^{\circ}$, so wurde er fast vollkommen dunkel. Da die nächste Umgebung des Spaltes bei dem vorliegenden Silberspiegel für directes Sonnenlicht noch ziemlich durchscheinend ist, so kann man erkennen, dass bei Parallelstellung der Polarisationsebene und der Spaltrichtung an Stelle des Spaltes eine scharf begrenzte dunkle Linie erscheint, die sich von dem durchscheinenden Silberbelag deutlich abhebt.

Bei weiterem Nachsuchen in einer ähnlichen Platte konnte ich noch einige solcher Spalten auffinden, die sich im wesentlichen ebenso verhielten. Ausserdem waren häufig Spalten vorhanden, deren Breite gegen 1 $\mu$ und darüber betrug. Diese zeigten beim Drehen über dem Nicol keine bemerkbaren Veränderungen.

Ich versuchte nun ähnliche enge Spalten dadurch herzustellen, dass ich gut polirte Nähnadeln auf einem Objectträger dicht nebeneinander legte und fest kittete. Derartige Spalten lassen sich natürlich nur mit schwachen Vergrösserungen betrachten.

Das Zeiss'sche System *C* mit der numerischen Apertur 0,4 besitzt noch einen genügend grossen Focalabstand, um die Beobachtung zu gestatten, vorausgesetzt, dass die Nadeln

ziemlich dünn sind. Schon bei einer Breite von etwa 12 $\mu$ zeigt das durchgehende Licht Verschiedenheiten vom gewöhnlichen Licht, es ist elliptisch polarisirt und giebt zwischen gekreuzten Nicols über einem Gypsplättchen deutliche Additions- und Subtractionsfarben; wobei die Additionsfarbe auftritt, wenn die längere Elasticitätsaxe des Gypsplättchens parallel der Spaltrichtung liegt.

Da man bei diesen Objecten Spalten, die sich auskeilen, bis zu einer eben noch messbaren Breite beobachten kann, so lassen sich leicht die verschiedenen Breiten in ihrem optischen Verhalten mit einander vergleichen.

Bei der eben erwähnten Breite von 12 $\mu$ erscheinen neben dem eigentlichen Spalt noch zwei Lichtstreifen, die eine etwas höhere Additions- bez. niedrigere Subtractionsfarbe über dem Gypsplättchen ergeben. Bei einer Breite von 10 $\mu$ ist das Verhalten noch ziemlich dasselbe, die beiden seitlichen Lichtstreifen sind nur etwas schmäler geworden; ungefähr bei 8 $\mu$ verschwinden sie bei scharfer Einstellung fast ganz. Nunmehr kommt aber noch hinzu, dass bei Beobachtung mit nur einem Nicol eine verschiedene Intensität des durchgehenden Lichtes bei verschiedener Stellung des Spaltes zur Polarisationsebene sich bemerkbar macht. Steht die Polarisationsebene senkrecht zur Spaltrichtung, so erscheint das durchgehende Licht bedeutend heller, als wenn beide parallel stehen. Wird der Spalt noch enger, etwa 6 $\mu$ breit, so erhält das durchgehende Licht bei Parallelstellung eine stahlblaue Färbung; bei einer Breite von 4 $\mu$ wird diese Färbung sehr dunkel und bei noch geringerer Spaltbreite geht bei Parallelstellung überhaupt kein Licht mehr hindurch. Zweifellos geht auch hier die Breite des Spaltes an der Grenze der Sichtbarkeit auf eine kurze Strecke unter 0,5 $\mu$ herunter, aber die Auslöschung bei Parallelstellung von Polarisationsebene und Spaltrichtung erfolgt ganz sicher schon bei einer Breite von über 1 $\mu$, und es scheinen demnach etwas andere Verhältnisse vorzuliegen, wie bei jenen engen Spalten des Silberspiegels. Uebrigens haben schon H. v. Mohl und W. Hofmeister[1]) an Gittern aus Näh-

1) Vgl. W. Hofmeister: Lehre von der Pflanzenzelle, Leipzig 1867. p. 351.

nadeln ähnliche Beobachtungen gemacht und dieselben Resultate erhalten.

Ich habe ferner noch versucht, sehr enge Spalten dadurch herzustellen, dass ich eine Schicht gewöhnlicher Ausziehtusche auf einem Objectträger eintrocknen liess. Es bilden sich dabei zahlreiche enge, scharf berandete Risse, die allerdings grösstentheils eine Breite von über 1 $\mu$ haben. An den keilförmigen Enden verengern sie sich jedoch, oft auch auf längere Strecken, derart, dass an diesen Stellen ihre Breite jedenfalls unter 1 $\mu$ herabgeht. Diese Spalten zeigen nun bei Beobachtung mit starken Objectivsystemen ein ganz ähnliches Verhalten wie die des Silberspiegels. Die gegen 1 $\mu$ breiten Partien lassen keine merkbare Veränderung des durchgehenden Lichtes erkennen, welche Lage auch die Polarisationsebene des Nicols haben mag; zwischen gekreuzten Nicols bleiben sie in allen Azimuthen dunkel. Die engsten Partien hingegen erscheinen am hellsten, wenn die Spaltrichtung senkrecht, und am dunkelsten, wenn sie parallel zur Polarisationsebene steht. Zwischen gekreuzten Nicols zeigen diese Partien über dem Gypsplättchen zwar ebenfalls Additions- und Subtractionsfarben, aber die additionelle Färbung tritt hier auf, wenn die längere Elasticitätsaxe des Gypsplättchens senkrecht zur Spaltrichtung liegt.

Als ich die im Vorstehenden geschilderten Resultate einem mir befreundeten Physiker mittheilte, machte mich dieser darauf aufmerksam, dass schon früher ganz ähnliche Beobachtungen von Fizeau[1]) angestellt worden seien, und dass neuerdings H. E. J. G. du Bois und H. Rubens[2]) diese Erscheinungen näher untersucht hätten. Fizeau hatte ebenfalls Spalten in Silberspiegeln beobachtet und war, wenigstens für Spalten, deren Breite ungefähr 0,5 $\mu$ beträgt, zu denselben Resultaten gelangt.

Die Versuche von du Bois, die dieser später in Gemeinschaft mit Rubens fortsetzte, hatten zum Theil ähnliche Resultate ergeben, wobei allerdings die Versuchsstellung eine

---

1) Fizeau, Pogg. Ann. **116**. p. 488. 1852.

2) du Bois, Wied. Ann. **46**. p. 542ff.; du Bois u. Rubens, Berichte d. Berliner Akademie. p. 1129. 1892.

andere war; ausserdem aber ergab sich noch eine weitere Uebereinstimmung in der Weise, dass du Bois und Rubens für ultrarothe Strahlen von grosser Wellenlänge eine Polarisation parallel zur Spaltrichtung fanden. Ebenso hatte Fizeau für die sichtbaren Strahlen parallele Polarisation beobachten können, wenn die Breite nach seiner Schätzung unter 0,1 $\mu$ herabging. Du Bois und Rubens fassen ihre Resultate dahin zusammen, dass bei grosser Wellenlänge und engen Spalten ein grösserer Bruchtheil der auffallenden Strahlen durchgelassen wird, wenn die Polarisationsebene parallel zur Spaltrichtung steht, dass dagegen bei geringer Wellenlänge und breiteren Spalten die Durchlässigkeit für senkrecht zur Spaltrichtung polarisirte Strahlen stärker wird.

Ich habe versucht, sehr enge Spalten in Silberspiegeln in der von Fizeau angegebenen Weise durch Reiben mit feinem Smirgel herzustellen und konnte dabei gute Erfolge erzielen. Die Dicke der hierzu verwendeten Silberniederschläge war sehr gering, ich unterbrach die Entwicklung gewöhnlich dann, wenn die Schicht für direktes Sonnenlicht bei Beobachtung mit blossem Auge eben noch durchsichtig war. Das Reiben mit Smirgel führt man am besten in folgender Weise aus: Man verreibt eine sehr geringe Menge feinsten Naxossmirgels mit etwas Oel, so dass eine ziemlich gleichmässige Vertheilung der Smirgelkörner stattfindet; dann bedeckt man den Silberspiegel mit einer dünnen Schicht dieser Emulsion und fährt ganz leicht mit der Fingerspitze darüber hin. Nach Abspülung der Platte mit Xylol erkennt man unter dem Mikroskop zahlreiche feine Spalten von sehr verschiedener Breite, und man kann häufig im Gesichtsfeld dicht neben einander liegende Spalten direct mit einander vergleichen. Neben Ritzen, deren Breite über 1 $\mu$ beträgt, finden sich solche, die ca. 0,5 $\mu$ breit sind und auch sehr schmale, deren Breite sicher unter 0,1 $\mu$ geschätzt werden darf. Diese letzteren erscheinen aber nur als eben noch sichtbare Lichtlinien, deren genaue Messung selbst mit den stärksten Vergrösserungen nicht ausführbar ist. An solchen Spalten konnte ich nun das Fizeau'sche Resultat, dass bei Parallelstellung der Polarisationsebene die grössere Lichtmenge durchgelassen wird, im vollen Umfange bestätigen. Wenn ich demnach auch nicht in der Lage bin,

in dieser Richtung etwas Neues zu bieten, so scheint es mir doch von Interesse und der Veröffentlichung werth zu sein, dass die Beobachtungen mit unseren jetzigen ungleich vollkommeneren Mikroskopen dieselben Resultate ergeben, die Fizeau mit einem Oberhäuser'schen Mikroskop aus der Mitte dieses Jahrhunderts erzielte. Es ist eigentlich erstaunlich, dass der genannte Forscher mit seinem Instrument diese Dinge bereits ganz richtig erkannt hat. Er erwähnt sogar eine Beobachtung, die er allerdings nicht weiter verfolgen konnte, die aber gerade mit Rücksicht auf die neueren Resultate von du Bois und Rubens und die analogen Verhältnisse bei den Hertz'schen Gittern ein grosses Interesse gewährt. Er sah nämlich, dass die feinsten Spalten bei verschiedener Stellung der Polarisationsebene „Complementärfarben“[1]), wie er sich ausdrückt, zeigten. Man erkennt leicht, dass viele der sehr engen Spalten bei Anwendung von direktem Sonnenlicht — das überhaupt für derartige Unternehmungen unerlässlich ist —, bei Parallelstellung der Polarisationsebene in intensiv röthlich-gelben Lichte, bei senkrechter Stellung hingegen in bläulichem Lichte von geringerer Intensität leuchten. Dieser Umstand brachte mich auf die Vermuthung, dass hier gerade die Breite erreicht sei, bei der die rothen und gelben Strahlen bereits die parallele Polarisation zeigen, während für die blauen und violetten Strahlen noch die senkrechte Polarisation besteht. Es ist bei unseren Einrichtungen nicht schwer, diese Vermuthung auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Am einfachsten geschieht dies dadurch, dass man in der Objectebene ein reelles Spectrum von grosser Intensität entwirft; hierzu kann sowohl das Engelmann'sche Mikrospectral-Objektiv als auch der Rollet'sche Spectro-Polarisator[2]) verwendet werden. Man ist in der Lage, mit diesen Apparaten ein sehr kleines und intensives Spectrum herzustellen, das fast in seiner ganzen Ausdehnung in das Gesichtsfeld der stärkeren Systeme hineinfällt; überdies kann man auch durch geringe Verschiebungen jede beliebige Farbe gerade in die Mitte des Gesichtsfeldes bringen. Dabei ergibt sich nun die interessante Thatsache,

1) l. c. p. 491 u. 564.

2) Ueber die Einrichtung dieser Apparate vgl. die Kataloge der optischen Werkstätte von C. Zeiss in Jena.

dass viele derartige Spalten bei Parallelstellung der Polarisationsebene Roth, Gelb, Grün, bei Senkrechtstellung Grün, Blau, Violett durchlassen; in der Mitte des Spectrums tritt in diesen Fällen bei Drehung des Nicols keine bemerkbare Aenderung ein. Je nach der Breite kommen natürlich auch andere Färbungen vor, wie dies ebenfalls Fizeau schon beobachtete. Dieses Resultat stimmt mit den von du Bois und Rubens gefundenen sehr gut überein. Ich kann noch hinzufügen, dass man nicht selten auch noch engere Spalten beobachten kann, die bei Parallelstellung und Beleuchtung mit weissem Licht nur schwache blaugraue Farbentöne durchlassen; diese verschwinden bei Senkrechtstellung vollkommen. Eine Prüfung im spectral zerlegten Licht ist hierbei kaum mehr möglich, da auch im directen Sonnenlicht die Intensität der schmalen Spectralbezirke zu gering wird.

Bisher habe ich derartige Beobachtungun nur an Silberniederschlägen ausführen können, es dürfte jedoch auch von Interesse sein, in ähnlicher Weise andere dünne Metallschichten zu untersuchen, zumal da du Bois und Rubens bei ihren Versuchen eine Verschiedenheit in dem Verhalten der einzelnen Metalle nachweisen konnten.

---

## XI. *Zusätze und Berichtigungen zu dem Aufsatze: „Electromagnetische Theorie der Farbenzerstreuung"; von H. v. Helmholtz.*[1])

---

1. Gleichung (14e) p. 397. Auf der linken Seite lasse man den Factor $i$ im Nenner weg.

2. Gleichung (16) bis (16b) p. 398. Hier ist eine Verwechselung der Zeichen $\mathfrak{n}$ und $n$ vorgekommen. In die Zeile der Gleichung (16) setze:

$$(16) \qquad \mathfrak{q} = \frac{q \cdot \mathfrak{C}}{n} \quad \text{statt} \quad \mathfrak{q} = \frac{q \cdot \mathfrak{C}}{\mathfrak{n}}.$$

3. In der auf (16a) folgenden Gleichung setze auf der linken Seite:

$$\mathfrak{n}^2 + \frac{\mathfrak{q}^2}{\mathfrak{n}^2} \quad \text{statt} \quad \mathfrak{n}^2(1 + \mathfrak{q}^2)$$

und statt der Gleichung (16b) setze:

$$\mathfrak{n}^2 = \tfrac{1}{2} \frac{\varrho_0}{\varrho_1} \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{\tfrac{1}{4} \left(\frac{\varrho_0}{\varrho_1}\right)^2 - \mathfrak{q}^2}.$$

4. Mangel jeder Dämpfung, also $k = 0$, wäre am ersten zu erwarten bei Substanzen von grossem Isolationsvermögen. Ich habe deshalb Hrn. Mahlke, wissenschaftlichen Hülfsarbeiter bei der Reichsanstalt, gebeten, die Vergleichung der von mir unten auf p. 401 gegebenen Formel, welche kurz geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{n}^2 = \frac{\alpha^2 - n^2}{\beta^2 - n^2},$$

worin

$$\alpha^2 = N^2 + \frac{1}{m} \quad \text{und} \quad \beta^2 = N^2 - \frac{1}{m}$$

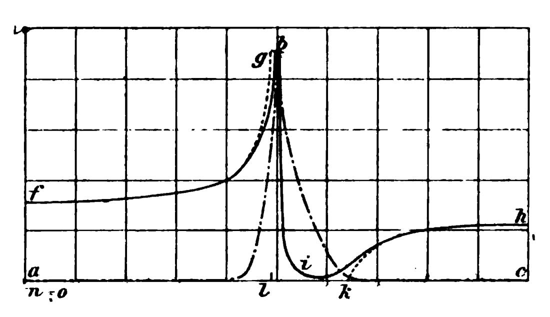
mit den Beobachtungen für Terpentinöl von Fraunhofer und Schwefelkohlenstoff von Verdet zu vergleichen, indem er zur Bestimmung der beiden Constanten die Werthe für die Fraunhofer'schen Linien $B$ und $H$ benutzte und für die Schwingungszahlen $n$ die Zahlen von Ångström.

---

1) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 48. p. 389. 1893.

| Linie | Brechungscoefficient für Terpentinöl | | Brechungscoefficient für Schwefelkohlenstoff | |
|---|---|---|---|---|
| | beobachtet | berechnet | beobachtet | berechnet |
| *B* | 1,4704 | 1,4704 | 1,6114 | 1,6114 |
| *C* | 1,4715 | 1,4715 | 1,6153 | 1,6147 |
| *D* | 1,4745 | 1,4744 | 1,6261 | 1,6240 |
| *E* | 1,4784 | 1,4783 | 1,6403 | 1,6368 |
| *F* | 1,4817 | 1,4813 | 1,6526 | 1,6487 |
| *G* | 1,4883 | 1,4881 | 1,6756 | 1,6728 |
| *H* | 1,4938 | 1,4938 | 1,6956 | 1,6956 |

Die Beobachtungen am Terpentinöl stimmen in der That so gut mit der hier gegebenen Theorie, dass die Abweichungen wohl Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können. Der grösste Fehler bleibt unter 1/3700, und ist kleiner als die Differenzen, die noch bei den besten neuesten Messungen der Wellenlängen zwischen verschiedenen guten Beobachtern vorkommen.




Die Zahlen für Schwefelkohlenstoff zeigen grössere Abweichungen und systematischen Gang derselben, sodass es hier wahrscheinlicher wird, dass die Absorption nicht ganz zu vernachlässigen ist.

5. Um den ziemlich verwickelten Gang der Erscheinung übersichtlich zu machen bei vorhandener Absorption, hat Hr. Mahlke die Curven der Figur construirt. Die ausgezogenen Curven $fb$ und $bih$ stellen durch ihre Ordinaten, von der Geraden $ac$ ab gerechnet, die Werthe des Brechungsverhältnisses n dar für $\alpha = 5$, $\beta = 4$, $k = 0{,}1$, während die Schwingungszahlen $n$ der horizontalen Entfernungen auf $ac$ proportional wachsen. Die aus abwechselnden Linien und Punkten hergestellte Curve $ab$ und $bc$ zeigt den Werth des Absorptionsfactors $q$ für gleiche Weglängen des Strahles. Bei $a$ ist $n = 0$, wächst über $c$ hinaus bis $\infty$, bei $l$ ist $n = \beta$, bei $k$ ist $n = \alpha$. Der Gipfel beider Curven bei $b$ ist abgebrochen, weil sie zu lang geworden wäre; sie behält aber endliche Höhe auch dort.

Endlich sind noch mit punktirten Linien die Theile der Curve für das Brechungsverhältniss angegeben, welche dem Werthe $k = 0$ entsprechen, soweit sie sich trennen von der ausgezogenen Curve für $k = 0{,}1$. Diese Curve zerfällt in zwei getrennte Stücke $fg$ und $kc$, von denen das erstere dem Gange des Brechungsverhältnisses in gut durchsichtigen farblosen Körpern entspricht.

Die Verhältnisse des Platin, Eisen, Nickel, Wismuth würden nach Kundt's Beobachtungen Stücken der Curve des Brechungsverhältnisses zwischen $b$ und $i$ entsprechen können mit $\mathfrak{n} > 1$ und anomaler Dispersion. Silber, Kupfer, Gold dagegen würde in die Tiefe bei $i$ bez. den ansteigenden Theil der Curve zwischen $i$ und $h$ fallen können mit $\mathfrak{n} < 1$ und keiner oder normaler Dispersion.

## XII. *Ueber ein neues Electrometer;*
## *von C. Christiansen.*

---

Um die Potentialdifferenzen verschiedener Metalle nachzuweisen, bedient man sich noch immer der von Volta angegebenen Methode, die von R. Kohlrausch u. a. vervollkommnet wurde. Dieses Verfahren ist jedoch bekanntlich recht umständlich und unsicher. Es haben zwar Lord Kelvin. Hallwachs und Stoletow andere Methoden erdacht, die in mehreren Beziehungen vortheilhaft sind; doch sind sie zu relativen, geschweige zu absoluten Messungen wenig geeignet. Namentlich, wenn man die genannte Potentialdifferenz bei verschiedenen Drucken und Temperaturen oder in verschiedenen Gasen messen will, werden die Bestimmungen nach der älteren Methode, wie z. B. aus Pellats Versuche hervorgeht, sehr schwer durchführbar. Umstände, auf welche ich vielleicht bei einer späteren Gelegenheit zurückkommen werde, haben mich veranlasst, diese Lücke auszufüllen zu versuchen. Ich ging dabei von folgender Ueberlegung aus: Wird eine magnetische Lamelle an einem am Rande befestigten Drahte im erdmagnetischen Kraftfelde aufgehängt, so stellt sie sich senkrecht zur Richtung der Kraftlinien. Nehmen wir analog eine aus Zink und Kupfer zusammengelöthete Platte und hängen sie in einem constanten electrischen Felde auf, so sucht sie sich ebenso senkrecht zur Kraftrichtung einzustellen. Es seien z. B. *A* und *B* (Fig. 1) die Platten eines Kohlrausch'schen Luftcondensators. Durch eine Accumulatorenbatterie geben wir *A* das Potential + 50 Volt und *B* das Potential — 50 Volt. Zwischen *A* und *B* hängen wir die Zn-Cu-Platte an einem feinen Platindrahte auf und befestigen einen kleinen Spiegel an der einen der Platten. Die Doppelplatte dreht sich dann in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung. Die Einstellung wird durch Fernrohr und Scala bestimmt. Nun werden die Verbindungen zur Accumulatorenbatterie gewechselt; *A* wird negativ, *B* positiv und die Doppel-

A + | Zn / Cu | B −

Fig. 1.

platte dreht sich in entgegengesetzter Richtung. Man sieht leicht, dass der Ausschlag mit der Potentialdifferenz der Metalle proportional ist. Nachdem ich durch vorläufige Versuche und durch Berechnung der wirkenden Kräfte mich überzeugt hatte, dass es möglich ist, messbare Ausschläge zu erhalten, habe ich mehrere Apparate hergestellt, theils zur Messung der electrischen Differenz der Metalle, theils um Potentialdifferenzen im allgemeinen zu bestimmen. Es hat sich dabei gezeigt, dass man nach dem hier angegebenen Principe sehr brauchbare Apparate herstellen kann, die wie mir scheint, den bisher bekannten ähnlichen Apparaten an Brauchbarkeit wenigstens nicht nachstehen.

Die Theorie des Electrometers ist in den Hauptzügen die folgende. Es haben die Condensatorplatten $A$ und $B$ die Potentialdifferenz $V_0$ und Abstand $a$; im Raume zwischen $A$ und $B$ wirkt dann die electrische Kraft $F_0$ und es ist $V_0 = F_0 a$. Es seien $C$ und $D$ zwei unendlich nahe electrische Schichten vom Flächeninhalt $S$ mit den Oberflächendichten $+\sigma$ und $-\sigma$. Ist $a'$ der Abstand der Schichten und $V$ ihre Potentialdifferenz, so ist $V = 4\pi\sigma a'$. Das Moment $M$ der Kräfte, die drehend auf $CD$ wirken, ist nun

Fig. 2.

$$M = F_0 \sigma a' S = \frac{S V V_0}{4\pi a}.$$

Diese Berechnungsweise des Momentes $M$ bleibt noch gültig, wenn wir zwei Platten betrachten, deren Potentialdifferenz gleich $V$ ist. Man weiss nämlich nach Maxwell, dass die auf einen Körper wirkenden electrischen Kräfte als von Spannungen im umgebenden Medium herrührend aufgefasst werden können. Diese Spannungen sind nun durch die Potentiale, hier $V_0$ und $V$ allein bestimmt, indem wir die Dielectricitätsconstante $= 1$ setzen.

Unter Einwirkung der im electrischen Felde zwischen $A$ und $B$ wirkenden electrischen Kraft $F_0$ findet eine Vertheilung in der Doppelplatte $CD$ statt; denkt man sich, dass $CD$ ursprünglich senkrecht zu $A$ und $B$ steht und dreht man $CD$ um den Winkel $\varphi$ aus dieser Stellung, so strebt sie mit einem Momente nach der Ruhestellung zurück, des gleich $K V_0^2 \varphi$ gesetzt werden kann. Ausserdem wirkt in demselben Sinne die

Torsionskraft $H$ des Drahtes; die Gleichgewichtsstellung wird dann erlangt sein, wenn

$$M = \frac{S V V_0}{4 \pi a} = H \varphi + K V_0^2 \varphi$$

geworden ist. Wir schreiben statt dessen

$$V V_0 = h(1 + \varepsilon V_0^2) \varphi; \tag{A}$$

$h$ und $\varepsilon$ sind dann Constanten.

Ich gehe jetzt zur Beschreibung eines nach diesem Principe eingerichteten Electrometers über.

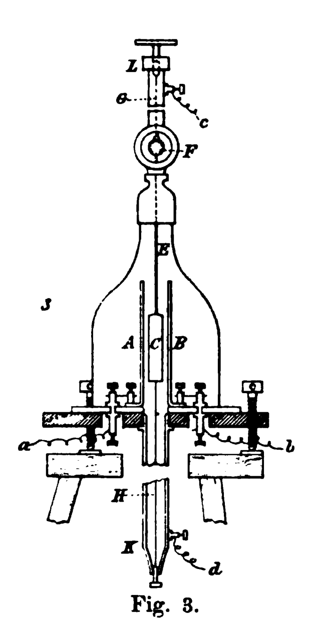


Fig. 3.

$A$ und $B$ (Fig. 3) sind die Luftcondensatorplatten; sie stehen auf einer Glasplatte und sind mit den Kupferdrähten $a$ und $b$ leitend verbunden. Die Doppelplatte $C$ hängt an dem Stahldraht $E$, welcher den Spiegel $F$ trägt, das Ganze wird von einem Platindraht $G$ getragen. Von den Platten des Doppelplattensystems steht die eine mit $E$ in leitender Verbindung, die andere ist mit dem Drahte $H$ verbunden; die Platten sind durch Glimmer von einander isolirt. $H$ ist mit dem unteren Ende der Röhre $K$ leitend verbunden, $G$ ebenso mit dem oberen Ende von $L$. Die Verbindungen mit den Körpern, deren Potentialdifferenz gemessen werden soll, geschieht durch die Leitungsdrähte $c$ und $d$.

Die Platten $A$ und $B$ waren 12 cm breit, 18 cm hoch; oben abgerundet, ihr Abstand $a$ war 2,5 cm. Die Platten $C$ und $D$ waren 1,7 cm breit und 9,5 cm hoch. Beide Platindrähte waren 0,03 mm dick, der eine $G$ war 120, der andere $H$ war 45 cm lang. Es ist somit $S = 1{,}7 \times 9{,}5 = 16$ cm$^2$ und $a = 2{,}5$ cm. Das Drehungsmoment $M$ wird ungefähr $\frac{1}{2} V V_0$ in electrostatischem Maasse. Setzen wir den Potentialunterschied der Condensatorplatten $A$ und $B$ gleich 100 Volt und für die Doppelplatte gleich 1 Volt, dann wird das gesuchte Moment $M$

gleich $50/300^2 = {}^1/_{1800}$. Man überzeugt sich leicht davon, dass dieses Moment im Stande ist eine messbare Drehung der Platindrähte zu bewirken.

In der Formel (A) kommen zwei Constanten $h$ und $s$ vor. Um den Werth von $s$ zu bestimmen, misst man die Schwingungszeit $T$ der Doppelplatte, wenn ihre Pole $c$ und $d$ leitend verbunden sind, und der Luftcondensator zu verschiedenen Potentialdifferenzen geladen ist. Die Zeit $T$ wird dann bestimmt aus der Gleichung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{1 + s V_0^2}},$$

wo $I$ eine Constante ist. Mittels der Accumulatorenbatterie wurde der Luftcondensator zu den Potentialen 0, 24, 48 geladen. Ich fand

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $V_0$ | = 0 | 24 | 48 | Acc. |
| $T$ | = 17,10 | 16,93 | 16,45 | Sec. |
| $1 + s V_0^2$ | = 1 | 1,0202 | 1,0806 | |

Ich werde jetzt einige Messungen anführen, aus denen hervorgeht, dass das beschriebene Electrometer zur Messung von Potentialdifferenzen geeignet ist. Da die Doppelplatte nicht zur Ruhe zu bringen ist, und, da wegen der elastischen Nachwirkung im Platindrahte die Ruhestellung variabel ist, bestimme ich die jedesmalige Ruhestellung durch Beobachtung von drei aufeinanderfolgenden grössten Ausschlägen. Um zu erfahren, wie gross der Ausschlag ist, wenn die Doppelplatte mit den Polen einer Bunsen'schen Batterie von drei Elementen in Verbindung steht und der Luftcondensator mit den Polen der Accumulatorbatterie von 48 Elementen verbunden ist, wird zuerst A positiv, B negativ geladen, dann wird A negativ, B positiv gemacht u. s. w. Als Beispiel führe ich die folgenden Messungen an:

$V = 3$ Bunsen'sche Elemente, $V_0 = \pm 48$ Accumulatoren

| | A pos. | A neg. | A pos. | A neg. | A pos. |
|---|---|---|---|---|---|
| | 376,7 | 326,8 | 424,0 | 336,3 | 423,1 |
| | 445,0 | 373,8 | 399,8 | 365,7 | 401,9 |
| | 445,0 | 373,8 | 399,8 | 365,7 | 401,9 |
| | 377,1 | 327,4 | 423,8 | 336,9 | 422,4 |
| Mittel | 410,95 | 350,45 | 411,85 | 351,15 | 412,30 |

Die drei ersten Beobachtungsreihen geben für den doppelten Ausschlag 60,95; die drei letzten 60,92; Mittel 60,94 cm.

Die in dieser Weise bestimmte Grösse wird im Folgenden als Ausschlag bezeichnet.

Nachdem in dieser Weise der Ausschlag gemessen ist, werden die Verbindungen mit der Doppelplatte *CD* umgekehrt; ist z. B. *C* ursprünglich mit dem positiven Pole der Bunsen'schen Batterie in Verbindung gewesen, so wird nun *D* mit demselben Pole verbunden. Die zwei in dieser Weise gefundenen Ausschläge bezeichne ich mit *P* und *N*. Wenn die Platten des Doppelcondensators keine Contactpotentialdifferenz haben, müssen *P* und *N* numerisch gleich sein. Gewöhnlich zeigt sich ein Unterschied zwischen ihnen. In den zunächst zu besprechenden Versuchen war diese Differenz ziemlich gross, weil die eine Platte aus reinem, die andere aus oxydirtem Magnesium bestand.

In der folgenden Tabelle findet man die Resultate von Messungen über die electromotorische Kraft von ein bis drei Bunsen'schen Elementen, die zuerst einzeln geprüft und gleich stark gefunden waren.

| Anzahl Elemente | | | $V_0 = 48$ Accumulatoren | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $P$ | $N$ | $\frac{1}{2}(P+N)$ | $\frac{1}{2}(P-N)$ | $\frac{1}{2}(P-N)/n$ |
| 0 | − 7,50 | − 7,50 | − 7,50 | — | — |
| 1 | 15,40 | − 30,50 | − 7,55 | 22,95 | 22,95 |
| 2 | 38,45 | − 53,10 | − 7,87 | 45,77 | 22,89 |
| 3 | 60,95 | − 75,90 | − 7,47 | 68,42 | 22,81 |

Aus der letzten Columne geht hervor, dass der numerische Mittelwerth der Ausschläge wenigstens sehr nahe der electromotorischen Kraft proportional ist; auch zeigen sich die von dem Contactpotentiale herrührenden Werthe von $\frac{1}{2}(P+N)$ constant.

Lassen wir $V$ constant, $V_0$ aber veränderlich, so folgt aus

$$\varphi = \frac{V V_0}{h(l + E V_0^2)},$$

dass der Ausschlag langsamer wächst als $V_0$. Ich fand z. B. folgende Ausschläge, wenn ich entweder die Luftcondensatorplatten mit der ganzen Accumulatorenbatterie lud oder nur mit der einen oder der anderen Hälfte derselben.

| | $V = 3$ Bunsen | | |
|---|---|---|---|
| $V_0$ | $P$ | $N$ | $\frac{1}{2}(P-N)$ |
| 48 Acc. | 61,10 | − 76,30 | 67,70 |
| 24 „ | 31,75 | − 40,35 | 36,05 |
| 24 „ | 32,05 | − 40,40 | 36,20 |

Die Ausschläge für 24 und 48 Accumulatoren verhalten sich also wie 36,12 : 67,70 oder wie 1 : 1,87. Die Berechnung gibt für dasselbe Verhältniss den Werth 1 : 1,89.

Verbinden wir die Pole der Accumulatorenbatterie mit der Doppelplatte $CD$ und die zu vergleichende electromotorische Kraft mit dem Luftcondensator, so ist in unserer Formel (A) $V_0$ die zu bestimmende Grösse. Wenn $V_0$ nur klein ist, haben wir einfach

$$V V_0 = h \varphi.$$

Als Beispiel führe ich einige nach dieser Methode ausgeführte Messungen an. Dabei wurde theils ein Latimer-Clark-Element (electromotorische Kraft 1,433 bei 19,8° C.), theils einige Bunsen'sche Elemente einzeln oder verbunden benutzt.

$V$ = 48 Accumulatoren

| $V_0$ | $P$ | $N$ | $\frac{1}{2}(P-N)$ | $\frac{1}{2}(P+N)$ |
|---|---|---|---|---|
| Latimer Clark | 191 | − 145 | 168 | 23 |
| Bunsen $a$ | 238 | − 188 | 213 | 25 |
| „ $b$ | 233 | − 186 | 210 | 26 |
| „ $c$ | 231 | − 190 | 210 | 20 |
| „ $a+b$ | 446 | − 399 | 422 | 23 |
| „ $a+b+c$ | 650 | − 604 | 627 | 23 |
| 0 | 23 | 23 | — | 23 |

Die Ausschläge verhalten sich somit für 1, 2, 3 Bunsen wie 211 : 422 : 627.

Während der Luftcondensator mit 3 Bunsen geladen war, wurde die Doppelplatte entweder mit 48 oder mit 24 Accumulatoren geladen. Dadurch fand ich:

$V_0$ = 3 Bunsen

| $V$. | $P$ | $N$ | $\frac{1}{2}(P-N)$ |
|---|---|---|---|
| 48 Acc. | 76,3 | − 71,6 | 73,95 |
| 24 „ | 38,3 | − 36,0 | 37,15 |
| 24 „ | 38,3 | − 36,0 | 37,15 |
| 48 „ | 76,8 | − 72,3 | 74,55 |

Die Ausschläge für 24 und 48 Accumulatoren verhalten sich dann wie 37,15 : 74,12. Die Proportionalität ist unzweifelhaft.

Das Electrometer kann auch in der Weise zur Messung von Potentialdifferenzen gebraucht werden, dass man $A$ und $C$ mit dem einen Pol, $B$ und $D$ mit dem anderen Pol verbindet. Wir haben dann zur Berechnung des Potentiales, dass $V = V_0$ ist und folglich:

$$V^2 = h(l + \varepsilon V^2)\varphi.$$

In den folgenden Versuchen war jedoch $V$ so klein, dass $V^2 = h\varphi$ wurde. Die folgende Tabelle wird ohne weiteres verständlich sein.

| Accumulatoren | $P$ | $N$ | $\frac{1}{2}(P - N)$ |
|---|---|---|---|
| $6a$ | 6,45 | − 6,10 | 6,27 |
| $6b$ | 6,15 | − 5,90 | 6,02 |
| $6c$ | 6,25 | − 6,00 | 6,12 |
| $6a + 6b$ | 25,00 | − 24,55 | 24,77 |
| $6a + 6b + 6c$ | 55,90 | − 55,20 | 55,55 |

Aus den Versuchen über die Accumulatoren $6a$ und $6b$ erhalten wir als Mittel 6,14; diese Accumulatoren geben zusammen den Ausschlag 24,77; es ist $6{,}14 : 24{,}77 = 1 : 4{,}03$, also sehr nahe gleich 4. Ebenso geben alle drei Gruppen von 6 den Mittelwerth 6,14; die 18 zusammen 55,55; nun ist $6{,}14 : 55{,}55 = 1 : 9{,}05$. Die Ausschläge sind somit wirklich dem Quadrate der Potentialdifferenzen proportional. In dieser Weise kann das Electrometer zur Messung variabeler Potentiale gebraucht werden.

Besonders geeignet scheint es zur Bestimmung von Contactpotentialen zu sein, worauf ich in einer folgenden Abhandlung näher einzugehen gedenke. Hängt man eine aus Zink und Kupfer gebildete Doppelplatte zwischen die Platten eines durch die Accumulatorenbatterie geladenen Luftcondensators, so erhält man, wenn die Pole gewechselt werden, einen Ausschlag, von dessen Grösse man sich durch das Vorhergehende eine Vorstellung bilden kann. Da der Ausschlag der Potentialdifferenz proportional ist, lassen die Contactpotentiale sich in dieser Weise leicht vergleichen. Ich habe z. B. direct nachweisen können, dass die Potentialdifferenz zweier Metalle nicht geändert wird, wenn man ein drittes Metall zwischen dieselben bringt; dagegen wird die Potentialdifferenz eine ganz andere, wenn man einen Leiter zweiter Ordnung zwischen die Metalle setzt. Mit Magnesium, Aluminium und vergoldetem Messing erhielt ich folgende Ausschläge:

$$\mathrm{Mg} \mid \mathrm{Al} \mid \mathrm{Au} = 29{,}80$$
$$\mathrm{Al} \mid \mathrm{Mg} \mid \mathrm{Au} = 19{,}77$$
$$\mathrm{Mg} \mid \mathrm{Au} \mid \mathrm{Al} = 9{,}93.$$

Daraus folgt, dass

$$Mg \mid Au + Au \mid Al + Al \mid Mg = 0{,}1$$

statt 0 ist. In derselben Weise wurde gefunden:

$$Mg \mid Au + Au \mid Zn + Zn \mid Mg = 32{,}95 - 17{,}12 - 15{,}85 = -0{,}02.$$

Nahm ich dagegen Magnesium, Messing (Me) und trockenes Filtrirpapier (P), so fand sich, dass

$$Mg \mid P \mid Me = 2{,}95, \text{ aber } Mg \mid Me = 21{,}90.$$

Kopenhagen, Februar 1893.

## XIII. *Ueber die galvanische Polarisation an kleinen Electroden. Eine Erwiderung von K. R. Koch.*

Auf die von Hrn. Richarz im Bd. 47, p. 567 d. Ann. unter obigem Titel an der von Hrn. A. Wüllner und mir im Bd. 45, p. 475 ff. und 759 ff. unter der gleichen Ueberschrift erschienenen Arbeit geübte Kritik erlauben wir uns Folgendes zu bemerken.

Wir haben von Anfang an, wie wir glauben, es durchaus nicht zweifelhaft gelassen, dass wir unter „Polarisation" nicht nur, wie Hr. Richarz (l. c. p. 567) definirt, die electromotorische Gegenkraft verstehen, sondern den *ganzen* an den Electroden auftretenden Potentialsprung, also die Summe aus der electromotorischen Gegenkraft *und* dem Product aus der Stromstärke ($i$) in einen Widerstand ($u$), der in den der Electrode unmittelbar anliegenden Schichten seinen Sitz hat. Es scheint uns nun einwurfsfrei zu sein, dass die Methode des Hrn. Richarz diese zweite Grösse ($iu$) nicht geben kann und hierauf bezog sich unser Einwand gegen seine Methode. Dass ausserdem in den ersten Augenblicken nach der Oeffnung resp. bedeutenden Schwächung des polarisirenden Stromes ein starker Abfall des Potentiales auch der electromotorischen Gegenkraft *„möglich"* ist, scheint uns durch die jetzigen Bemerkungen von Hrn. Richarz ebensowenig wie durch seine früheren widerlegt zu sein, da dieselben für den anfänglichen Verlauf der Curve des Potentialabfalles der electromotorischen Kraft über den man bisher nichts weiss, nichts Neues beibringen. Vorläufig glauben wir deshalb an der Wahrscheinlichkeit dieses Potentialabfalles festhalten zu müssen, da eben unsere Versuche, die *während* des Stromdurchganges angestellt sind, wesentlich höhere Werthe der electromotorischen Gegenkraft der Polarisation ergeben.

Jene oben erwähnte Grösse ($u$) die einem Widerstand entspricht, haben wir Uebergangswiderstand benannt. Hr. Richarz greift diese Benennung als unrichtig an; er behauptet,

dieser Widerstand (*u*) sei der Ausbreitungswiderstand der Flüssigkeit bei der Verbreitung des Stromes von kleinen Electroden aus. Dass bei einer kleinen Electrode ein Ausbreitungswiderstand auftreten muss, ist selbstverständlich und auch uns nie zweifelhaft gewesen. Eine Reihe von bestimmten Versuchen indessen, die wir beim Beginn unserer Untersuchung angestellt haben, legten uns die Annahme nahe, dass der Ausbreitungswiderstand bei unseren Versuchen keine wesentliche Rolle spiele.

Ausser den in der Abhandlung mitgetheilten Versuchen, welche uns zeigten, dass der Potentialsprung in einer für uns nicht mehr erkennbaren Entfernung von der Electrode stattfand, waren es Versuche mit sogenannten unpolarisirbaren Electroden Zink in Zinkvitriol, Kupfer in Kupfervitriol. Die Drähte waren, soweit sie in die Flüssigkeit tauchten, ganz mit Schellak überzogen, nur die Endflächen (Querschnitte) waren frei. Da concentrirte Kupfervitriollösung denselben Widerstand ungefähr hat, wie 1 Proc. Schwefelsäurelösung, so hätte man, z. B. an der Kupferkathode, vorausgesetzt, dass sie unpolarisirbar ist, bei gleicher Grösse derselben einen Potentialsprung erhalten müssen, der nur um die electromotorische Gegenkraft an der Platinelectrode in Schwefelsäure hätte kleiner sein dürfen, als der Sprung an der Platinkathode in Schwefelsäure, wenn der Widerstand (*u*) nur der Ausbreitungswiderstand gewesen wäre. Wir fanden indess den Potentialsprung erheblich kleiner, trotzdem wir später sogar fanden, dass sich an den aus Kupfer*platten* gebildeten Kathoden, bei denen ein Ausbreitungswiderstand nicht vorhanden ist, eine mit der Stromdichte wachsende Polarisation zeigt.

Wir haben dies nicht in unserer Abhandlung besprochen, weil wir die Versuche an den unpolarisirbaren Electroden in Kupfer- und Zinkvitriollösung noch nicht für abgeschlossen halten.

Bei nochmaliger Erwägung geben wir zu, dass hiermit die Frage noch nicht beantwortet ist, inwieweit bei unserer Grösse (*u*) der Ausbreitungswiderstand betheiligt ist, umsomehr da wir um das Wachsen der Kathode[1]) zu ver-

1) Die Anode eignet sich wegen der (l. c.) beschriebenen Unregelmässigkeiten zu diesen Beobachtungen nicht.

hindern, sehr schwache Ströme benutzen mussten, sodass kleine Beobachtungsfehler das Resultat schon bedeutend trüben konnten.

Wir haben deshalb die Versuche wieder aufgenommen und zwar in Schwefelsäurelösung mit Platinelectroden von solcher Form, dass sich der Ausbreitungswiderstand streng und einwurfsfrei berechnen lässt, was wir von unseren vorher angewandten Electroden nicht zugeben möchten. Nach den bisherigen Vorversuchen scheint allerdings jener Ausbreitungswiderstand beträchtlicher zu sein als wir angenommen haben; andererseits ergeben dieselben aber ebenso unzweifelhaft, dass bei grösseren Stromdichten der Ausbreitungswiderstand bei weitem nicht ausreicht, um die Grösse der auftretenden Polarisation zu erklären.

Im Uebrigen wird jedoch an allen unseren Schlüssen nichts geändert, wenn der von uns so bezeichnete „Uebergangswiderstand“, theilweise als ein Ausbreitungswiderstand angesprochen werden muss. Uns kam es darauf an, zu zeigen, dass die von älteren Beobachtern behauptete höhere Polarisation an Platin*spitzen* in Schwefelsäurelösung ihren Grund in einem in unmittelbarer Nähe der Electrode auftretenden Widerstand habe und kann es uns deshalb in dieser Hinsicht auch gleichgültig sein, ob derselbe ein Ausbreitungswiderstand oder ein Widerstand anderer Art ist.

Wenn Hr. Richarz im vierten Theile seiner Kritik darauf besteht, dass die complicirten Erscheinungen, die wir bei dem von uns sogenannten „Stromumschlag“ beobachtet haben,[1]) nichts weiteres seien als das Leidenfrost'sche Phänomen, so wäre es doch wohl nothwendig gewesen, dass er unseren Einwurf dagegen[2]) betreffend die Constanz des Reststromes vorher entkräftet hatte. Wir sehen aber auch nicht ein, wie durch eine Exemplificirung auf das Leidenfrost'sche Phänomen viel gewonnen wird; es scheint uns vielmehr richtiger, die Zusammengesetztheit einer Erscheinung hervorzuheben, als sich mit einer scheinbar einfachen Erklärung zu begnügen.

Hr. Richarz constatirt ferner (l. c. p. 578) zu unserer Befriedigung, dass er die von uns befolgte Methode zur Bestimmung des Potentialgefälles für „durchaus einwurfsfrei“

1) l. c. p. 769. 811 ff.
2) l. c. p. 779.

hält, dann wird er aber auch wohl unsere Versuche an Platten nicht bemängeln, die mit derselben Sorgfalt angestellt sind; aus diesen folgt, wie uns scheint, ein Werth für die electromotorische Gegenkraft der Polarisation an Platinelectroden in verdünnter Schwefelsäure von 3.769, welcher mit dem an den Spitzen erhaltenen 3.774 sehr gut übereinstimmt. Wir glauben deshalb vorläufig an unserem Resultat, dass das Maximum der electromotorischen Gegenkraft der Polarisation von Platin in Schwefelsäure 3.8 Volt und nicht wie Hr. Richarz behauptet, 2.9 Volt ist, bis auf weiteres festhalten zu sollen, müssen es aber natürlich Hrn. Richarz überlassen, wenn er in unseren Zahlen eine Bestätigung der von ihm früher gezogenen Schlüsse finden willen.

Stuttgart, Phy. Inst. d. k. tech. Hochschule. 25. Febr. 1893.

## XIV. *Bemerkungen zu Hrn. E. Branly's Mittheilungen über die unipolare Leitung erhitzter Gase; von J. Elster und H. Geitel.*

Im Laufe des Jahres 1892 hat Herr Branly der Pariser Akademie zwei Abhandlungen vorgelegt, betitelt:

„Neue unipolare Leitung der Gase“[1]) und „Ueber die Leitfähigkeit eines zwischen einem kalten Metall und einem glühenden Körper befindlichen Gases.“[2])

Herr Branly beschreibt darin eine Reihe von Versuchen, bei welchem eine Metallscheibe oder ein Metallcylinder einer glühenden Platinspirale in Luft gegenüber gestellt ist.

Der Uebergang electrischer Ladungen zwischen diesen Electroden wird unter anderen mittels zweier Electroskope beobachtet, von denen das eine mit der ersteren, das andere mit der letzteren in leitender Verbindung steht. Das Ergebniss lässt sich dahin zusammenfassen, dass ein solcher Electricitätsübergang bei rothglühender Spirale nur dann eintritt, wenn diese die Anode bildet. Bei Steigerung des Glühzustandes wird dieser unipolare Charakter der Leitfähigkeit des heissen Gases undeutlicher.

Abgesehen von einigen Bemerkungen über entgegengesetztes Verhalten gewisser Oberflächen sind dies die wesentlichsten Resultate der beiden Abhandlungen. Sie stimmen überein sowohl mit einigen Beobachtungen des Herrn Guthrie[3]), als auch mit den Ergebnissen systematischer Untersuchungen, die wir in diesen Annalen veröffentlichten.[4])

Anfangs verwandten auch wir glühende Platinflächen in freier Luft, später jedoch schlossen wir die glühenden Körper (Platin- und Kohlenfäden) in Glasrecipienten ein und umgaben sie mit einer Atmosphäre verdünnten Gases. So vermieden wir jede Verbrennung von Staub an der glühenden Fläche.

1) Compt. rend. **114.** p. 831. 1892 u. Beibl. **16.** p. 563. 1892.

2) Compt. rend. **114.** p. 1531. 1892 u. Beibl. **17.** p. 59. 1893.

3) Guthrie, Chem. News **45.** p. 116. Beibl. **6.** p. 686. 1882.

4) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **26.** p. 1. 1885; ferner: **31.** p. 109. 1887; **37.** p. 315. 1889; **38.** p. 27. 1889; schliesslich: Wien. Ber. **97.** p. 1175. 1888 vgl. § 23.

Dabei fanden wir die Ursache für die unipolare Leitfähigkeit erhitzter Luft in der Thatsache, dass diese im Kontakt mit glühenden Oberflächen eine positive Electrisirung erfährt. Die gegenüberstehende kalte Electrode wird daher unausgesetzt von einem Schwarme positiv electrisirter Gastheilchen getroffen und dabei entladen, falls ihr zuvor eine negative Ladung ertheilt worden war. Hiermit stimmt überein, dass in Gasen, die eine entgegengesetzte Elektrisirung durch glühende Körper erfahren wie Wasserstoff, auch der Sinn der unipolaren Leitfähigkeit sich umkehrt.

Eine kleine Sammlung von Recipienten mit eingeschmolzenen Platinbügeln und Sauerstofffüllung, sowie mit eingeschmolzenen Kohlenbügeln und Wasserstofffüllung war bereits im Jahre 1889 in Heidelberg gelegentlich der Naturforscherversammlung zur Ausstellung gebracht. Bei passendem Glühzustande zeigen diese ein einander entgegengesetztes unipolares Leitungsvermögen.

Später hat Herr Fleming[1]) ganz ähnlich eingerichtete Apparate benutzt, um galvanometrisch die unipolare Leitfähigkeit der in Glühlampen vorhandenen Gasreste zu studiren.

Wir glauben daher aussprechen zu dürfen, dass die von Herrn Branly beschriebenen Erscheinungen nicht wohl als neu bezeichnet werden können.

Wolfenbüttel, im Februar 1893.

---

1) J. A. Fleming. Proc. Roy. Soc. London **47**. p. 118. 1890 u. Beibl. **14**. p. 318. 1890.

## XV. *Ueber die electrische Theorie der magnetooptischen Erscheinungen;* *von D. A. Goldhammer.*

In einer vor kurzem erschienenen Notiz[1]) bespricht Hr. Drude meine beiden Abhandlungen[2]) über die Theorie der obengenannten Erscheinungen und findet dabei: Erstens, dass die der Grenze (Ebene $yz$) parallele Componente $Q$ der electromotorischen Kraft beim Durchgang durch die Grenze in meiner Theorie unstetig sei, zweitens, dass meine Gleichung (30) mit den Gleichungen (68) des Hrn. Drude[3]) nicht zusammenfallen und sogar mit meinen eigenen Differentialgleichungen (19) nicht vereinbar seien; drittens, dass die Theorie Drude's, die des Verfassers Meinung nach keinen speciellen Fall meiner Theorie bildet, „auch mit dem falschen $\delta$" die magnetooptischen Erscheinungen genügend genau berechnen liesse.

Hiergegen möchte ich mir folgende Bemerkungen erlauben.

1. Auf p. 79 meiner ersten Abhandlung, ebenso wie auf p. 269, 276, 290 meiner „Studien etc."[4]) habe ich deutlich ausgesprochen, dass an der Grenze zweier Medien U, V, W und ihre ersten Derivirten sich continurlich ändern, nicht aber $U$, $V$, $W$ etc., die mit den ersteren durch die Gleichung (19) (resp. (21) der „Studien") verbunden sind. Die zweite und sechste meiner Gleichungen (30) drücken nun nichts anderes aus, als die Thatsache, dass eben $V$ und $f''$ unstetig sind. Da aber V, $f$, $df/dy$, $df/dz$ stetig sind, so ist es auch unbedingt für $Q$, $R$ der Fall.

Die Gleichungen (30) folgen unmittelbar aus der Continuität von U, V, W etc. Wenn nun diese Ableitung Hrn. Drude „bisher immer noch dunkel geblieben ist", so ist dies offenbar nur durch einen meinerseits bei der Correctur versehenen

1) P. Drude, Wied. Ann. **48.** p. 122. 1893.
2) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. **46.** p. 71; **47.** p. 345. 1892.
3) P. Drude, Wied. Ann. **46.** p. 388. 189?.
4) D. A. Goldhammer, Wied. Ann. **47.** p. 265. 1892.

Druckfehler[1]) verursacht: es sollen nämlich in den Gleichungen (1—12) auf p. 80 nicht $U$, $V$, $W$, sondern U, V, W stehen, was ja auch ganz deutlich aus dem Gesagten § 73 hervorgeht.

2. In welcher Weise meine Grenzbedingungen mit den Differentialgleichungen (19) nicht vereinbar sein können und wie „ich selbst das (Wied. Ann. 47. p. 265. 1892) kürzlich" hätte constatiren können, ist mir vollkommen unverständlich. Ich halte an der Behauptung fest, dass meine Gleichungen (30) mit den Gleichungen (66) Drude's formell identisch sind und will diese Identität gleich bestätigen.

Die Gleichungen (66) Drude's lauten, wenn man darin die Winkel $\varphi_0$, $\varphi_1$, $\varphi_2$ und die Geschwindigkeiten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ einführt:

$$
(A)\quad \begin{cases}
(E_p - R_p)\dfrac{\cos\varphi}{\mathfrak{B}} = D_1\dfrac{\cos\varphi_1}{\mathfrak{W}_1} + D_2\dfrac{\cos\varphi_2}{\mathfrak{W}_2} \\
E_p + R_p = D_1 + D_2 \\
E_s + R_s = -\,i D_2\dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}_1} + i D_2\dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{W}_2} \\
(E_s - R_s)\cos\varphi = -\,i D_1\dfrac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{W}_1^2}\left(\cos\varphi_1 - \dfrac{b_3}{\tau} + \dfrac{b_2}{\tau}\,i\sin\varphi_1\right) \\
\qquad + i D_2\dfrac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{W}_2^2}\left(\cos\varphi_2 + \dfrac{b_3}{\tau} + \dfrac{b_2}{\tau}\,i\sin\varphi_2\right),
\end{cases}
$$

worin

$$
\mu_0\sqrt{\alpha_0} = \sin\varphi_0\,,\qquad \mu_1\sqrt{\alpha_1} = \sin\varphi_1\,,\qquad \mu_2\sqrt{\alpha_2} = \sin\varphi_2\,,
$$
$$
\pi_0\sqrt{\alpha_0} = \cos\varphi_0\,,\qquad \pi_1\sqrt{\alpha_1} = \cos\varphi_1\,,\qquad \pi_2\sqrt{\alpha_2} = \sin\varphi_2\,,
$$
$$
\sqrt{\alpha_0} = \mathfrak{B},\qquad \sqrt{\alpha_1} = \mathfrak{W}_1\,,\qquad \sqrt{\alpha_2} = \mathfrak{W}_2\,,\qquad \sqrt{\alpha} = \mathfrak{B}'
$$
$$
\mu_0 = \mu_1 = \mu_2
$$

gesetzt ist.

Nun ist bei Drude der Lichtvector z. B. in der einfallenden Welle proportional mit

$$
e^{\frac{i}{\tau}\left(t - \frac{x\sin\varphi_0 + z\cos\varphi_0}{\mathfrak{B}}\right)},
$$

bei mir aber mit

$$
e^{-\frac{i}{\tau}\left(t - \frac{x\cos\psi + y\sin\psi}{\mathfrak{B}}\right)},
$$

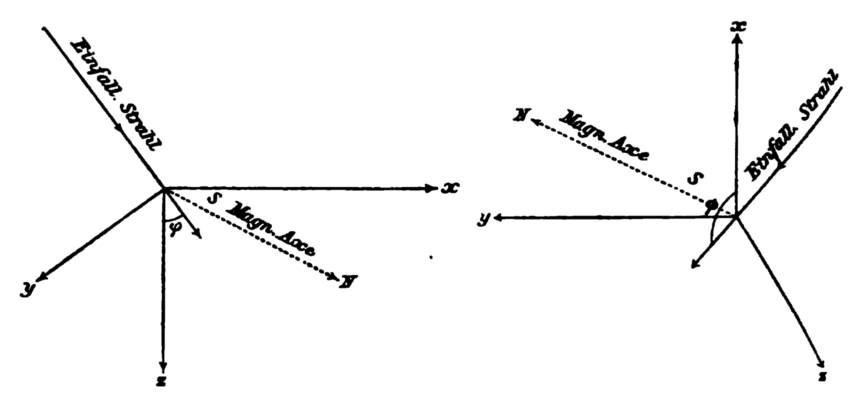
worin

$$
\tau = \frac{T}{2\pi}\,;
$$

---

1) Beim Durchlesen der Abhandlung habe ich noch mehrere Druckfehler gefunden. Vgl. Anhang.

ferner sind die Richtungen der Coordinatenaxe in den beiden Theorien aus der beifolgenden Figur zu ersehen.




Daraus ist zu schliessen, dass wir von den Gleichungen (A) zu den meinigen (30) übergehen, indem wir in (A)

$$
\begin{array}{rcl}
i & \text{durch} & -i \\
\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2 & ,, & \pi+\psi,\ \pi+\psi_1,\ \pi+\psi_2 \\
b_3 & ,, & b_1 \\
b_2 & ,, & b_3 \\
E_p,\ R_p,\ E_s,\ R_s,\ D_1,\ D_2 & ,, & H,\ H_r,\ R,\ R_r,\ H_1,\ H_2
\end{array}
$$

ersetzen; so kommt

$$
(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{aligned}
(H-H_r)\frac{\cos\psi}{L} &= H_1\frac{\cos\psi_1}{L_1} + H_2\frac{\cos\psi_2}{L_2} \\
H+H_r &= H_1 + H_2 \\
R+R_r &= i H_1\frac{L}{L_1} - i H_2\frac{L}{L_2} \\
(R-R_r)\cos\psi &= -\frac{i H_1 \mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{B}_1{}^2}\left(-\cos\psi_1 - \frac{b_1}{\tau} + \frac{b_3}{\tau} i\sin\psi_1\right) \\
&\quad + \frac{i H_2 \mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{B}_2{}^2}\left(-\cos\psi_2 + \frac{b_1}{\tau} + \frac{b_3}{\tau} i\sin\psi_2\right).
\end{aligned} \right.
$$

Erinnern wir uns nun, dass nach den Gleichungen (IV) meiner zweiten und (16) meiner ersten Abhandlung

$$
4\pi b = \mu\left(D + i\frac{2T}{\varkappa}\right), \qquad b = \frac{\mu'}{\mathfrak{B}'^2}
$$

ist, so lautet die letzte der Gleichungen (B)

$$(R - R_r)\cos\psi = i H_1 \frac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{W}_1^2}\cos\psi_1 + \frac{i\mu_1' H_1}{\tau\,\mathfrak{W}_1^2} + \frac{\mu_3' H_1}{\tau\,\mathfrak{W}_1^2}\sin\psi_1$$

$$- i H_2 \frac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{W}_2^2}\cos\psi_2 + \frac{i\mu_1' H_2}{\tau\,\mathfrak{W}_2^2} = \frac{\mu_3' H_2}{\tau\,\mathfrak{W}_2^2}\sin\psi_2\,,$$

oder da bei mir ist

$$\mathfrak{B}'^2 = \mathfrak{W}_1^2 - \mathfrak{q}_1' = \mathfrak{W}_1^2 - \frac{1}{\tau}(\mu_1'\cos\psi_1 + \mu_2'\sin\psi_1)$$

$$\mathfrak{B}'^2 = \mathfrak{W}_2^2 + \mathfrak{q}_2' = \mathfrak{W}_2^2 + \frac{1}{\tau}(\mu_1'\cos\psi_2 + \mu_2'\sin\psi_2),$$

so folgt

$$(R - R_r)\cos\psi = i(H_1\cos\psi_1 - H_2\cos\psi_2)$$

$$- \frac{i H_1}{\tau\,\mathfrak{W}_1^2}\cos\psi_1(\mu_1'\cos\psi_1 + \mu_2'\sin\psi_1) + \frac{i H_1 \mu_1'}{\tau\,\mathfrak{W}_1^2} + \frac{\mu_3' H_1}{\tau\,\mathfrak{W}_1^2}\sin\psi_1$$

$$- \frac{i H_1}{\tau\,\mathfrak{W}_2^2}\cos\psi_2(\mu_1'\cos\psi_2 + \mu_2'\sin\psi_2) + \frac{i H_2 \mu_1'}{\tau\,\mathfrak{W}_2^2} - \frac{\mu_3' H_2}{\tau\,\mathfrak{W}_2^2}\sin\psi_2.$$

Somit lassen sich die Gleichungen (B) in der Form

$$(\mathrm{C})\quad\left\{\begin{aligned}
R + R_r &= i\left(H_1\frac{L}{L_1} - H_2\frac{L}{L_2}\right)\\
(R - R_r)\cos\psi &= i(H_1\cos\psi_1 - H_2\cos\psi_2) - 2\pi i T\frac{\sin\psi}{L}\\
&\Big\{-\mu_1'\left(H_1\frac{\sin\psi_1}{L_1} + H_2\frac{\sin\psi_2}{L_2}\right) + \mu_2'\left(H_1\frac{\cos\psi_1}{L_1} + H_2\frac{\cos\psi_2}{L_2}\right)\\
&\quad + \mu_3'\left(i\frac{H_1}{L_1} - i\frac{H_2}{L_2}\right)\Big\}\\
H + H_r &= H_1 + H_2\\
(H - H_r)\frac{\cos\psi}{L} &= H_1\frac{\cos\psi_1}{L_1} + H_2\frac{\cos\psi_2}{L_2}
\end{aligned}\right.$$

darstellen, und diese sind gerade meine Gleichungen (30), wenn man darin $D_r + D_1 + D_2$ und $D_r - D_1 - D_2$ eliminirt und $F$, $G$, $F_r$, $G_r$, $F_1$, $G_1$, $F_2$, $G_2$ durch $R$, $R_r$, $H_1$, $H_2$ ersetzt.

3. Was nun die Uebereinstimmung der Drude'schen Theorie mit der Erfahrung anbetrifft, so gebe ich gern zu, dass ein Unterschied von 10° in $\delta$ nur unmerklich die berechneten Drehungen beeinflusse, meine aber, dass eine richtige Thorie nicht nur die Drehungen, sondern auch die Amplituden und Phasen der magnetischen Lichtcomponente genügend genau anzugeben im Stande sein soll. Die in der letzten Zeit veröffentlichten Beobachtungsergebnisse von Hrn. Zeeman[1]), die

1) P. Zeeman, Verslag en Meded. Kon. Ak. Amsterdam, Afdeeling Natuurkund. 25. Juni 1892 und 29. October 1892.

mir durch die Liebenswürdigkeit des Verfassers und des Hrn. Prof. Kamerlingh 'Omres in Leiden schon seit einem Jahre mitgetheilt worden sind, stehen allerdings mit der Theorie von Drude, besonders für Kobalt und Nickel, im vollkommenen Widerspruche.[1])

Ich weiss nicht anzugeben, ob man die von Zeeman *in allen Fällen* gefundene Abweichung des Werthes $2 0 - \delta$ von $\pi$ durch die Wirkung der Oberflächenschichten u. dgl. erklären kann, glaube aber, dass die Theorie von Drude doch einen speciellen Fall der meinigen (natürlich nur in formeller Hinsicht) bildet, mag die Beziehung

$$2 0 - \delta = \pi$$

richtig sein oder nicht.

Endlich erlaube ich mir noch hinzuzufügen, dass Drude's Berechnungen der Beobachtungen im durchgehenden Lichte mir unrichtig zu sein und mit den Untersuchungen von Kundt, du Bois und Lobach nicht im Einklange zu stehen scheinen. Dieser Frage aber hoffe ich bald eine besondere Mittheilung zu widmen.

---

*Anhang*. Pp. 83, 84 und 86 meiner Abhandlung, „Das Kerr'sche magnetooptische Phänomen“ etc. soll $d$ durch $2 \pi d$ ersetzt werden; Gleichungen (43), (70), (71) rechte Seite sind die Zeichen zu wechseln; ebenso die Zeichen von $\mu$, $\mu_1$ und $\nu$ auf pp. 85, 86 und 92. Auf pp. 93 und 94 ersetzte man $+ \nu$ resp. $- \nu$ durch $- \frac{1}{2} \nu$ resp. $+ \frac{1}{2} \nu$; Gleichungen (69), (70), (72) streiche man 2. P. 94, Z. 13 v. o. streiche man „positiv und“ und p. 95, Z. 6 v. o. ersetze man „etwa dreimal kleiner“ durch „etwas grösser“, da $\varrho$ fehlerhaft zu $2{,}58 \,.\, 10^{-11}$ anstatt $8{,}93 \,.\, 10^{-11}$ berechnet ist. In meiner Theorie sind $\mu$ und $\nu$ *negativ*, daher $b$ *positiv*, wie dies auch bei Drude der Fall ist.

Kasan, 15./27. Januar 1893.

1) P. Zeeman, Metingen over het verschijnsel van Kerr etc. Diss. Leiden, 1893. p. 46 und 52.

## XVI. *Ueber das Verhalten des festen colloidalen Silbers gegen den electrischen Strom. Entgegnung;* *von A. Oberbeck.*

In dem zweiten Heft dieser Annalen befindet sich eine Abhandlung der Hrn. Barus und Schneider[1]) über den im Titel genannten Gegenstand, in welcher dieselben mehrfach auf zwei von mir veröffentlichte Arbeiten[2]) Bezug nehmen. Obgleich die beiden Herren am Schluss[3]) bemerken, dass ein Theil ihrer Ausführungen nach Einsicht in meine zweite Arbeit überflüssig geworden ist, so halte ich eine Erwiderung für nothwendig, da die Hauptdifferenz unserer beiderseitigen Auffassungen nicht beseitigt ist.

Die genannten beiden Herren haben in einer früheren Abhandlung[4]) den Satz aufgestellt, dass *„das feste, colloidale Silber isolirt"* und halten auch jetzt noch an diesem Satze fest[5]).

Da ich selbst eine grosse Anzahl von Silberpräparaten untersucht habe, welche sicher kein normales Silber waren, die Electricität aber leiteten, zum Theil sogar recht grosse Leitungsfähigkeit besassen, so musste ich die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes bestreiten. Von dieser Ansicht bin ich auch durch die neueste Publication der Hrn. Barus und Schneider nicht zurückgekommen.

Zunächst habe ich vergeblich nach einer anderweitigen Erklärung von Seiten der beiden Herren für die zahlreichen von mir beschriebenen Fälle von Leitungsfähigkeit colloidalen Silbers gesucht. Die Andeutungen[6]), es könne sich um electrolytische Leitung oder um eine bereits eingetretene Bildung von normalem Silber handeln, welche die beiden Herren ge-

1) Barus u. Schneider, Wied. Ann. **48.** p. 327. 1893.
2) Barus u. Schneider, Wied. Ann. **46.** p. 265 u. **47.** p. 353.
3) l. c. p. 336.
4) Barus u. Schneider, Zeitschr. f. phys. Chemie. **8.** p. 285. 1891.
5) Barus u. Schneider, Wied. Ann. **48.** p. 332.
6) l. c. p. 331 u. p. 332.

legentlich für ihre eigenen Versuche machen, muss ich für die meinigen als ganz unzutreffend bezeichnen.

Merkwürdiger Weise haben nämlich die Hrn. Barus und Schneider bei ihren neuesten Versuchen ebenfalls eine wenn auch nur geringe Leitungsfähigkeit entdeckt. Sie suchen dieselbe zunächst auf die oben angegebene Weise zu erklären. Schliesslich [1]) sprechen sie die Meinung aus, dass die von ihnen erhaltenen Silberpräparate vielleicht gar nicht oder doch nur sehr wenig cohärent gewesen sind. Ist diese Ansicht richtig, so haben ihre Versuche keine Beweiskraft für den oben angeführten Satz. Dann ist es ja ganz selbstverständlich, dass die Silberschichten isolirten oder ausserordentlich schlecht leiteten.

Die von mir benutzten Präparate wurden auf wesentlich andere Weise hergestellt, wie diejenigen der beiden Herren [2]). Ihrem Aussehen nach waren sie vollkommen cohärent. Sie besassen meist lebhaften Metallglanz. Auf Glas getrocknet gaben sie ebenso gute Spiegel wie die gewöhnlichen Silberspiegel, nur war das Spiegelbild, je nach der Methode der Herstellung, etwas gelbroth, grün oder blau gefärbt. Eine Berührung mit einem reinen, weichen Körper schadete den Präparaten in keiner Weise. Bei einigen besonderen Versuchen trocknete das Silber in Form eines lockeren Pulvers ein. Diese habe ich nicht weiter verfolgt, da hier die Bestimmung des Leitungswiderstandes unausführbar war.

Die gute Cohärenz erhielt sich auch bei der Einwirkung der verschiedenen Agentien, durch welche der Widerstand ja in den meisten Fällen auf einen sehr kleinen Werth herabgesetzt werden konnte. Im Wesentlichen habe ich es also immer mit homogenen Schichten zu thun gehabt, die jedenfalls ihrer Hauptmasse nach aus Silber bestanden, da ich sonst keine Erklärung für die gute Leitungsfähigkeit zu geben wüsste, die man den Präparaten bei geeigneter Behandlung verschaffen kann.

Die Hrn. Barus und Schneider haben nun die Vorstellung, dass bei allen diesen Silberarten „ein normales Molecül anzunehmen ist, insofern zwingende Gründe zur Annahme

1) l. c. p. 334.

2) Barus u. Schneider, Wied. Ann. 47. p. 354. 1892.

eines allotropen Molecüls nicht vorliegen"[1]. Dieser Satz ist mir nicht recht verständlich, da die bisherige Erklärung des colloidalen Zustandes gerade in der Annahme einer Gruppenbildung von Molecülen liegt. Soll indess unter dem „normalen Molecül" eben einfach normales Silber verstanden werden, wie sich dasselbe aus geschmolzenem Zustand bei langsamer Abkühlung bildet, so möchte ich darauf hinweisen, dass dieses bei allen von mir untersuchten Präparaten, *auch den gut leitenden, nicht* vorhanden war, wohl aber leicht, wie bekannt, durch kräftigen Druck mit einem Glasstab hergestellt werden konnte. Ich wüsste nicht, wie man diese Erscheinung anders erklären will, als indem man zuvor eine allotrope Modification oder einen colloidalen Zustand oder mit einem Wort eine andere Gruppirung der Molecüle als bei dem normalen Silber annimmt. Dass man sich dieselbe continuirlich veränderlich denken kann[2], scheint mir nicht besonders schwierig zu verstehen. Will man sich überhaupt eine Vorstellung von der Anordnung der Molecüle in einem festen Körper machen, so wird man doch nicht annehmen, dass in demselben einfach alle Einzelmolecüle in gleichen Entfernungen von einander sich befinden. Vielmehr werden wir uns dieselben zu Gruppen von mehr oder weniger grosser Anzahl verbunden denken müssen. Auch für ein Metall im normalen Zustand wird man sich die Gruppirung innerhalb gewisser Grenzen veränderlich vorstellen. Dieselbe wird durch Aenderungen der Temperatur beeinflusst, ebenso durch Deformationen, welche über die Elasticitätsgrenze gehen.

Ist die Gruppirung der Molecüle infolge der Bildung der Metallmasse *wesentlich* von derjenigen des Normalzustandes verschieden, so haben wir es mit einer allotropen Modification zu thun. Die Anzahl der Molecüle in den einzelnen Gruppen braucht man sich dabei keineswegs gleich gross vorzustellen. Es könnte dafür vielleicht ein ähnliches Vertheilungsgesetz gelten, wie für die Moleculargeschwindigkeiten eines Gases. Auch bei den festen Körpern wird dann ein Durchschnittswerth der Anzahl für die physikalischen Eigenschaften, wie z. B. für die electrische Leitungsfähigkeit, maassgebend sein.

---

1) l. c. p. 336.

2) Vgl. Wied. Ann. 48. p. 336.

Der fortschreitende Zerfall grösserer Gruppen und die gleichzeitige Bildung kleinerer Gruppen würde dann von einer *continuirlichen* Veränderung der physikalischen Eigenschaften begleitet sein.

Ich gebe gern zu, dass man eine vollständige Aufklärung dieser Fragen erst von einer Moleculartheorie der festen Körper wird erwarten dürfen. Auch will ich nicht behaupten, dass der Zusammenhang zwischen dem allotropen Zustand eines Metalls und seiner Leitungsfähigkeit bereits nach allen Richtungen hin aufgeklärt wäre. Ich hoffe, bald in der Lage zu sein, weitere Untersuchungen über diesen Gegenstand, welche in dem hiesigen Institut ausgeführt werden, mittheilen zu können.

Greifswald, den 28. Februar 1893.

Berichtigung.

Bd. XLVII. (B. Galitzine.) p. 481 Z. 3 steht:

$$P = \frac{\pi}{V}\left[T\int \frac{\frac{dE}{dT}}{T^2}\, dT\right].$$

Es soll jedoch heissen:

$$P = \frac{\pi}{V}\left[T\int \frac{E}{T^2}\, Td\right].$$

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

400

350

300

a

250

1

2

3

28

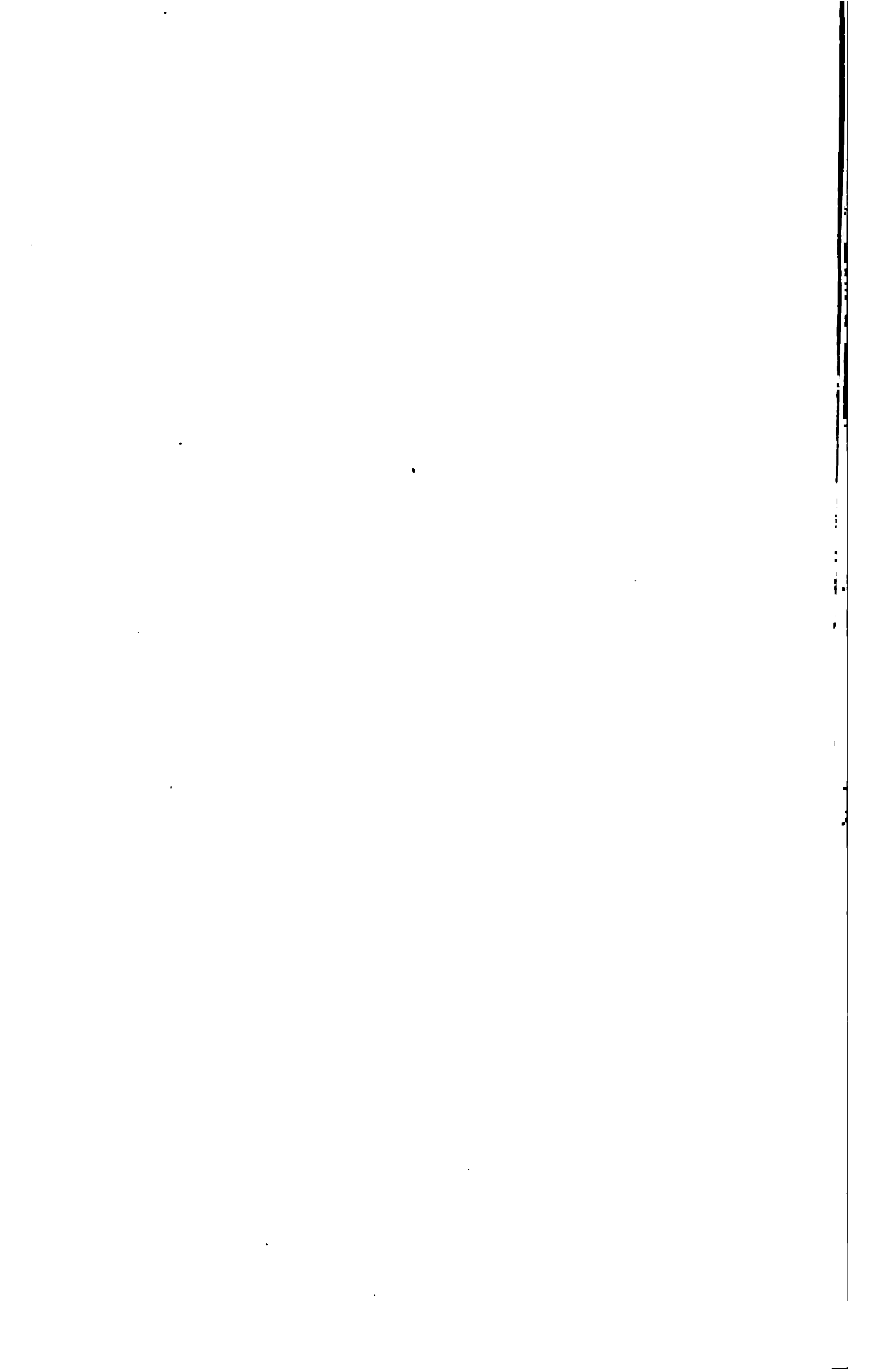
200

150

100

50

500





*Die Verlagsbuchhandlung von*

# Johann Ambrosius Barth

**(Inhaber Arthur Meiner)**

*in*

## Leipzig, Johannesgasse 6

*gegründet 1780*

*pflegt als Specialität*

## Naturwissenschaftlichen Verlag
## (Physik, Technik, Mathematik, Chemie)

*und zählt zu ihren Autoren:*

| | vergl. in diesem Prospekt Seite | | vergl. in diesem Prospekt Seite | | vergl. in diesem Prospekt Seite |
|---|---|---|---|---|---|
| *Barus* | 8 | *Fleischer* | 11 | *Meyer, E. von* | 15 |
| *Boltzmann* | 7 | *Hamilton* | 11 | *Ohm* | 4 |
| *Boys* | 8 | *Helmholtz, von,* | 2, 14 | *Penck* | 12 |
| *Chappuis* | 11 | *Hertz* | 4 | *Plattner* | 13 |
| *Clausius* | 10 | *Heydweiller* | 6 | *Poggendorff* | 13, 14 |
| *Drechsel* | 10 | *Hoppe* | 12 | *Shenstone* | 13 |
| *Dziobek* | 10, 13 | *Kirchhoff* | 2, 3 | *Stokes* | 2, 13 |
| *Ebert* | 9, 13 | *Kohlmann* | 12 | *Thomsen, Jul.* | 5 |
| *Elbs* | 10, 16 | *Lohrmann* | 9 | *Waals, van der* | 13 |
| *Everett* | 11 | *Lommel, von* | 4, 6 | *Wiedemann, G. u. E.* | 14 |

*sowie viele andere.*

*Die Firma wird sich auch ferner in den Dienst dieser Wissenschaften stellen und bittet Autoren einschlägiger Werke, ihr Dieselben zum Verlage anzubieten.*

*Vorliegender Prospekt enthält eine Auswahl der in den letzten Jahren bei der Firma erschienenen Werke.*

*Dieselben sind durch jede Buchhandlung, eventuell zur Ansicht zu beziehen, und werden auf feste Bestellung auch direkt von der Verlagshandlung geliefert.*

*LEIPZIG, im Frühjahr 1893.*

# Wissenschaftliche Abhandlungen

von

## H. von Helmholtz

Präsidenten der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Charlottenburg

gr. 8° mit Portr. u. 8 lith. Tafeln in Leinen gebunden unbeschnitten Mark 40.—

Im ganzen 99 Abhandlungen aus nachstehenden Gebieten:

I. Band VIII, 938 Seiten 1882 Mark 20.—

Zur Lehre von der Energie. — Hydrodynamik. — Schallbewegung. — Elektrodynamik. — Galvanismus.

II. Band VIII, 1021 Seiten 1883 Mark 20.—

Physikalische Optik. — Physiologische Optik. — Physiologische Akustik. — Erkenntnistheorie. — Physiologie. — Nachtrag (Thermodynamik).

III. Band unter der Presse.

Die wissenschaftlichen Arbeiten von Helmholtz's sind von beträchtlichem Einfluss auf den Entwickelungsgang der theoretischen Physik unserer Zeit gewesen. Durch die Vereinigung der seiner Zeit als Einzeldrucke oder in verschiedenen wissenschaftlichen Zeitschriften erschienenen Arbeiten in gleichmässigem modernen Wiederabdruck werden dieselben der wissenschaftlichen Welt bequem zugänglich gemacht. — Die Seitenzahlen der Originaldrucke sind am Rand beigefügt, sodass Citate derselben auch in der vorliegenden Ausgabe nachgeschlagen werden können.

---

## Sammlung

von

# Porträts berühmter Physiker

gr. Folio-Format (29:43 cm) chines. Papier. Preis für das Exemplar Mark 1 50

Bisher erschienen:

**H. von Helmholtz,** Heliogravüre. **G. R. Kirchhoff,** Stahlstich.
**G. S. Ohm,** Heliogravüre. **G. G. Stokes,** Stahlstich.

# Gesammelte Abhandlungen

von

## G. R. Kirchhoff

weiland Professor der Physik an der Universität Berlin

VIII, 641 Seiten gr. 8° mit Porträt und 2 lithographischen Tafeln 1882 in Leinen gebunden unbeschnitten Mark 15.—

Dazu

# Nachtrag

herausgegeben von **L. Boltzmann**

137 Seiten mit 1 Tafel 1891 Mark 3.60

Es muss als eine erfreuliche Thatsache betrachtet werden, wenn sich die Grossmeister einer Wissenschaft entschliessen, die seit Jahren veröffentlichten Abhandlungen zu sammeln und sie somit dem Leser zugänglicher zu machen. Eine solche Sammlung ist die vorliegende, welche Aufsätze aus dem Gebiete der Lehre von der Elektricität und vom Magnetismus enthält, über Elasticität, Optik, Hydrodynamik, Wellentheorie, Wärmetheorie und über Emission und Absorption von Licht und Wärme berichtet und mit den berühmten Abhandlungen über Spektralanalyse schliesst. Der von Boltzmann nach Kirchhoffs Tode zusammengestellte Nachtrag bildet die willkommene Ergänzung zu dem Hauptwerke.

---

Eine Schilderung der Persönlichkeit und der wissenschaftlichen Verdienste Kirchhoff's enthält das Werkchen:

# Gustav Robert Kirchhoff

## Gedächtnisrede von L. Boltzmann

32 Seiten gr. 8° mit Kirchhoffs Porträt 1888 Mark 1.—

Die Schrift bildet einen wertvollen Beitrag zur Geschichte der Physik, besonders der Spektralanalyse.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH IN LEIPZIG

# Gesammelte Abhandlungen

von

## G. S. Ohm

Herausgegeben und eingeleitet von

**Dr. E. von Lommel**

Professor der Physik an der Universität München

XX, 855 Seiten gr. 8° mit Porträt und Figuren im Texte
1892 in Leinen gebunden unbeschnitten Mark 20.—

Der Gedanke, die in vielen zum Teil schwer zugänglichen Zeitschriften verstreuten Abhandlungen G. S. Ohms gesammelt zu veröffentlichen, ist bei der Bedeutung Ohms jedenfalls als ein glücklicher zu bezeichnen. Bei dem hohen Interesse, das Ohms Arbeiten auch heute noch und sogar, nachdem sein Name durch die Elektrotechnik populär geworden, mehr noch als früher beanspruchen, ist es daher um so erfreulicher, dass Prof. Dr. E. von Lommel in München, der Nachfolger Ohms auf dem Lehrstuhle der Physik, und feinsinnige Kenner des berühmten Physikers, es unternommen hat, eine Ausgabe der gesammelten physikalischen Abhandlungen G. S. Ohms zu besorgen.

Die Sammlung enthält alle von Ohm veröffentlichten Schriften, mit Einschluss der „galvanischen Kette", in chronologischer Reihenfolge, nur mit Ausschluss einiger in Buchform erschienenen Werke. Sie schliesst sich in Ausstattung und Format eng an die im gleichen Verlage erschienenen „Wissenschaftlichen Abhandlungen" von Helmholtz, Kirchhoff und Hertz an.

---

## Untersuchungen

über die

# Ausbreitung der elektrischen Kraft

von

**Dr. Heinrich Hertz**

Professor der Physik an der Universität Bonn

VIII, 296 Seiten mit 40 Figuren im Text 1892 Mark 6.—

Wiederabdruck der in den „Annalen der Physik und Chemie" veröffentlichten Arbeiten, durch welche Professor Hertz vor einigen Jahren zum erstenmale die zeitliche Ausbreitung einer vermeintlichen Fernkraft

nachwies, und die Maxwellsche Theorie über den Zusammenhang der elektrischen Erscheinungen mit dem Lichte durch Versuche erläuterte. In einer einleitenden Übersicht wird der innere Zusammenhang der einzelnen Arbeiten nachgewiesen und auf gewisse Fragen Antwort gegeben, welche immer und immer wieder an den Herrn Verfasser persönlich gestellt wurden über den Zusammenhang der Versuche unter sich und mit der Maxwellschen Theorie, sowie über das eigentliche Wesen der letzteren Theorie überhaupt. Hierdurch dürfte das Verständnis der Versuche, besonders aber der theoretischen Arbeiten, nicht unwesentlich erleichtert werden.

# Thermochemische Untersuchungen

von

**Julius Thomsen**

Professor an der Universität Kopenhagen

4 Bände gr. 8⁰ 1882—86 in Leinen gebunden unbeschnitten
**Mark 51.—**

I. Band: Neutralisation und verwandte Phänomene XII, 449 Seiten 1882 mit 3 Tafeln Mark 12.—

II. Band: Metalloide. XIV, 506 Seiten mit 1 Tafel Mark 12.—

III. Band: Wässrige Lösung und Hydratbildung. — Metalle. XVI, 567 Seiten mit 6 Tafeln 1884 Mark 15.—

IV. Band: Organische Verbindungen. XVI, 429 Seiten mit 1 Tafel 1886 Mark 12.—

Mit dem IV. Bande ist das Werk abgeschlossen; ein Hauptregister über alle vier Bände befindet sich am Schlusse des vierten Bandes.
Die Bände können zu den angegebenen Preisen sowohl broschiert als in engl. Leinenband (unbeschnitten) bezogen werden.

Die Thermochemie beschäftigt sich mit der Beobachtung der die chem. Processe begleitenden Wärmeerzeugung resp. des Wärmeverbrauches. Sie steht in ebenso enger Beziehung zur mechan. Wärmetheorie und Gastheorie wie zur theoret. Chemie. Einer der exactesten und geistreichsten Forscher auf diesem Gebiete ist Jul. Thomsen.
Was seine Arbeiten, abgesehen von ihrem thatsächlichen Wert an sich, besonders wichtig macht, ist, dass sie nach einem planmässigen System nach denselben Methoden, in denselben Apparaten ausgeführt, und dass auch die Fundamentalgrössen von demselben Experimentator bestimmt worden sind.

## Hülfsbuch

für die

# Ausführung elektrischer Messungen

von

**Dr. Ad. Heydweiller**

Privatdozenten an der Universität Würzburg

VIII, 262 Seiten gr. 8⁰ mit 58 Fig. 1892, geheftet Mark 6.—
in Leinen gebunden Mark 7.—

Das Buch wird Jedem willkommen sein, der, sei es zu rein wissenschaftlichen Zwecken, sei es bei praktischem Bedarf mit elektrischen Messungen zu thun hat. Es enthält wohl alle Methoden, die in neuerer Zeit bekannt geworden sind. Dabei ist auf Fehlerquellen und Korrektionen besondere Rücksicht genommen.

Der Zeitpunkt für eine Sammlung des ausgedehnten und weit zerstreuten Materials schien gerade jetzt günstig, wo durch zuverlässige Bestimmung der grundlegenden absoluten Einheiten mit einer auf lange ausreichenden Genauigkeit der Gegenstand zu einem gewissen Abschluss gebracht ist.

Das Buch kann angehenden Elektrotechnikern auf das Beste empfohlen werden und dürfte sich als Nachschlagebuch sehr wohl eignen.

---

## Lehrbuch

der

# Experimentalphysik

von

**Dr. E. von Lommel**

Professor der Physik an der Universität München

X, 644 Seiten gr. 8⁰ mit 424 Abbildungen 1893, geheftet
Mark 6.40, gebunden Mark 7.20

Das „Lehrbuch der Experimentalphysik“, aus den Vorträgen des Verfassers entstanden, ist bestrebt, die Grundlehren der Physik, ohne weitläufige mathematische Entwickelungen, dem heutigen Standpunkte unserer Kenntnisse gemäss allgemein verständlich darzustellen. Unter Anknüpfung an alltägliche Erfahrungen und leicht anzustellende Versuche sind die Thatsachen überall zum Ausgangspunkte gewählt. Der (grösser gedruckte) Haupttext bildet für sich einen zusammenhängenden Lehrgang, zu dessen Verständnis, welches durch zahlreiche in den Text

gefügte Abbildungen — der Verf. hat selbst eine grosse Zahl hübscher Vorlesungsversuche und Demonstrationsapparate erfunden — unterstützt wird, die elementarsten mathematischen Kenntnisse genügen. Der Stoff ist so angeordnet, dass niemals später Folgendes vorausgesetzt, sondern nur auf früher Besprochenes zurückverwiesen wird, wodurch dem Anfänger das Studium wesentlich erleichtert wird. Um aber auch dem Bedürfnis von Mittel- und Hochschulen gerecht zu werden, sind (kleiner gedruckte) Abschnitte eingestreut, welche die wichtigsten Entwickelungen und Beweise in möglichst knapper elementarer Darstellung enthalten. Auch geschichtliche Daten haben gebührende Berücksichtigung gefunden, und durch ein ausführliches Namen- und Sachregister ist dafür gesorgt, dass das Werk auch als bequemes Nachschlagebuch dienen kann.

Die Darstellung ist immer anziehend und klar. So reich die Litteratur nach dieser Seite hin ist, war doch ein wirklich brauchbares Buch über die ganze Physik unter Berücksichtigung der neuen Forschungen aus dem Gebiete der Elektricität ein Bedürfnis.

## Vorlesungen über die Maxwell'sche Theorie

der

# Elektricität und des Lichtes

von

**Dr. Ludwig Boltzmann**

Professor der theoretischen Physik an der Universität München

I. Teil:

## Ableitung der Grundgleichungen für ruhende, homogene, isotrope Körper

XII, 139 Seiten gr. 8° mit vielen Textfiguren und zwei lithographischen Tafeln 1891 Mark 5.—

Der Verf. hat die Mühe einer sorgfältigen Redaktion seiner Vorlesungen nicht gescheut und bietet damit der wissenschaftlichen Welt ein Geschenk, das zu den wertvollsten der physikalischen Litteratur gehört. Denn nur ein Boltzmann konnte den oft unentwirrbar complicirten Plan des Maxwell'schen Lehrgebäudes bis in alle Details so verstehen, um ihn mit dieser Klarheit blosszulegen. Aus den einfachsten Annahmen — den Gesetzen der cyklischen Bewegungen und der Lagrange'schen Gleichung — entwickeln sich die weittragendsten Schlüsse mit einer Klarheit und Eleganz, die neben der vollendeten wissenschaftlichen Befriedigung auch einen hervorragenden aesthetischen Genuss bietet.

**Der 2. Teil der Vorlesungen ist Ende 1893 zu erwarten.**

# Die physikalische Behandlung
und die
# Messnng hoher Temperaturen
von
**Dr. Carl Barus**
Physiker der Geol. Survey in Washington.

VIII, 92 Seiten gr. 8° mit 30 Figuren und 2 Tafeln 1892
Mark 3.—

Die vorliegende Arbeit zeichnet sich durch grosse Gründlichkeit aus. Dieselbe dokumentiert sich auch schon äusserlich durch die grosse Zahl der Citate, welche der Verfasser dem ersten, die Geschichte der Pyrometrie behandelnden Kapitel beigegeben hat. Im zweiten Kapitel wird die Kalibrierung der Kalorimeter durch bekannte Siede- und Schmelzpunkte behandelt und zwar werden getrennt behandelt die Apparate für niedere Siedepunkte, diejenigen für hohe Siedepunkte, das Thermoelement und die mit der Benutzung desselben verknüpften Beobachtungsverfahren.

Wer sich aus wissenschaftlichem oder technischem Interesse mit der Messung hoher Temperaturen befassen will, wird in diesem Buche die beste Orientierung finden und seine weiteren Studien und Versuche danach einrichten können.

---

# Seifenblasen
Vorlesungen über Kapillarität
von
**C. V. Boys**
Mitglied der Royal Soc., Prof. am South Kensington College

Autorisierte deutsche Übersetzung
von
**Dr. G. Meyer**
Privatdozenten an der Universität Freiburg in B.

VIII, 92 Seiten gr. 8° mit 56 Figuren und einer grossen Tafel
1893 Mark 3.—

Das Buch enthält unter Vermeidung mathematischer Entwickelungen eine auf Experimente gegründete Darstellung der Capillaritätslehre. Die Versuche sind so ausgewählt, dass ihre Ausführung nur wenig Hülfsmittel erfordert und auch dem weniger Geübten keine ernstlichen Schwierigkeiten bereiten kann. Eine grosse Anzahl Figuren erleichtert

das Verständnis in hohem Masse, so dass das Buch nicht nur Gelehrten zur Erholung, sondern auch Laien zur Belehrung warm empfohlen werden kann.

---

# Neue wohlfeile Ausgabe
der
# Mondkarte
## in 25 Sektionen und 2 Erläuterungstafeln
von
## Wilhelm Gotthelf Lohrmann
mit
Erläuterungen und selenographischen Ortsbestimmungen unter Mitwirkung von F. W. Opelt und M. Opelt
herausgegeben von
## Dr. J. F. Julius Schmidt
weiland Direktor der Sternwarte zu Athen
mit einem Vorworte
von
## Dr. H. Ebert
Privatdozenten an der Universität Erlangen

27 Kupfertafeln 4° u. Text VIII, 54 Seiten 4° 1892 Mark 25.—

Die von Lohrmann selbst noch vollständig für die Reproduktion mit der Feder ausgearbeiteten Blätter sind ausserordentlich sorgfältig in Kupfer gestochen und machen zufolge der hierdurch bedingten Schärfe und Klarheit aller Formen einen technisch schöneren Eindruck, als die lithographischen Blätter von Neison und Mädler oder als die kräftigen in bräunlich gelbem Ton heliotypisch vervielfältigten Darstellungen Schmidt's.

Die Karte ist handlich und am Fernrohre bequem zu benutzen, da sie auf kleine Tafeln gedruckt ist, und wirkt überaus malerisch und plastisch. Zusammengefügt, würden die 25 Sektionen eine Karte der sichtbaren Mondoberfläche von 1 Meter Durchmesser darstellen.

Der billige Preis erleichtert Jedem die Anschaffung.

Die nach dieser grossen Ausgabe von W. Werner **lithographierte**

## Karte des Mondes, Mittlere Libration
(Durchmesser des Mondbildes 35½ cm)

kostet jetzt in einem grossen Blatte Mark 5.—

**CLAUSIUS, R., Die Potentialfunktion und das Potential.** Ein Beitrag zur mathematischen Physik. 4. vermehrte Auflage. 178 Seiten gr. 8⁰. 1885 Mark 4.—

— — **Über die verschiedenen Masssysteme** zur Messung elektrischer und magnetischer Grössen. gr. 8⁰. 24 Seiten. 1882 Mark —.60

---

**DRECHSEL, Prof. Dr. E., Leitfaden in das Studium der chemischen Reaktionen und zur qualitativen Analyse.** 2. umgearbeitete Auflage. 126 Seiten. gr. 8⁰. 1888 Mit Spektraltafel. gebunden Mark 3.—

„An Leitfäden zur Analyse ist in der chemischen Litteratur kein Mangel. Trotzdem füllt das vorliegende Buch eine Lücke aus. Bei der Analyse wird zu leicht über die praktische Ausführung der Operationen der geistige Inhalt vergessen, und die Gefahr, dass aus dem Studierenden eine Analysiermaschine wird, liegt sehr nahe. Drechsel's Buch wird dies verhindern, indem es in verständlicher, aber wissenschaftlicher Weise zuerst die Grundbegriffe der Chemie und dann die Vorgänge bei den analytischen Erscheinungen auseinandersetzt. **Besonders zu loben ist die Aufnahme der Spektralanalyse. Man kann aus dem Buche nicht nur lernen, sondern auch praktisch danach arbeiten. Die glückliche Verbindung des praktischen und theoretischen Teiles verleiht der Arbeit vor allem ihren Wert.**"

Deutsche Chemikerzeitung.

---

**DONATH, ALFR., Das mathematische Raumproblem** und die geometrischen Axiome. 8⁰. 68 Seiten. 1881 Mark 1.60

---

**DZIOBEK, Dr. O., Die mathematischen Theorien der Planetenbewegungen.** 320 Seiten. gr. 8⁰. 1888 Mark 9.—

Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass der Verf. sich bei der Behandlung des schwierigen Stoffes und der Entwicklung der mathematischen Formeln durchweg der einfachsten Mittel bedient hat. Sein Werk ist dadurch zu einem wirklichen Lehrbuch geworden. Ein anderer Vorzug besteht in der Angabe der Quellen, wodurch es jedem erleichtert worden ist, den Gegenstand weiter zu verfolgen, und ganz besonders in der geschichtlichen Übersicht, welche einem jeden der Abschnitte beigefügt ist und namentlich Anfängern willkommen sein dürfte.

---

**ELBS, Prof. Dr. K., Die synthetischen Darstellungsmethoden der Kohlenstoffverbindungen.** 2 Bände (294 und 474 Seiten). gr. 8⁰. 1889—91 Mark 17.—

Übersichtliche Zusammenstellung und eingehende Beschreibung aller bis jetzt bekannten organ. Synthesen mit besonderer Hervorhebung der praktisch geeignetsten Methoden. — Äusserst nützliches Nachschlagebuch für jeden mit organ. Chemie Beschäftigten.

**EVERETT, J. D., Physikalische Einheiten und Konstanten.** Nach der 3. engl. Ausgabe bearbeitet von Dr. P. Chappuis und Dr. Kreichgauer, Assistenten am Bureau internat. des poids et mesures Breteuil. 126 Seiten gr. 8° 1888 Mark 3.—

INHALT: Allgemeine Theorie der Einheiten. — Die Wahl von drei Grundeinheiten. — Die Einheiten der Mechanik. — Hydrostatik. — Elasticität. — Astronomie. — Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles. — Das Licht. — Die Wärme. — Magnetismus. — Elektricität.

**Alle eingeführten Elemente sind nach Wesen und Bedeutung ausreichend, exakt und leicht verständlich erklärt. Wiewohl der Verfasser alle jene physikalischen Zahlen nur als Beispiele für den Gebrauch der Einheiten gelten lassen will, so kann deren Zusammenstellung sehr wohl auch den weitern Anspruch machen, einem unzählig oft eintretenden Bedürfnis beim Rechnen als Hülfsmittel zu dienen.**

---

**FLEISCHER, Prof. Dr. E., Die Titrirmethode als selbständige quantitative Analyse.** 3. verbesserte Auflage. 350 Seiten. gr. 8° mit Figuren. 1887 Mark 7.50.

**Enthält nur praktisch brauchbare Methoden. — Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass sich der Verfasser auch in dieser 3. Aufl. der Äquivalentformeln bedient, da dieselben für seine Zwecke grössere Anschaulichkeit gewähren.**

---

**HAMILTON, W. ROWAN, Elemente der Quaternionen.** Deutsch von Dr. Paul Glan. 2 Bände 1882—84 Mark 34.—

I. Band: XXIV, 746 Seiten. gr. 8°. (Theorie der Qu.) Mark 20.—
II. „ LXXIII, 436 Seiten. gr. 8°. (Anwendungen) Mark 14.—

**Hamilton's Elements of Quaternions ist bekanntlich das grundlegende und zugleich das ausführlichste und am leichtesten verständliche Werk über diesen wichtigen Zweig der höheren Mathematik, der sich auch ausserhalb Englands einer steigenden Benutzung erfreut, da er namentlich die Anwendung in der Physik, der Geometrie, der Mechanik u.s.w. bedeutende Vereinfachungen darbietet. — Der Übersetzer hat das Werk in zwei Bände geteilt, um es handlicher zu machen, und zwar enthält der I. Band die vollständige Theorie der Quaternionen mit zahlreichen erläuternden Beispielen, der II. eine systematische Durcharbeitung der Geometrie mittelst der Quaternionen-Rechnung, sowie einige Abschnitte der Physik und der Mechanik.**

**Eine ausführliche Anweisung, auf welche Weise das Werk am zweckmässigsten zu studieren sei, ist im Vorwort des Übersetzers gegeben.**

**HOPPE, Dr. EDM., Geschichte der Elektricität.** 642 Seiten. gr. 8° mit Figuren 1884 Mark 13.50

Auf eigenen Quellenstudien des Verfassers beruhendes, daher in allen Angaben und besonders auch in den Citaten zuverlässiges Werk; dasselbe ist aus öffentlichen Vorträgen entstanden und für jeden einigermassen physikalisch Gebildeten gut verständlich.

---

**KAHLBAUM, GEORG W. A., Siedetemperatur und Druck in ihren Wechselbeziehungen.** Studien und Vorarbeiten. Mit 15 lithographischen Tafeln 1885 Mark 10.—

---

**KOHLMANN, B. u. F. FRERICHS, Rechentafeln zur quantitativen chemischen Analyse.** 212 Seiten gr. 8° 1882 broschiert Mark 3.—, gebunden Mark 4.—

Für Chemiker, welche viele quantitative Analysen auszuführen haben, besonders also in der Technik, gewähren diese Tafeln eine ausserordentlich fördernde Hilfe. — Es kann darin von jeder von Milligramm zu Milligramm steigenden Menge von 90 der häufigsten chemischen Verbindungen das Gewicht der Bestandteile unmittelbar abgelesen werden. — Stas'sche Atomzahlen.

---

**NOTH, H., Die Arithmetik der Lage.** Ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Raumlehre. 90 Seiten gr. 8° mit Figuren 1881 Mark 2.40

Durch die „Arithmetik der Lage" wird eine Idee vollständig realisiert, die zuerst von Leibniz (im Jahre 1679) ausgesprochen und in neuester Zeit von dem genialen Mathematiker H. Grassmann weiter verfolgt wurde, die Idee einer Arithmetik, durch welche die Lage der Raumelemente direkt ausgedrückt wird, ohne dass hierzu Grössenverhältnisse benutzt werden.

---

**PENCK, ALB., Die Vergletscherung der deutschen Alpen, ihre Ursachen, periodische Wiederkehr und ihr Einfluss auf die Bodengestaltung.** Gekrönte Preisschrift. gr. 8°. VIII, 484 Seiten mit 2 Tabellen, 2 kolorierten Karten und 2 Profiltafeln 1882 Mark 12.—

**PLATTNER, CARL FRIEDR., Die Probierkunst mit dem Lötrohre** oder vollständige Anleitung zu qualitativen und quantitativen Lötrohr-Untersuchungen. 5. Auflage neu bearbeitet von Th. Richter. Mit 93 eingedruckten Holzschnitten. 664 Seiten 8° 1878 Mark 12.—

**POGGENDORFF, J. C., Geschichte der Physik.** Vorlesungen gehalten an der Universität zu Berlin (herausgegeben von Barentin). 8° 937 Seiten mit 40 Figuren 1879 Mark 16.80

**POGGENDORFF, J. C., Biographisch-litterarisches Handwörterbuch** zur Geschichte der exacten Wissenschaften, enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern u. s. w. aller Völker und Zeiten. Zwei Bände. I. Band: V Seit., 1584 Col., II. Band: 1468 Col. Lex.-8° (zweispaltig) 1863 statt Mark 40.— für Mark 28.—

**SHENSTONE, Anleitung zum Glasblasen,** für Physiker und Chemiker. Deutsch bearbeitet von Dr. H. Ebert. 86 Seiten mit 44 Holzschnitten 1887 Mark 2.—

Das einzige Buch über diesen wichtigen Zweig der physikalischen Technik; nach übereinstimmendem Urteil der Kritik von grosser praktischer Brauchbarkeit.

**STOKES, G. G., Das Licht.** Zwölf Vorlesungen, nebst zwei Vorlesungen über Absorption und Fluorescenz des Lichtes; deutsch von Dr. O. Dziobek. 308 Seiten mit Porträt 1888 Mark 5.—, in ff. Halbfranzband Mark 7.—

In allgemein verständlicher Sprache, ohne mathematische Formeln und ohne Figuren gegebene Darstellung der Lehre vom Licht. Nur wer seine Wissenschaft in allen Teilen so beherrscht wie Stokes, kann einen so schwierigen Gegenstand in dieser meisterhaften Weise gemeinverständlich behandeln. — Allen physikalisch Gebildeten wird das Buch eine ebenso wertvolle als anregende Lektüre sein.

**WAALS, van der, Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes.** Übersetzt und mit Zusätzen unter Mitwirkung des Verfassers versehen von Dr. F. Roth. 176 Seiten 8° Mit 2 Tafeln 1881 Mark 4.—

# Zeitschriften.

# Annalen der Physik und Chemie

**Neue Folge**

unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin, und insbesondere des Herrn **H. von Helmholtz**

herausgegeben von

**G. & E. Wiedemann**

Preis für den in 12 Heften ausgegebenen Jahrgang von drei starken Bänden Mark 36.—

Begründet von **Gren** als Journal und Neues Journal der Physik 12 Bände, 1790—97, fortgesetzt als

Annalen der Physik ( I. Folge) von **Gilbert,** Bd. 1—76 (1799—1824)
„ „ „ (II. „ ) „ **Poggendorff,** Bd. 1—160, 8 Ergänzungsbände u. Jubelband mit Sach- u. Namenregister 1824—77.
„ „ „ (III. „ ) „ **Wiedemann** (wie oben) seit 1877.

Ältere Jahrgänge sowie ganze Reihen werden zu angemessenen Preisen zurückgekauft, in geeigneten Fällen auch umgetauscht. Mit Probeheften und Prospekten sowie Angabe der billigsten Preise grösserer Reihen und — soweit vorhanden — vollständiger Exemplare stets gern zu Diensten.

---

Im Anschluss an die „Annalen", aber ebenso für sich, gleichsam als physikalisches Centralblatt, erscheinen seit 1877 die

# Beiblätter

zu den

## Annalen der Physik und Chemie

herausgegeben von

**G. & E. Wiedemann**

Jährlich ein starker Band von 12 Heften Mark 20.—

Die „Beiblätter" erscheinen seit 1877 und enthalten von Fachgelehrten bearbeitete und von den Verfassern genehmigte, also **autorisierte** Berichte über die gesamten im laufenden Jahr erschienenen Abhandlungen des In- und Auslandes aus dem Gebiete der Physik, ferner monatliche Inhaltsangaben aller physikalischen Zeitschriften, Akademie-Publikationen und sonstiger schwer zugänglichen Arbeiten. Auch das

aus den verwandten Wissenschaften den Physiker Interessierende ist durch kurze Referate erwähnt, während die Titel der in den „Annalen" veröffentlichten Arbeiten zur Herstellung einer vollständigen physikalischen Bibliographie in das Inhaltsverzeichnis aufgenommen sind.

Die Annalen und Beiblätter zusammen genügen somit vollkommen, um die physikalische Forschung aller Kulturvölker im einzelnen zu verfolgen.

Sie sind nicht nur für Physiker, sondern für jede Bibliothek ein ausserordentlich wichtiges bibliographisches Hülfsmittel, für denjenigen aber, dem die wissenschaftlichen Zeitschriften nicht immer zur Hand sind, geradezu unentbehrlich.

Die Jahrgänge 1877—1892 (Bd. 1—16) sind noch zu haben.

Ladenpreis Mark 252.—

Ein

# Vollständiges Namenregister

zu allen in Bd. 1—15 vorkommenden Referaten und Litteraturangaben (etwa je 19000) bearbeitet von

**Fr. Strobel**

VI, 200 Seiten gr. 8° 1893 Mark 7.—

ist soeben erschienen und erleichtert die Benutzung der Beiblätter ungemein.

# Journal für praktische Chemie

**Neue Folge**

herausgegeben von **E. von Meyer**

Preis für den ganzen Jahrgang von 24 Heften Mark 24.—

Begründet von **O. L. Erdmann** als Journal für techn. und ökonom. Chemie. 18 Bände 1828—1833, fortgeführt als

Journal für praktische Chemie von **O. L. Erdmann, Schweigger-Seidel, Marchand, Werther** Band 1—108, 1834—1869.

— Neue Folge, herausgegeben von **Kolbe** und **E. v. Meyer** seit 1877, von 1885 von **E. v. Meyer** allein.

Das Journal für praktische Chemie ist für den wissenschaftlich arbeitenden Chemiker ebenso unentbehrlich wie die „Berliner Berichte" und „Liebigs Annalen." Es enthält nur Originalarbeiten und hat sich seinen freieren Ton zu bewahren gewusst.

Vollständige Exemplare von Anfang des Bestehens an sind noch zu haben, besonders sei darauf hingewiesen, dass durch Neudruck einiger Bände die Neue Folge (1870 ff.) wieder komplett zu haben ist.

Mit Preisangaben gern zu Diensten.

Verlag von Johann Ambrosius Barth in Leipzig

Mit dem 1. April 1893 hat zu erscheinen angefangen:

# Elektrotechnische Bibliographie

**Monatliche Rundschau über die literarischen Erscheinungen des In- und Auslandes einschliesslich der Zeitschriftenlitteratur auf dem Gebiete der Elektrotechnik**

Unter ständiger Mitwirkung der Elektrotechnischen Gesellschaft zu Leipzig

zusammengestellt von

**Dr. Georg Maas**

Preis für den in 12 Heften ausgegebenen Jahrgang Mark 5.— Der nur von April bis Dezember 1893 laufende erste Jahrgang (9 Hefte) kostet Mark 4.—

Ein besonderer Prospekt über die Elektrotechnische Bibliographie liegt bei oder ist von der Verlagsbuchhandlung ebenso wie ein Probeheft sofort kostenlos zu beziehen.

Soeben erschien:

# Die Accumulatoren

**Eine gemeinfassliche Darlegung ihrer Wirkungsweise, Leistung und Behandlung**

von

**Dr. Karl Elbs**

Professor an der Universität Freiburg i. B.

44 Seiten gr. 8° mit 3 Figuren im Texte Mark 1.—

Das Schriftchen giebt eine äusserst klare und gemeinverständliche Erklärung des Principes der Accumulatoren, sowie die Regeln für deren Behandlung und Benutzung. Es wendet sich nicht nur an Chemiker und Physiker, sondern ebenso an Physiologen, Gymnasial- und Mittelschullehrer, Ärzte und Zahnärzte, welche aus Unkenntnis oft schlimme Erfahrungen mit Accumulatoren machen.

Druck von Otto Dürr in Leipzig.

Michigan

9

*Geschlossen am 15. März 1893.*

**1893.** **№ 4.**

# ANNALEN

DER

# PHYSIK UND CHEMIE.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

**F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.**

**NEUE FOLGE**

**BAND XLVIII. HEFT 4.**

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERT VIERUNDACHTZIGSTEN BANDES
VIERTES HEFT.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT ZU BERLIN

UND INSBESONDERE DES HERRN

H. VON HELMHOLTZ

HERAUSGEGEBEN VON

**G. UND E. WIEDEMANN.**




LEIPZIG, 1893.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

(ARTHUR MEINER.)



*Bestellungen auf die „Annalen" werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 12 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 38 ℳ.*

# Inhalt.

**Verlag von Johann Ambrosius Barth (Arthur Meiner) in Leipzig.**

**LOMMEL,** Dr. E. von, Prof. der Physik an der Universität München. **Lehrbuch der Experimentalphysik.** X, 644 Seiten. gr. 8° mit 423 Abbildungen. 1893. Geh. M. 6.40, geb. M. 7.20.

Das „Lehrbuch der Experimentalphysik", aus den Vorträgen des Verfassers entstanden, ist bestrebt, die Grundlehren der Physik, ohne weitläufige mathematische Entwickelungen, dem heutigen Standpunkte unserer Kenntnisse gemäss allgemein verständlich darzustellen. Unter Anknüpfung an alltägliche Erfahrungen und leicht anzustellende Versuche sind die Thatsachen überall zum Ausgangspunkte gewählt. Der (grösser gedruckte) Haupttext bildet für sich einen zusammenhängenden Lehrgang, zu dessen Verständnis, welches durch zahlreiche in den Text gefügte Abbildungen unterstützt wird, die elementarsten mathematischen Kenntnisse genügen. Der Stoff ist so angeordnet, dass niemals später Folgendes vorausgesetzt, sondern nur auf früher Besprochenes zurückverwiesen wird, wodurch dem Anfänger das Studium wesentlich erleichtert wird. Um aber auch dem Bedürfnis von Mittel- und Hochschulen gerecht zu werden, sind (kleiner gedruckte) Abschnitte eingestreut, welche die wichtigsten Entwickelungen und Beweise in möglichst knapper elementarer Darstellung enthalten. Auch geschichtliche Daten haben gebührende Berücksichtigung gefunden und durch ein ausführliches Namen- und Sachregister ist dafür gesorgt, dass das Werk auch als bequemes Nachschlagebuch dienen kann.

Die Darstellung ist immer anziehend und klar. So reich die Litteratur nach dieser Seite hin ist, war doch ein wirklich brauchbares Buch über die ganze Physik unter Berücksichtigung der neuen Forschungen auf dem Gebiete der Elektricität ein Bedürfnis.

Das Buch eignet sich somit nicht nur für den Studierenden, sondern auch für Gymnasien, Realgymnasien und Mittelschulen sowie zum Privatstudium.

---

# Lichtelektrische Apparate

nach **Elster** u. **Geitel.** ***Amalgam-Apparate*** (Wied. Ann. 42, p. 564, Fig. 1) und ***Kaliumzellen*** (Wied. Ann. 43, p. 225) sowie dazu passende Säulen und Elektroscope liefert

**Louis Müller-Unkel,**
**Braunschweig,** Rebenstr. 13.

---

# Chemische Fabrik List vor Hannover,

## E. de Haën,

gegründet 1861

**fabricirt technische und pharmaceutische Producte aller Art.**

---

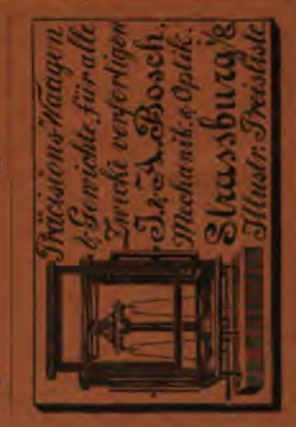
**Johann Ambrosius Barth in Leipzig.**

**Neue wohlfeile Ausgabe**
der

# Mondkarte

**in 25 Sectionen und 2 Erläuterungstafeln**
von
**Wilhelm Gotthelf Lohrmann**
herausgegeben von
**Dr. J. F. Julius Schmidt**
weil. Direktor der Sternwarte zu Athen
mit einem Vorwort von
**Dr. H. Ebert**
Privatdocent an der Universität Erlangen.

27 Kupfertafeln 4° und Text VIII, 54 Seiten 4°
statt 50 M. jetzt 25 M.



Electrotechnisches Institut
Emil Braunschweig, Frankfurt a. M.

Voltmeter, Ampèremeter, Milli-Ampèremeter
Taschenvoltmeter in Uhrform.

**Accumulatoren nach Patenten Faure und Julien**
**stationär und transportabel**
in jeder gewünschten Grösse und Zusammenstellung.

Ganze electrische Einrichtungen
**für Laboratorien**
**zu Versuchszwecken und zur quantitativen chemischen Analyse durch Electrolyse.**

Astatische
Spiegelgalvanometer,
modificirt von
Dr. H. E. J. G. du Bois und Dr. H. Rubens.

Quarzfäden für Galvanometer und Fadenkreuze, Messinstrumente, Rheostaten, Funkeninductoren, Vorschaltwiderstände, physikalische Apparate, Elemente und Tauchbatterieen.

**Keiser & Schmidt,**
Berlin N., Johannisstrasse 20.

